

ИЗ НАСЛЕДИЯ МИРОВОЙ ФИЛОСОФСКОЙ МЫСЛИ



ФИЛОСОФИЯ
НАУКИ

Е. ДЮРИНГ
КРИТИЧЕСКАЯ
ИСТОРИЯ
ОБЩИХ ПРИНЦИПОВ
МЕХАНИКИ

*Настоящая книга
была удостоена
философским факультетом
Геттинггенского университета
Первой премии Бенеке*



Eugen Dühring

KRITISCHE GESCHICHTE DER ALLGEMEINEN
PRINCIPIEN DER MECHANIK

Е. Дюринг

**КРИТИЧЕСКАЯ
ИСТОРИЯ
ОБЩИХ ПРИНЦИПОВ
МЕХАНИКИ**

Перевод
с третьего немецкого издания
Н. Н. Маракуева

Издание второе



URSS

МОСКВА

Дюринг Евгений

Критическая история общих принципов механики: Пер. с нем.
Изд. 2-е. — М.: КРАСАНД, 2011. — 552 с. (Из наследия мировой
философской мысли: философия науки.)

Вниманию читателей предлагается книга немецкого философа Евгения Дюринга (1833–1921), ставшая одним из наиболее значительных его произведений и в то же время первой в мировой научной литературе критической историей принципов (то есть, как указывает автор, существенных начал, успехов и направлений) механики. Е. Дюринг излагает историю возникновения и развития основных принципов механики и раскрывает их внутреннюю связь, группируя изучаемые явления около особенно выдающихся имен — Галилея, Ньютона, Гюйгенса, Лейбница, семьи Бернулли, Эйлера, Лагранжа и др. В книге не только подробно показывается, когда, кем и по поводу каких определенных задач был высказан каждый отдельный существенный принцип механики, но и рассматривается, в какой мере этот принцип есть понятное само по себе логическое положение, в какой служит выражением общепринятого факта опыта, а в какой является просто допущением, вероятным при определенных границах опытного знания. В заключении автор описывает различные методы изучения физико-математических наук.

Книга, оказавшая в свое время влияние на развитие некоторых философских течений, и в наши дни будет с интересом прочитана философами, историками и методологами науки, специалистами в области естественных наук — физиками и математиками, студентами, аспирантами и преподавателями соответствующих специальностей.

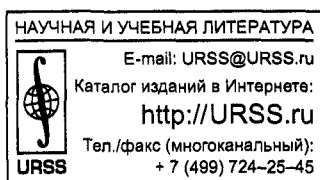
Издательство «КРАСАНД». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 34,5. Зак. № 4369.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-396-00341-5

© КРАСАНД, оформление, 2010



9906 ID 121510



ОТЪ ПЕРЕВОДЧИКА.

Предлагаемая русской публикѣ въ переводѣ книга Дюринга—одно изъ капитальнѣйшихъ произведеній геніальнаго автора, одно изъ такихъ произведеній, появленіе котораго составило бы цѣлое событіе въ какой угодно литературѣ. Это—первая, и до сихъ поръ почти единственная *), критическая исторія принциповъ механики. Въ совершенствѣ владѣя предметомъ, авторъ развиваетъ въ ней исторію возникновенія и превращенія основныхъ принциповъ механики и раскрываетъ внутреннюю связь ихъ, группируя изучаемыя явленія около особенно выдающихся именъ. Такимъ образомъ, указавъ въ краткихъ чертахъ завоеванія древности въ области принциповъ механики, авторъ открываетъ картину успѣховъ новаго времени эпохою великаго основателя динамики и подробно излагаетъ результаты изслѣдованій Галилея и его періода; затѣмъ слѣдуютъ діадихи 17-го вѣка—Гюйгенсъ и Ньютонъ, отъ которыхъ авторъ переходитъ къ корифеямъ 18-го вѣка, изображая любопытную исторію, въ которой фигурируютъ имена Лейбница, членовъ фамилии Бернулли, д'Аламбера, Эйлера и друг., съ особенною тщательностью останавливаясь на систематизирующей дѣятельности Лагранжа, и съ тѣмъ вмѣстѣ переходя къ 19-му столѣтію, гдѣ исторія механики доведена до работъ Роберта Майера включительно, т.-е. до нашихъ дней. Полную характеристику этого превосходнаго произведенія читатель найдетъ ниже—въ оцѣнкѣ ученой комиссіи, увѣнчавшей работу Дюринга первою премією Бенеке, а потому распространяться о достоинствѣ книги вторично нѣтъ надобности. Но считаемъ не лишнимъ указать на заключительную главу, о ко-

*) Недурная книга Эрнста Маха (E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, 1-е изданіе 1883, 2-е—1889) появилась значительно позднѣе, и съ трудомъ Дюринга не можетъ быть и сравниваема.

торой въ отчетѣ сказанной комиссіи не упоминается, такъ какъ глава эта появилась только во второмъ изданіи; эту дополнительную главу мы особенно рекомендуемъ вниманію читателя. Появленіе ея вызвано было запросами, съ которыми обращались къ автору читатели перваго изданія. Въ этомъ дополнительномъ эскизѣ Дюрингъ преподаетъ совѣты, какъ удобнѣе съ меньшею затратою силъ и времени открыть себѣ доступъ въ область физико - математическихъ наукъ, какого метода держаться, изучая эти науки, какія руководства всего лучше ведутъ къ цѣли, вообще, эта дидактическая глава всесторонне освѣщаетъ надежнѣйшій путь къ самостоятельнымъ студіямъ. Итакъ, благодаря этимъ драгоценнымъ указаніямъ Дюринга, всякій новичокъ, вступая въ область физико-математическихъ наукъ, получаетъ возможность сразу въ ней оріентироваться.

1-го октября 1892 г.

Главные пункты внѣшней исторіи предлежащаго труда.

S'il y a encore quelque chose à désirer dans la mécanique, c'est le rapprochement et la réunion des principes qui lui servent de base et peut-être même la démonstration rigoureuse et directe de ces principes.

Lagrange.

Въ апрѣлѣ 1869 г. философскій факультетъ Геттингенскаго университета въ первый разъ на соисканіе преміи Бенеке, происхожденіе которой нѣсколько освѣщаютъ нижеслѣдующія разясненія, предложилъ такую тему:

«Факультетъ желаетъ вызвать появленіе Критической Исторіи основныхъ принциповъ механики. Приличнымъ начальнымъ пунктомъ изложенія назначается время Галилея; причемъ желательно, чтобы авторъ, отнюдь не затрогивая теорій спекулятивной философіи древности, коснулся и завоеваній античной математики и механики, и то лишь во введеніи, и въ размѣрахъ, необходимыхъ для пониманія предмета.

«Историческая сторона работы имѣетъ показать, *когда, кѣмъ* и по поводу *какихъ* опредѣленныхъ *задачъ* каждый отдѣльный существенный принципъ механики былъ впервые найденъ и высказанъ; когда, кѣмъ и по поводу какихъ иныхъ опредѣленныхъ требованій или изслѣдованій первоначальное выраженіе теоремъ испытало измѣненія, или дотолѣ разрозненныя соединены были въ одно всеобщее начало. Приэтомъ, факультетъ, не требуя пространныхъ изслѣдованій различныхъ приложеній принциповъ, тѣмъ не менѣе, придаетъ значеніе указанію оригинальныхъ примѣровъ, на которыхъ всяческое пониманіе ихъ впервые было испробовано.

«Критическая сторона работы,—причемъ внѣшнее отдѣленіе ея отъ исторической или полное слитіе обѣихъ предоставляется на

вкусъ и усмотрѣніе соискателей, имѣетъ показать, въ какой мѣрѣ каждый изъ этихъ механическихъ принциповъ есть просто самопонятное логическое основоположеніе, въ какой мѣрѣ онъ есть необходимое для употребленія математическое формулированіе этого основоположенія, въ какой мѣрѣ, напротивъ, служить выраженіемъ общепринятаго факта опыта, въ какой мѣрѣ, наконецъ, просто есть допущеніе, вѣроятное при современныхъ границахъ опытнаго знанія.

«Факультетъ ожидаетъ, что какъ въ исторической, такъ и въ критической части вниманіе будетъ обращено не исключительно на работы математиковъ и физиковъ, но разсмотрѣно будетъ и полезное и вредное вліяніе, выступающихъ въ предѣлахъ изображаемаго періода, философскихъ теорій. Но чтобы сократить размѣры задачи, факультетъ не требуетъ изслѣдованія собственно физическихъ теорій и гипотезъ о строеніи дѣйствительныхъ тѣлъ и о природѣ дѣйствительныхъ явленій, равно и изслѣдованія химическихъ процессовъ, органической и психической жизни; предоставляется автору, въ видѣ прибавленія, указать направленія, въ которыхъ доселѣ общіе механическіе принципы нашли доступъ въ эти области. Напротивъ, желательно, чтобы изслѣдованіе простиралось и на новые способы представленія о силахъ природы, объ ихъ способахъ дѣйствія и о переходѣ ихъ изъ одной формы дѣйствія въ другую, способы, примыкающіе главнымъ образомъ къ изслѣдованіямъ о механическомъ эквивалентѣ теплоты».

Въ официальномъ факультетскомъ засѣданіи 11 марта 1872 г. сдѣланъ былъ докладъ о пяти поступившихъ работахъ. Сужденіе касательно предлагающаго сочиненія (опубликованное въ Извѣстіяхъ Геттингенскаго Королевскаго Ученаго Общества, № 8 отъ 13 марта 1872 г.) гласитъ дословно:

«Пятая работа съ девизомъ: *S'il y a quelque chose etc.*, содержащая 586 мелко написанныхъ страницъ in-folio, потребовала отъ факультета немалого труда, но о немъ онъ вспоминаетъ съ удовольствіемъ. Уже подробнымъ перечнемъ содержанія она возбуждаетъ надежду, что въ ней дѣйствительно тщательно разсмотрѣны всѣ вопросы, какіе программа факультета рекомендовала вниманію соискателей. Исполненіе блистательнѣйшимъ образомъ оправдываетъ эту надежду. Въ совершенствѣ и свободно владѣя предметомъ, при необыкновенно обширныхъ точнѣйшихъ познаніяхъ въ литературѣ, авторъ не только разсматриваетъ всѣ существенные пункты, но множество небольшихъ изслѣдованій, которыя хотя и не необходимы, но заслуживаютъ полного одобренія, вездѣ служа къ болѣе полному уясненію предмета, свидѣлствуетъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, о великой

любви и осмотрительности, съ каковыми авторъ отдавался своей работѣ. Не смотря на обширность матеріала, авторъ легко справился съ нимъ. Изложеніе у него не отдѣлено отъ критики; соединяя одно съ другою, онъ слѣдуетъ теченію эпохъ, различающихся по отношенію къ механикѣ; при тонкомъ чутьѣ къ ясному разграниченію матеріала ему удалось,—чего факультетъ прежде всего желалъ,—пролить поучительный историческій свѣтъ на всю духовную печать періодовъ, на научный характеръ руководящихъ личностей и на прогрессивное развитіе отдѣльныхъ принциповъ и теоремъ. Равнымъ образомъ, не оставлено безъ вниманія и ни одно изъ частныхъ требованій, высказанныхъ въ программѣ задачи. Первоначальныя задачи, разработка которыхъ приводила къ каждому новому принципу или теоремѣ, повсюду воспроизведены вполне наглядно, а постепенныя превращенія, каковыя каждый изъ нихъ испыталъ, тщательно прослѣжены по всѣмъ промежуточнымъ звеньямъ. Вездѣ указаны соприкосновенія механическихъ мыслей съ философскою спекуляціей; эти разъясненія развиваются не только въ особыхъ главахъ, но тонкій философскій инстинктъ, руководившій авторомъ и на этой почвѣ, ясно видѣнъ также во множествѣ пояснительныхъ примѣчаній, вплетенныхъ въ подобающихъ мѣстахъ и въ изложеніе механическихъ изслѣдованій. Пріятное впечатлѣніе, производимое цѣлымъ, усиливается и весьма простымъ, но богатымъ удачными оборотами, языкомъ, теплымъ участіемъ ко всякой заслугѣ, просвѣщеннымъ извиненіемъ неудачи и особенно снисхожденіемъ, съ какимъ авторъ минуетъ ложныя воззрѣнія. Только одно замѣчаніе. Авторъ не скупится на повторенія уже ранѣе высказанныхъ положеній, работа его изобилуетъ ссылками на нихъ; если бы это былъ рядъ лекцій, то сказанныя повторенія являлись бы хорошо рассчитаннымъ средствомъ отличнаго преподаванія; равно и въ печати они тамъ не задерживали бы читателя, какъ при чтеніи рукописи. Во всякомъ случаѣ, можно посовѣтовать автору нѣсколько сократить, по крайней мѣрѣ, вторую половину работы, гдѣ, съ одной стороны, и безъ того самая природа дѣла вынуждаетъ къ частымъ повтореніямъ тѣхъ же мыслей въ различныхъ формахъ, а съ другой стороны все, на что авторъ хочетъ обратить вниманіе, можно считать достаточно внушеннымъ уже предшествующими главами. Больше факультету сказать нечего; онъ, виновникъ этой прекрасной работы, съ удовольствіемъ признавая, что ея задача разрѣшена вполне, даже превосходя кое-какія ожиданія, публично признаетъ ея автора достойнымъ *первой* преміи».

Основателемъ преміи, впервые присужденной автору этого труда, былъ умершій въ 1864 г. совѣтникъ консисторіи К. Г.

Бенеке, завѣщавшій ее въ память о своемъ братѣ Ф. Э. Бенеке и о его философскихъ стремленіяхъ. Геттингенскій философскій факультетъ, коему магистратъ города Берлина, какъ кураторъ завѣщанія, ввѣрилъ ежегодное присужденіе премии, принялъ на себя это подъ условіемъ, что тѣмы будутъ выбираться изъ области всѣхъ тѣхъ наукъ, которыя преподаются въ философскомъ факультетѣ. Поэтому, неудивительно, что это первое присужденіе премии выпало на долю работы по прикладной математикѣ, т.-е. по предмету позитивному. Что касается судьбы Ф. Э. Бенеке, въ честь коего и въ смыслъ воззрѣній коего сдѣлано завѣщаніе, то онъ уже въ 1822 году, будучи приватъ-доцентомъ философіи въ Берлинскомъ университетѣ, былъ отрѣшенъ отъ должности либеральничавшимъ министромъ Альтенштейномъ, по проискамъ тогдашняго главнаго профессора философіи, Гегеля, якобы за матеріалистическія убѣжденія. Черезъ нѣсколько лѣтъ, оправданный и впоследствии, по смерти названнаго профессора добивавшійся, по крайней мѣрѣ, экстраординарной профессуры, онъ все-таки не достигъ никакой ординарной должности въ факультетѣ, хотя его дѣятельность при университетѣ и въ литературѣ была болѣе чѣмъ достаточна для подобныхъ неважныхъ притязаній, а его философскія работы неизмѣримо превосходили работы весьма зауряднаго тогдашняго ординарнаго профессора, нынѣ давно забытаго берлинскаго главнаго профессора, позднѣе задававшего тонъ факультету, именно Тренделенбурга. Повидимому, Бенеке не оставался равнодушенъ къ интригамъ университета, сущности которыхъ онъ не раскусилъ, и погибъ въ 1854 г. на 57 году отъ роду. Трупъ его былъ найденъ неподалеку отъ Берлина.

Рѣдкостныя злословія приватдоцентовъ, пользующихся извѣстностью, въ Берлинскомъ университетѣ—вещь обыкновенная. Лѣтъ за двадцать до случая съ Бенеке тому же университету показалъ спину Шопенгауэръ, но, конечно, не за тѣмъ, чтобы отправиться въ воду, а за тѣмъ, чтобы расправиться съ университетскою философіей. Двадцать лѣтъ спустя по смерти Бенеке (1875), этотъ же университетъ ревностно занимался,—причемъ дѣло на этотъ разъ шло не совсѣмъ гладко,—выживаніемъ автора этого сочиненія, такъ что покончилъ съ нимъ только при вторичномъ натискѣ (1877). Конечно, послѣднее никакъ не послужило къ упроченію университета, ибо при этомъ поднялась такая буря, какую университетамъ рѣдко приходилось выдерживать! Ближайшія подробности

о неожиданномъ исходѣ этого дѣла читатель найдетъ въ 8-й главѣ моего сочиненія «Дѣло, жизнь и враги», въ которомъ начертана общая программа моихъ стремленій; хотя здѣсь разыгранная университетомъ исторія, по сравненію съ болѣе обширнымъ предметомъ книги, и освѣщена лишь вскользь, но ею достаточно характеризуется современное состояніе ученыхъ сферъ.

Въ дополненіе къ исторіи книги и къ сужденію о ней прибавлю еще, что если я въ отношеніи къ моей работѣ чѣмъ-либо обязанъ игрѣ случая въ факультетѣ (не его доброму желанію), то и факультетъ кое-чѣмъ обязанъ тому же случаю, который шелъ ему навстрѣчу въ формѣ моей работы; онъ обязанъ также и моимъ честнымъ стараніямъ. Хотя, начиная съ 1869 г. и до сего времени онъ ежегодно ставилъ на очередь ту или другую тѣму, и въ этихъ видахъ располагалъ всею областью позитивнаго знанія, но данный случай былъ еще первымъ, когда факультетъ, поступая, въ видѣ исключенія, цѣлесообразно по новому, имѣлъ и соотвѣтственный полный успѣхъ. На разсмотрѣніе поступило пять работъ, считая въ томъ числѣ и мою, что въ подобной позитивной специальной области является уже случаемъ сильной конкуренціи. Въ числѣ ихъ была даже одна, которую факультетъ нашелъ достойною второй, низшей, преміи. Но какъ измѣнилась съ тѣхъ поръ картина! Объявленныя тѣмы большею частью остаются безъ отвѣта; раза два случилось удостоеніе лишь второю премією, но уже не первою, а разъ увѣнчана была премією работа вполне заурядная. Нерѣдко на многократныя повторенія той же тѣмы не поступало ни одной работы. Такимъ образомъ, основанное Бенеке учрежденіе почти не приносило плодовъ. Это зло или, лучше, неудача обуславливалось прежде всего самымъ выборомъ задачъ, а затѣмъ иногда и отвѣтами. Итакъ, если учрежденіе преміи Бенеке и дѣятельность Геттингенцевъ по этой части и имѣетъ нѣчто въ родѣ исторіи, то это обстоятельство всякій знатокъ дѣла и безпристрастный цѣнитель долженъ приписать моей работѣ.

Въ моей книгѣ, какъ и въ другихъ моихъ исторіяхъ знанія, не просто писалась исторія, но и разрабатывалась исторія дѣла. И это не просто въ смыслѣ того Лагранжевскаго изреченія, которое, какъ наиболѣе соотвѣтственное, выбралъ я эпитафиею моей работы. Сравни объ этомъ § 135. Оригиналь гласитъ дословно: «S'il ya encore quelque chose à desirer dans la mécanique, c'est le rapprochement et la réunion des principes qui lui servent de base et peut-être même la demonstration

rigoureuse et directe de ces principes». Это было сказано противъ направленія 18-го вѣка и спустя десятилѣтіе послѣ перваго появленія Аналитической Механики. Великій и, что еще важнѣе, честный математикъ проработалъ еще 15 лѣтъ и все-таки остался при томъ убѣжденіи, что все еще не вполне ясные исходные пункты требуютъ дальнѣйшаго освѣщенія. Нынѣ этой Аналитической Механикѣ, прекрасный очеркъ которой, вышедшій изъ-подъ пера Лагранжа, составилъ эпоху, явивъ собою новыя основанія, нынѣ этой механикѣ исполнилось уже столѣтіе. И однако, что касается оцѣнки и правильного пониманія этой книги, а именно ея общаго уравненія, то наше время въ этомъ отношеніи далеко отстало. И если уже появились признаки лучшаго ея пониманія, то, мнѣ кажется, я рѣшительно имѣю право отнести это на свой счетъ. Но моего указанія высокихъ и благородныхъ качествъ Лагранжа не слѣдуетъ принимать въ такомъ смыслѣ, будто бы я стою за сохраненіе границъ личныхъ его цѣлей и его манеры. И именно прежде всего въ области чистой математики должны быть далѣе поставлены вѣхи и приобрѣтена болѣе твердая почва. А сюда, само собою разумѣется, примыкаетъ не просто углубленіе и расширеніе, но и полное проясненіе всей области механики.

Итакъ, если бы я не захотѣлъ сохранить заглавія моей книги «Критическая исторія» и т. д., то долженъ бы былъ охарактеризовать содержаніе ея такъ: Общіе принципы механики, разсматриваемые критически и съ точки зрѣнія развитія системы, съ усовершенствованіями автора и т. д. Конечно, если говорить объ усовершенствованіи въ такомъ родѣ, какого въ нѣкоторыхъ пунктахъ еще можно достигнуть, то до моего идеала тамъ и сямъ еще далеко. Да кромѣ того, что касается всей области математики и ея приложений, то я имѣю въ виду болѣе абстрактное и высшее ея пониманіе. Впрочемъ, что еще остается добавить, мнѣ или моему сыну, для завершенія системы и для обогащенія отдѣльныхъ частей, о томъ говорить здѣсь было бы неумѣстно, разъ рамки подлежащаго труда уже даны. Всему свое мѣсто и свое время, т.-е. то, что остается сдѣлать, должно быть дано не какъ пристройка къ историческому труду, но какъ самостоятельная историческая функція, т.-е. какъ функція, дѣлающая исторію.

Е. Дюрингъ.

ВВЕДЕНИЕ.

Значеніе предмета и отношеніе къ древности.

1. Критическая исторія научныхъ принциповъ имѣетъ притязаніе на нѣчто большее, чѣмъ обыкновенно требуется отъ исторіи науки въ узкомъ смыслѣ этого слова. Поэтому, если бы и имѣлось уже налицо,—чего на дѣлѣ нѣтъ,—сочиненіе, трактующее объ исторіи механики, то, судя по обычному, болѣе или менѣе компилятивному характеру такихъ сочиненій въ смежныхъ областяхъ знанія, какъ напр. по существующимъ исторіямъ математики, напередъ можно заключить, что въ такомъ трудѣ мы не нашли бы критической исторіи принципиальныхъ существенныхъ началъ, успѣховъ и направленій. Внести въ обработку исторіи систему и сдѣлать надлежащій выборъ матеріала—труднѣе, чѣмъ просто собрать факты разнаго рода и сопоставить ихъ или просто расположить въ послѣдовательномъ порядкѣ. Въ послѣднемъ, обычномъ, случаѣ самые собранные факты покажутъ, каково ихъ взаимное отношеніе, и читатель можетъ самъ попытаться, очистить матеріалъ отъ ненужныхъ примѣсей и привести его въ порядокъ, исходя изъ опредѣленныхъ критическихъ точекъ зрѣнія. Исторія же началъ, самою своею цѣлью, указываетъ—искать ясныхъ разграниченій, и при этомъ, будетъ ли предметъ разсматриваться въ мельчайшихъ его деталяхъ, или же со стороны схематизма, обращать вниманіе на то, въ какой мѣрѣ и эти детали, и этотъ схематизмъ содѣйствовали развитію науки, т.-е. вели къ существеннымъ ея измѣненіямъ и обогащеніямъ.

Въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы понимаемъ начала механики, они обнимаютъ собою все существенное науки и за исключеніемъ ихъ все остальное лишь второстепенныя детали. Такое ограниченіе одинаково относится какъ къ чистой механикѣ, такъ и къ математическимъ вспомогательнымъ средствамъ. И въ области послѣднихъ можно требовать указанія тѣхъ отдѣльныхъ направленій, при посредствѣ которыхъ создана была напримѣръ аналитическая механи-

ка, и намъ особенно нужны подробныя указанія на эту сторону дѣла, чтобы выяснить основанія, въ силу которыхъ раціональная механика сдѣлалась въ новѣйшее время аналитическою по преимуществу. Рѣшеніе задачи о центрѣ качанія имѣло въ принципіальномъ отношеніи огромное значеніе, и по этому примѣру можно зане ранее судить о томъ, какъ слѣдуетъ понимать принципіальное въ дѣлѣ созиданія науки. Особенно—выдающіяся воззрѣнія, съ которыми можно связать многое другое, суть истины начала и зачатки, и нужды нѣтъ, что они выводятся изъ ранее установленныхъ посылокъ, лишь бы сами они, въ свою очередь, являлись на пути науки станціями особеннаго рода и такимъ образомъ представляли бы, хотя и относительные, исходные пункты для новыхъ ступеней развитія.

2. Съ чисто логической точки зрѣнія, существуютъ различные порядки началъ. Первый разрядъ ихъ обнимаетъ дѣйствительныя аксіомы или такія предложенія, которыя по крайней мѣрѣ временно играютъ роль аксіомъ. Всякое доказательство сводится къ первоначальнымъ самопонятнымъ началамъ, не нуждающимся въ доказательствахъ и даже недоказуемымъ. Основныя начала геометріи представляютъ хорошо извѣстный примѣръ этого рода. Но науки, имѣющія дѣло не просто съ представленіями—въ родѣ чиселъ или пространственныхъ воображаемыхъ въ умѣ построеній, но предметомъ которыхъ служить настоящая дѣйствительность, и слѣдовательно медиумъ физической тѣлесности, т.-е. матерія и сила, основываются—какъ таковыя—не на самопонятныхъ воззрѣніяхъ, но на простыхъ, болѣе неразложимыхъ физическихъ фактахъ. А потому основныя начала пріобрѣтаются здѣсь изъ фактическаго матеріала, а не изъ чистаго мышленія. Настоящими аксіомами въ реальныхъ наукахъ служатъ не основныя схемы мышленія, но основныя элементы состоянія природы. Наблюденіемъ, экспериментальнымъ разложеніемъ и заключающимъ мышленіемъ они выдѣляются изъ разнообразныхъ физическихъ процессовъ, и простота ихъ дѣлается такимъ образомъ очевидною. Сообразно этому, механика, какъ наука реальная, имѣетъ здѣсь свою принципіальную почву, а все, что касается относительныхъ принциповъ, должно быть сводимо въ ней къ сочетанію такихъ первоначальныхъ фактическихъ элементовъ.

Раціональный характеръ механики заключается въ сочетаніи фактовъ не просто какъ причины и дѣйствія, но какъ основанія и слѣдствія. Механизмъ природы, а также всякій механизмъ, созданный руками человѣка,—въ особыхъ проявленіяхъ своихъ дѣйствій познается сообразно съ опредѣленными общими способами дѣйствія. Для этого необходимы не просто причины, но дознанныя

причины, т.-е. реальные основанія, и научность механики самой по себѣ; равно какъ и ея различныхъ приложений, измѣряется вполнѣ и единственно степенью пониманія, каковое будетъ раскрыто относительно общихъ основаній вещей въ специальныхъ и сложныхъ процессахъ.

Такой рациональности не имѣется еще въ наличности, пока механическая практика опирается на непосредственное, болѣе инстинктивное и ограниченное узкими цѣлями, сужденіе, безъ всякаго высшаго, теоретическаго интереса. Извѣстныя практическія познанія въ механикѣ существовали довольно задолго до того, какъ объяснены были хотя бы простѣйшіе способы дѣйствія силъ. Уже по сооруженіямъ египетской и индійской древности можно судить о примѣненіи механическихъ приспособленій для передвиженія большихъ тяжестей. Наслѣдіе греческаго міра даетъ уже болѣе. Оно свидѣтельствуетъ о примѣненіи весьма простыхъ механизмовъ; но даже для тѣхъ эпохъ, когда механическая практика достигла большаго совершенства, мы не имѣемъ никакихъ рѣшительныхъ доказательствъ, чтобы уже имѣлось на лицо нѣкоторое научное сознаніе о механическихъ отношеніяхъ ранѣе появленія работъ Архимеда. Впрочемъ, Аристотель зналъ уже начало рычага¹; но онъ не умѣлъ его доказать. Другіе знали больше его, хотя онъ, за исключеніемъ познаній въ математикѣ, стоялъ на уровнѣ своего вѣка. Но готовые результаты и обычныя сносныя доказательства едва ли могли быть неизвѣстны «читателю», какъ его называетъ Платонъ,—если принять въ расчетъ его универсальную ученость. Представленія и разсужденія специалистовъ или болѣе точныхъ математиковъ—теоретиковъ, навѣрное, были лучше, чѣмъ спекуляціи Аристотеля; но опредѣленными результатами они не были богаче его.

3. Произведенія, показывающія намъ положительнымъ и доступнымъ точнѣйшей провѣркѣ образомъ, чего достигъ древній міръ въ научной механикѣ, принадлежатъ Архимеду. Особенною характерною чертою этихъ остроумныхъ произведеній, коими пролагаются новые пути въ наукѣ, является ограниченіе изслѣдованій областью статики, и что еще важнѣе, чисто статическими методами. У Архимеда мы не находимъ даже слѣда того шага, при посредствѣ котораго, по возрожденіи механики въ новое время, тотчасъ же статическія отношенія сведены были къ случайнымъ возможнымъ движеніямъ, и этимъ объясняется, почему дѣйствительныя начала механики въ древности еще не могли играть никакой роли. Глубже проникающія начала должны быть общими и

¹ См. его *Quaestiones mechanicae*.

отношеніямъ равновѣсія и отношеніямъ движенія. Они предполагаютъ, поэтому, по крайней мѣрѣ, зачатки динамики, а основаніе этой новой, вполне новому времени принадлежащей науки, положено было впервые Галилеемъ.

Античная, строго научная статика, такъ, какъ она представлена Архимедомъ, ограничивалась въ сущности ученіемъ о центрѣ тяжести и выводомъ условій равновѣсія и устойчивости погруженныхъ и плавающихъ тѣлъ. Прочія познанія Архимеда, каковы о различныхъ механическихъ силахъ, не допускаютъ непосредственной оцѣнки, какъ почти и вся остальная теоретико-механическая наука древности, ибо простыя извѣстія и слѣды, изъ которыхъ можно заключить о теоретическомъ занятіи отдѣльными вѣтвями механики, не могутъ замѣнить самого предмета. Но часто они служатъ достаточнымъ указаніемъ на то, чего не знали и не могли достигнуть. Кромѣ того, для историческаго развитія уже потому имѣетъ значеніе лишь документально достовѣрное знаніе, что одно оно, но никакъ не какое-нибудь неопредѣленное указаніе, могло служить точками приложенія для новѣйшихъ начинаній. Это обстоятельство указываетъ также—говорить о проторяющихъ новые пути частностяхъ лишь тогда, когда этого потребуетъ какое-либо ихъ отношеніе къ предпріятіямъ новаго времени.

4. Только что упомянутое основаніе вынуждаетъ насъ лишь тогда давать широкое развитіе всему тому, что у Архимеда важно въ принципиальномъ отношеніи, когда усмотримъ, что оно приобретаетъ новое значеніе и какъ-бы снова оживаетъ при вступленіи въ новое время въ рукахъ новѣйшихъ изслѣдователей. На все, что случайно дошло до насъ изъ его произведеній, можно, во-первыхъ, смотрѣть почти какъ на *sepulchrum mortui*; ибо оно даетъ намъ вмѣсто методовъ открытія лишь лѣса готовыхъ предложеній и такихъ доказательствъ, которыя имѣютъ въ виду скорѣе понужденіе къ признанію, чѣмъ основанія возникновенія воззрѣній. Новое время должно было само позаботиться объ изысканіи для себя методовъ, и если не подлежитъ никакому сомнѣнію, что Архимедъ и древніе при изысканіи истинъ пользовались извѣстными естественными методами и способами представленія, то все же они никогда ихъ не выставляли, ибо главное ихъ вниманіе въ изложеніи обращено было на строгость принудительной формы доказательства. Методъ истощенія величинъ въ ихъ геометріи служить примѣромъ того, какъ въ своихъ доказательствахъ они умышленно замѣняли непосредственно руководящія представленія логическими изворотами, каковыми только, по мнѣнію ихъ, и могла обезпечиваться въ каждомъ случаѣ формальная строгость сужденія. Нѣчто подобное, но

въ еще болѣе рѣшительной формѣ, должно было имѣть мѣсто и въ механикѣ, и это обстоятельство объясняетъ намъ въ нѣкоторой мѣрѣ тотъ фактъ, что античное наслѣдіе неспособно было вліять своею просто документальною наличностію и не могло замѣнить собственныхъ творческихъ побудовъ, въ которыхъ чувствовался полнѣйшій недостатокъ въ теченіе всѣхъ среднихъ вѣковъ. Возбужденіе, вызванное этими сочиненіями въ самомъ началѣ новаго времени, было не такого рода, чтобы дѣйствовать на пассивныя поколѣнія. Самостоятельныя творческія стремленія времени и духъ превосходныхъ научныхъ характеровъ, — вотъ что извлекло изъ этого античнаго наслѣдія нѣчто большее готовыхъ результатовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы не обязаны древнему міру формулированіемъ ни одного жизненно производительнаго принципа познанія въ механикѣ, который можно было бы сравнить съ новѣйшими принципами, каковы, напр., начало сложенія силъ или даже возможныхъ скоростей. Архимедъ, въ своемъ сочиненіи о равновѣсіи плоскостей исходитъ изъ поставленнаго въ самомъ началѣ первой книги аксіоматическаго предложенія, что «одинаковыя тяжести, дѣйствующія въ равныхъ разстояніяхъ, находятся въ равновѣсіи». Съ помощію этого, бездоказательно принятаго, допущенія доказываетъ онъ въ шестомъ предложеніи общее начало рычага. Дальнѣйшіе выводы его теоріи равновѣсія касаются центровъ тяжести, и прежде всего (въ первой книгѣ) простѣйшихъ фигуръ, каковы треугольникъ, и трапеція. Затѣмъ, во второй книгѣ онъ идетъ далѣе, основываясь на квадратурѣ параболы, и приложенія принимаютъ преобладающе-математическій характеръ. Вообще, обо всѣхъ дошедшихъ до насъ сочиненіяхъ Архимеда можно сказать, что ихъ главный предметъ — чистая математика, и что сочетаніе найденныхъ геометрическихъ предложеній съ механическими понятіями и задачами чаще всего служить лишь предметомъ для геометрическихъ упражненій.

5. Другой изъ обоихъ дошедшихъ до насъ трактатовъ по механикѣ Сиракузскаго математика есть трактатъ о плавающихъ тѣлахъ. Точчасъ во главѣ сочиненія стоитъ предложеніе, что въ жидкости часть, подверженная меньшему давленію, получаетъ побужденіе идти вверхъ со стороны части, подверженной большому давленію, и что каждая часть испытываетъ давленіе со стороны отвѣсно находящейся надъ нею жидкости. Пятое предложеніе первой книги говоритъ о томъ, что легчайшее тѣло погружается въ жидкость настолько, что вѣсъ вытѣсненной жидкости равенъ вѣсу самого тѣла, а седьмое предложеніе говоритъ о потерѣ тяжелѣйшимъ тѣломъ вѣса, равнаго вѣсу вытѣсненной жидкости. Все сочиненіе въ дальнѣйшихъ приложеніяхъ трактуетъ о шаровомъ

сегментъ и о параболическомъ коноидѣ, такъ что въ сущности все заключается въ примѣненіи простыхъ предложеній къ математически интереснымъ случаямъ. Устойчивость тѣлъ высшей геометріи, плавающихъ въ жидкости, составляетъ тончайшую сторону сложнѣйшихъ изслѣдованій, между тѣмъ какъ не только для нашей цѣли, но и для новѣйшей исторіи механики формулированіе простыхъ основныхъ истинъ гидростатики имѣетъ несравненно большее значеніе. Но и эти принципиальные начатки мы тогда только подвергнемъ болѣе точному разсмотрѣнію, когда поведемъ рѣчь объ относящихся къ нимъ работахъ новаго времени. Кстати замѣтить, работа Архимеда по гидростатикѣ дошла до насъ не въ греческомъ подлинникѣ, но въ арабскомъ переводѣ—въ крайне дефектномъ видѣ. Несмотря на это, Лагранжъ¹ оцѣнилъ эти изслѣдованія устойчивости какъ такія, «къ которымъ мало прибавлено въ новое время».

6. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что принципиальные начатки основаній общей механики ограничиваются двумя-тремя понятіями и теоремами статики и гидростатики. Прежде всего понятіе о центрѣ тяжести образуетъ первый исходный пунктъ для чисто теоретическихъ изслѣдованій. Затѣмъ, отношеніе силъ на рычагѣ было сдѣлано основою античныхъ толкованій. Напротивъ, гидростатика, что касается главнаго дѣла, обосновывается на особыхъ принципахъ и элементарныхъ теоремахъ, и мы не находимъ даже и слѣда вывода этихъ относительно простыхъ основаній изъ основныхъ предложеній и представлений общей механики. Это удалось только новымъ, разсматривавшимъ жидкость, въ какихъ бы границахъ каждый разъ она ни являлась, какъ естественную машину.

Но несмотря на ограниченный объемъ предмета, античныя начала и элементарныя предложенія своею формою, способомъ выраженія и постановкою, въ сравненіи съ обычнымъ образомъ выраженія новыхъ основныхъ и главныхъ предложеній, являютъ нѣчто логически цѣльное. Если что въ отношеніи ихъ смысла и можетъ дать поводъ къ сомнѣніямъ, это вопросъ о томъ, слѣдуетъ ли считать первыя, положенныя въ основаніе Архимедомъ, предположенія фактами опыта, или же, напротивъ, первоначальною разумною необходимостью. Конечно, самый образъ выраженія ничего не рѣшаетъ о томъ, обязано ли предложеніе о равновѣсіи на равноплечемъ рычагѣ своимъ происхожденіемъ опыту, или же симметрію отношеній слѣдуетъ разсматривать какъ чисто разумное основаніе одинаковому на обѣихъ сторонахъ отношенію. Новые изслѣдователи

¹ Mécanique analytique, 2-е изд. 1811. Т. I, первое отд. Sect. VI, Art. I.

имѣютъ обыкновеніе прибѣгать въ подобныхъ случаяхъ къ такому обороту, что нѣтъ никакого основанія, почему бы должно было послѣдовать дѣйствіе скорѣе въ одномъ смыслѣ, чѣмъ въ противоположномъ, т.-е. скорѣе на одной сторонѣ, чѣмъ на другой, и что, слѣдовательно, вообще, при отсутствіи подобнаго основанія, совершенно не можетъ имѣть мѣста перевѣсъ въ ту или другую сторону. Считая такое заключеніе законнымъ, они тѣмъ самымъ ясно обнаруживаютъ, что признаютъ рассматриваемое отношеніе чисто разумною необходимостью. Но предположить что-либо подобное у Архимеда, строго говоря, мы не имѣемъ никакого права. Древнимъ всего менѣе присуще было сознаніе о различномъ происхожденіи познанія. Лишь въ новѣйшее время вполне опредѣленно выступило принципиальное различіе разумной необходимости и фактовъ опыта. Потому эта критическая точка зрѣнія такова, что никакъ нельзя допустить, чтобы она могла имѣть какое-либо значеніе уже у Архимеда. Упрекъ въ неопредѣленности смысла, въ какомъ должно брать начала, слѣдуетъ, поэтому, или совсѣмъ отбросить, или же распространить на все неразвитое пониманіе въ древности. Въ томъ и другомъ предположеніи Архимедово формулированіе принциповъ остается неприкосновеннымъ въ своей формальной строгости. Ихъ содержаніе останется то же самое, допустимъ-ли мы, что оно обязано своимъ происхожденіемъ чисто простому представленію ума, или же опыту, или совмѣстному дѣйствію этихъ обоихъ элементовъ. Во всякомъ случаѣ, образцомъ для изложенія служило уже достаточно усовершенствованное состояніе чистой математики; но недостатки такой, впрочемъ, весьма натуральной односторонности касались, по меньшей мѣрѣ, настолько же доказательствъ, насколько самихъ принциповъ, и въ новое время они выступили еще замѣтнѣе, чѣмъ въ древности. Строгаго отдѣленія чисто математическаго отъ специально механическаго еще и въ наше время не вполне достигли, и одною изъ методически важнѣйшихъ задачъ нашей критики будетъ точное указаніе требуемыхъ въ этомъ отношеніи отграниченій.

7. Въ древности математика далеко превосходила потребности тогдашней механики; она овладѣла уже такими образами, для коихъ естественныя приложенія найдены были лишь въ новое время, и даже частію въ позднѣйшее. Важнѣйшимъ доказательствомъ этому служить теорія коническихъ сѣченій.

Напротивъ, новая наука поставлена въ этомъ отношеніи въ совершенно обратныя условія. Тѣ математическія воззрѣнія, при помощи коихъ могли быть надлежаще установлены и развиты Галилеевскія начала динамики, не разъ были находимы по указаніямъ самой задачи механики, такъ что вполне утвердительно можно

сказать, что въ новое время важнѣйшія составныя части математическаго знанія явились не столько плодомъ свободного духовнаго движенія, такъ сказать, игры мысли, какъ у Грековъ, сколько результатомъ требованій, предъявленныхъ со стороны матеріальнаго изслѣдованія.

Тѣмъ не менѣе въ высшей степени важно, что ко времени новаго возрожденія наукъ уже имѣлся на-лицо запасъ готовыхъ математическихъ воззрѣній, къ тому же обогащенный начатками уже обновленныхъ ариѣтики и алгебры. При помощи этого знанія и заложенныхъ Архимедомъ первыхъ началъ статики и гидростатики новые подготовлены были къ самостоятельнымъ изслѣдованіямъ. Возбуждающее вліяніе оказывали иногда не только безсвязные отрывки, но даже случайно сохранившіяся указанія простыхъ попытокъ, каковыя можно видѣть преимущественно въ коллекціяхъ Паппуса,—и не только тѣмъ, что въ нихъ было достигнуто, но и тѣмъ, чего въ нихъ не хватало.

Напротивъ, несравненно меньшее значеніе для основныхъ фактовъ механики имѣло все то, что сохранилось въ оставшихся извѣстіяхъ и въ отрывкахъ сочиненій по предмету практической механики отъ временъ послѣ-Архимедовскихъ. Все это наслѣдіе служить только подтвержденіемъ тому, что въ обоснованіи началъ вмѣсто прогресса скорѣе наступилъ регрессъ. Около столѣтія спустя послѣ эпохи Архимеда Геронъ (старшій) Александрійскій воспользовался правиломъ рычага для объясненія дѣйствія извѣстныхъ ему простѣйшихъ машинъ. Но истинно научный духъ съ тѣхъ поръ все болѣе и болѣе падалъ, такъ что Архимедъ и его время являются кулиминаціоннымъ пунктомъ раціональнаго механическаго знанія въ древности. Геометрическія и статическія работы одного этого мужа, даже въ томъ сокращенномъ и отчасти дефектномъ видѣ, въ какомъ онѣ дошли до насъ, имѣли больше значенія, чѣмъ все, что кромѣ того сохранилось по механикѣ и по связанной съ нею въ то время геометріи. Промежутокъ времени, отдѣляющій это плодотворнѣйшее въ отношеніи механики явленіе древности отъ первыхъ рѣшительныхъ попытокъ творческаго духа новыхъ временъ, для прогресса принциповъ какъ бы не существовалъ. Восемнадцать столѣтій, отдѣляющихъ Галилея отъ Архимеда, нисколько не мѣшаютъ связать одно явленіе съ другимъ почти непосредственно. Все, на что стоитъ обратить вниманіе во времена до—Галилеевскія или почти ему современныя, является преимущественно подготовительнымъ освѣщеніемъ античнаго наслѣдія. Но какъ это послѣднее явленіе имѣло мѣсто предъ самымъ появленіемъ Галилеевыхъ работъ, то весь упомянутый періодъ времени вполне можно назвать историческою пустынею.

Но какъ Галилей обязанъ древнимъ кое-чѣмъ только въ статикѣ, въ динамикѣ же является вполне самостоятельнымъ творцомъ, то и заимствованія изъ античной статики превращаются въ его рукахъ въ нѣчто принципиально лучше обоснованное. Статическія отношенія у него какъ-бы участвуютъ въ движеніи и жизни, свойственной динамическимъ возрѣніямъ. Всѣ толкованія дѣлаются глубже и сбра-сываютъ съ себя неподвижную форму, въ которой они были болѣе или менѣе отчуждены отъ натуральныхъ основъ жизненнаго бытія. Такимъ образомъ и статика получаетъ новыя основанія, и начала ея входятъ въ натуральную связь съ началами ново-созданной науки динамики. Но такіе результаты, очевидно, не могли быть одностороннимъ плодомъ простаго заимствованія; ихъ слѣдуетъ рассматри-вать какъ плодъ новаго углубленія въ простѣйшія и натуральнѣйшія начала механическихъ процессовъ. Такое положеніе дѣла слу-житъ также рѣшительнымъ основаніемъ, въ силу котораго крити-ческая исторія общихъ началъ должна начинаться съ новаго вре-мени и специально съ Галилея, а что и помимо этого имѣетъ значеніе въ принципиальномъ отношеніи, о томъ достаточно простаго указа-нія, подъ условіемъ подчиненія новымъ способамъ пониманія и но-вымъ исходнымъ пунктамъ.

ПЕРВЫЙ ОТДѢЛЪ.

Періодъ Галилея. — Основаніе Динамики.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Предшественники Галилея.

8. Если бы даже не было ничего извѣстно о познаніяхъ и идеяхъ тѣхъ, кто занимался до Галилея вопросами практической или теоретической механики, то все-же нельзя было-бы допустить, что новый родъ знанія явился на свѣтъ вдругъ, безъ всякихъ подготовительныхъ начинаній. Подобное допущеніе противорѣчило бы историческому закону непрерывности. Поэтому, какъ-бы высоко ни цѣнили мы участіе одной личности въ созданіи новой отрасли знанія, даже если-бы имѣли поводъ приписать этой одной личности все существенное въ созданіи цѣлой науки, то никакъ не слѣдовало-бы думать, что и другіе еще ранѣе не пытались своихъ силъ въ томъ же направленіи. Уже основныя положенія оцѣнки вѣроятностей говорятъ противъ такого неисторическаго взгляда на дѣло. Новыя пріобрѣтенія рѣдко бываютъ плодомъ первыхъ начинаній, но обыкновенно результатомъ цѣлаго ряда приступовъ, попытокъ и несовершенныхъ рѣшеній задачи. Даже въ такихъ случаяхъ, когда позднѣйшіе изобрѣтатели, ни прямо, ни косвенно, не имѣли никакихъ свѣдѣній о трудахъ своихъ предшественниковъ, все-таки исторія должна давать свѣдѣнія о предварительныхъ опытахъ, ибо она должна принимать въ соображеніе не только условія, въ которыхъ сознательно работала одна личность, но также и всѣ шансы, имѣющіе значеніе для всей совокупности дѣла.

Галилею принадлежитъ честь созданія динамики и усовершенствованія статики. Въ качествѣ творца первой онъ имѣлъ полное право уже въ заголовкѣ главнаго своего сочиненія говорить о «новой наукѣ» (*nuove scienze*). Тѣмъ не менѣе новыя изслѣдованія показали, что и по динамикѣ у него цѣлымъ столѣтіемъ раньше былъ

предшественникъ, котораго геній не уступалъ его собственному, и даже, можетъ быть, достоинъ еще высшей оцѣнки, если сравнить его идеи и творенія съ научнымъ и инымъ состояніемъ его времени. Это былъ Леонардо-да-Винчи, родившійся въ 1452 г., слѣдовательно 112-ю годами раньше Галилея. Болѣе обширному кругу публики онъ извѣстенъ главнымъ образомъ какъ великій художникъ; наука же видитъ въ немъ, напротивъ, представителя самыхъ разнообразныхъ отраслей технически и теоретически механическаго характера. Даже болѣе! Этотъ итальянскій художникъ выказалъ свой выдающийся, пролагающій въ самыхъ разнообразныхъ направленіяхъ новые пути геній, не только въ отдѣльныхъ отрасляхъ знанія, какъ напр. въ техническихъ изслѣдованіяхъ о движеніи воды или въ анатоміи и въ ученіи о движеніяхъ членовъ человѣческаго тѣла, равно какъ и во многихъ другихъ специальныхъ отрасляхъ знанія, не только не безъ успѣха занимался болѣе глубокимъ изысканіемъ основаній механическихъ процессовъ, онъ является также представителемъ болѣе правильныхъ понятій объ общемъ методѣ правильного познаванія природы. То, что онъ высказываетъ объ отношеніи опыта къ спекулятивному изслѣдованію, даетъ правильную оцѣнку перваго и указываетъ истинное значеніе послѣдняго. Онъ настолько же хорошо понималъ необходимость наблюденія и опыта, насколько и значеніе раціональныхъ выводовъ. Въ этомъ отношеніи его краткія изреченія о методѣ, буквально приведенныя въ «Опытѣ» Вентури ¹ (стр. 31—32) и въ Исторіи итальянской математики Либри ² (томъ III, стр. 235), оказываются гораздо вѣрнѣе того, что позднѣйшіе философы, и преимущественно Бэконъ Веруламскій, смогли изложить въ обширныхъ произведеніяхъ. Эти методически правильныя воззрѣнія, помимо ихъ общаго значенія, имѣютъ особенное значеніе для механики. Лишь имѣя въ своемъ распоряженіи правильныя основоположенія о методѣ изслѣдованія, удалось впоследствии Галилею положить прочныя основанія новой физики. Поэтому не напрасенъ будетъ трудъ—посвятить нѣкоторое вниманіе въ исторіи началъ механики этому общему формулированію основныхъ положеній изслѣдованія. То, что Леонардо еще въ 15-мъ столѣтіи не только принялъ мѣриломъ правильного изслѣдованія, но—что еще важнѣе—и примѣнилъ въ собственныхъ своихъ работахъ, вполне согласуется съ точнѣйшимъ понятіемъ, какое только можно дать въ наше время о требованіяхъ основательнаго математическаго и экспериментальнаго метода изслѣдованія. Въ ходѣ

¹ Venturi: Essai sur les ouvrages physico-mathematiques de Léonard de Vinci. Paris 1797.

² Libri: Histoire des sciences mathématiques en Italie, 4 vols. Paris, 1838—41.

познаванія далѣ онъ, правда, первекствующую роль наблюденію и эксперименту и желалъ строить общія правила мало-по-малу на почвѣ частныхъ фактовъ; но съ другой стороны онъ зналъ цѣну и свободному полету фантазіи, и отлично сознавалъ, что точное знаніе неизбѣжно требуетъ примѣненія математики.

9. Изрѣченіе Леонардо объ отношеніи механики къ математикѣ можно считать типичнымъ указаніемъ роли, какую играли приложения древней и новой математики къ механикѣ. «Механика», говоритъ онъ ¹, «есть рай математическихъ наукъ, ибо въ ней находишь плоды математическаго знанія» (*si viene al frutto*). Въ самомъ дѣлѣ, плоды античной математики самымъ блестящимъ образомъ обнаружались въ новой механикѣ, и особенно въ механикѣ небесныхъ тѣлъ. Но прежде чѣмъ возможно было осуществить переходъ отъ математической характеристики видимыхъ явленій къ измѣренію реальныхъ силъ, нужно было глубже проникнуть въ процессы природы. Математика и specially геометрія доставляетъ множество примѣненій къ изученію природы, въ которыхъ, однако, строго говоря, лишь отмѣчаются созерцаемые образы и рѣчь идетъ, такъ сказать, о лицевой сторонѣ явленій. Пока мы остаемся исключительно въ этой сферѣ примѣненій, точное изслѣдованіе самаго ядра природы, коего сущность слѣдуетъ искать въ массовыхъ отношеніяхъ и механическихъ силахъ, ускользаетъ у насъ изъ рукъ. Наука принимаетъ тогда преобладающе форономическій характеръ. Въ лучшемъ случаѣ, мы ознакомимся съ явленіями движенія, но не достигнемъ познанія причинъ такихъ движеній. Кеплеровы законы представляютъ блестящій примѣръ такихъ чисто феноменальныхъ подготовленій къ болѣе глубокому, собственно механическому познанію. Отъ Леонардо едва-ли ускользнули-бы плоды этихъ законовъ, если-бы онъ, подобно Галилею, былъ современникомъ Кеплера: въ такой высокой мѣрѣ качества его ума находились въ соотвѣтствіи какъ съ механически-реальною, такъ и съ спекулятивною стороною предмета. Кеплеръ, съ своею подчасъ черезчуръ смѣлою фантазіею, былъ бы ему вполне понятенъ, и можно думать, нашелъ бы въ немъ мужа, который предвосхитилъ-бы у Ньютона его великое открытіе.

Хотя сочиненія гениальнаго Итальянца частію затеряны, частію остались безъ вліянія, все-же то, что съ начала текущаго столѣтія обнародовано изъ сохранившихся рукописей, по меньшей мѣрѣ, позволяетъ заключить, что весьма значительныя механическія представленія, приписываемыя въ обычныхъ историческихъ очеркахъ обык-

¹ Libri: выше-приведенное соч. томъ III, стр. 40.

новенно позднѣйшему времени, принадлежали уже этому изслѣдователю. Отсюда конечно не слѣдуетъ, чтобы воззрѣнія эти принадлежали пятнадцатому вѣку, ни даже въ большинствѣ случаевъ шестнадцатому. Но именно потому, что они значительно опережали свое время, они и заслуживаютъ особеннаго вниманія при вступленіи въ новую исторію механики. Тотъ же самый духъ, который въ космическихъ воззрѣніяхъ далеко опередилъ свое время, обнаружилъ и въ первѣйшихъ началахъ механики такіа воззрѣнія и фундаментальныя познанія чистоты, которыхъ содержаніе и обработка свидѣтельствуя о ясномъ и глубокомъ размышленіи о физическихъ процессахъ. Не смотря на скудость дошедшаго до насъ матеріала, и особенно по этой части подвергшагося значительному искаженію, все-таки могутъ быть приведены нѣкоторые пункты — оригинальные внѣ всякаго сомнѣнія — отчасти словами самого автора.

10. Изъ отдѣльныхъ мѣстъ и рукописныхъ отрывковъ какъ нельзя болѣе очевидно, что Леонардо зналъ законъ движенія по наклонной плоскости, и что онъ имѣлъ вѣрные представленія о непрерывномъ возрастаніи скорости при паденіи тѣла. О первомъ онъ говоритъ ¹, обозначая буквами АВ высоту, а буквами АС длину наклонной плоскости: «Паденіе тѣла А по линіи АС, въ сравненіи съ паденіемъ по АВ, требуетъ тѣмъ большаго времени, чѣмъ АС длиннѣе въ сравненіи съ АВ». Это утвержденіе тѣмъ важнѣе, что оно не просто статическое, но динамическое. Здѣсь правильно указано не отношеніе равновѣсія на наклонной плоскости, опредѣленіе котораго значительно легче, но относительное время паденія. Далѣе значится: «Тяжелое тѣло А падаетъ скорѣе по дугѣ АСЕ, чѣмъ по хордѣ АЕ». Это воззрѣніе есть ничто иное, какъ примѣненіе знанія паденія по наклонной плоскости, а парадоксальность, зависящая частію отъ самаго предмета, частію отъ формулированія, дала впослѣдствіи поводъ Галилею, который долженъ былъ установить то же самое предложеніе какъ слѣдствіе своей теоріи паденія, къ болѣе основательному изслѣдованію. Если принять еще въ соображеніе мнѣніе Леонардо ², что скорости паденія возрастаютъ въ арифметической прогрессіи, то для насъ станетъ достаточно очевидно, что онъ долженъ былъ знать значительную часть свойствъ свободного паденія, и что слѣд. онъ былъ весьма близокъ къ истинамъ, окончательно и во всемъ ихъ объемѣ установленнымъ Галилеемъ.

Менѣе важны, но все-же имѣютъ весьма большое значеніе и

¹ У Вентури, въ приведенномъ соч., стр. 18, § 7.

² См. отрывки въ приложеніи къ привед. соч. Либри, т. III, стр. 212.

намекы на тотъ способъ представленія силовыхъ отношеній, болѣе определенное формулированіе котораго нынѣ извѣстно подъ именемъ формулированія по принципу возможныхъ скоростей. Что касается возможныхъ свободныхъ силовыхъ дѣйствій, Леонардо очевидно было подмѣчено обратное отношеніе относительныхъ скоростей, обусловливаемыхъ рычагомъ и другими орудіями, и даже дознано, что это отношеніе есть основаніе взаимнаго уравновѣшиванія, равно какъ и вообще равенства дѣйствій. Впрочемъ, начало возможныхъ скоростей доведено было до полнѣйшей общности, пройдя нѣсколько ступеней развитія, такъ что у Леонардо мы встречаемся съ этимъ принципомъ лишь въ зародышѣ.

11. Все, что по своему отношенію къ принципамъ можетъ интересовать насъ въ промежуткѣ времени, отдѣляющемъ Леонардо-да-Винчи отъ Галилея, относится къ работамъ или идеямъ мужей, примыкавшихъ частію къ унаслѣдованной отъ древнихъ статикѣ, частію являвшихся представителями, хотя и случайно, отдѣльныхъ динамическихъ понятій. Что касается послѣднихъ, то особенно слѣдуетъ упомянуть о I. V. Benedetti (ум. 1570). Ему было извѣстно, что въ пустомъ пространствѣ тѣла падаютъ съ одинаковою скоростью, какова бы ни была ихъ масса, т.-е. что, падая съ одинаковой высоты, достигаютъ земли въ одно и то же время, хотя бы масса ихъ была и различна. Это знаніе имѣло нѣкоторое значеніе, особенно если вспомнимъ, что еще во времена Галилея были въ ходу Аристотелевскія представленія о тяжести и легкости и о быстрѣйшемъ паденіи болѣе тяжелыхъ тѣлъ въ силу ихъ большаго вѣса. Въ сочиненіи смѣшаннаго содержанія о «Различныхъ умозрѣніяхъ»¹, въ особомъ отдѣлѣ, Бенедетти трактуетъ о механикѣ. Онъ имѣлъ понятіе о центробѣжной силѣ, и ясно утверждаетъ, что тѣло, предоставленное самому себѣ, двигается по касательной. Трактую о не-прямомъ рычагѣ, онъ обнаруживаетъ знакомство съ понятіемъ о моментѣ въ принятомъ нынѣ значеніи этого слова, говоря на стр. 143: «что величина всякаго груза или движущая сила (*virtus movens*) въ отношеніи къ нѣкоторой другой величинѣ познается выгодною (*beneficio*) перпендикуляровъ, проводимыхъ изъ центра коромысла на линію наклоненія». Это — основаніе современной теории моментовъ.

12. Marquis del Monte (род. 1545), извѣстный болѣе подъ именемъ Guido-Ubaldi, есть уже старѣйшій современникъ Галилея. Въ своей книгѣ о механикѣ² онъ пользуется отношеніями возмож-

¹ Benedicti: *Divers. speculat.*, Taurini, 1585.

² Guido Ubaldi: *Mechanicorum liber*, Pisauri 1577.

ныхъ скоростей на рычагѣ какъ принципомъ объясненія, и вообще выказываетъ большія познанія касательно трудовъ древнихъ по механикѣ. Впрочемъ, онъ строго держится точки зрѣнія древнихъ, по скольку не выходитъ изъ предѣловъ простой статики. Галилей, въ своихъ *Discorsi* ¹ (день третій, стр. 266) указываетъ на него, какъ на лицо, побудившее его, Галилея, углубить свои изслѣдованія о центрѣ тяжести. Впрочемъ, статика Убальди еще весьма несовершенна, по скольку ему еще не удалось упомянутый выше, по поводу Бенедетти, принципъ моментовъ кромѣ рычага примѣнить и къ наклонной плоскости. Не смотря на разнаго рода ошибки, встрѣчающіяся въ его трудѣ, и именно въ теоріи винта, сочиненіе его имѣло большое реставрирующее значеніе, ибо оно ставило въ надлежащемъ свѣтѣ труды древнихъ. Въ противномъ случаѣ едва-ли оно снова появилось-бы въ печати въ 1615 году.

Если сравнить то, что дали Бенедетти и Гвидо Убальди по отношенію къ принципамъ, съ тѣмъ, что мы могли сообщить о Леонардо-да-Винчи, то едва-ли окажется какое-либо сомнѣніе въ томъ, что перевѣсъ долженъ оказаться на сторонѣ послѣдняго. На него, поэтому, нужно смотрѣть какъ на истиннаго предшественника Галилея въ дѣлѣ основанія динамики.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Основаніе динамики Галилеемъ.

13. Динамику опредѣляютъ какъ теорію ускорительныхъ силъ, и въ самомъ дѣлѣ наука эта въ сущности и есть ученіе о причинахъ переменнаго движенія. Но самая возможность ея обусловливается также разсмотрѣніемъ и однообразно сохраняющагося состоянія движенія нѣкотораго тѣла. Ея первая аксіома прямо относится къ этому однообразному коснѣнію, называемому обыкновенно инерціей, и принимаемому за основной законъ, общій и движенію и покою. Безъ этой аксіомы не возможно было бы ни одно заключеніе, ни даже простѣйшее вычисленіе относительно реальныхъ движеній. Самый образъ дѣйствія силъ, безъ этого основнаго положенія, оставался бы загадкою; но особенно образъ развитія и суммированія элементовъ силы во времени оставался бы безъ этой аксіомы совершенно непонятнымъ. Поэтому мы имѣемъ право понимать подъ именемъ динамики въ самомъ общемъ смыслѣ ученіе о

¹ Galilei: Opere, 16 vol. Firenze 1842—56, T. XIII. *Discorsi e dimostrazioni matematiche* etc.

причинахъ и законахъ движенія, все равно идетъ - ли рѣчь о комбинаціи простыхъ движеній по инерціи или о перемѣщеніяхъ подъ вліяніемъ непрерывно возобновляющей свое дѣйствіе силы.

Но въ какомъ бы смыслѣ мы ни опредѣляли значеніе этого слова, во всякомъ случаѣ, какъ при широкомъ, такъ и при узкомъ пониманіи дѣла, Галилей все остается родоначальникомъ первыхъ основныхъ положеній, а вмѣстѣ съ тѣмъ и важнѣйшихъ основныхъ ученій общей динамики. Не говоря уже объ осязательныхъ приобрѣтеніяхъ, доступныхъ—какъ напр. въ теоріи паденія— даже самому поверхностному пониманію, слѣдуетъ особенно отмѣтить степень ясности сознанія, съ какою выступаетъ у Галилея новое знаніе. Если даже кое-какія частности и встрѣчаются уже у его предшественниковъ, то даже и въ такихъ пунктахъ превосходство Галилеевскаго образа представленія и изложенія служить основаніемъ къ весьма существенному отличію. Ходъ его мыслей, его концепція идей съ такою ясностью открываютъ доступъ къ новымъ познаніямъ, какой въ разсматриваемой области знанія доселѣ никому не удалось превзойти, и даже вторично достигнуть. Когда онъ писалъ, для него было въ высшей степени важно, дать на живомъ языкѣ полный просторъ естественному послѣдовательному развитію мыслей. Цѣлю его было не сообщеніе готовыхъ результатовъ, и не искусственная обработка предмета при помощи какихъ-либо уловокъ, но возможно болѣе натуральное проникновеніе въ самые физическіе процессы. Подобно тому какъ на мѣсто статики онъ водрузилъ новую науку динамики, такъ на мѣсто окоченѣлыхъ традиціонныхъ формъ онъ ввелъ методу изложенія, основанную на движеніи. Потому и самая внѣшняя форма, избранная имъ въ главныхъ его произведеніяхъ,—форма діалога, имѣетъ у него внутреннее значеніе. Это—одѣяніе, въ которомъ онъ самымъ непринужденнымъ образомъ могъ передавать свои чисто діалектически веденныя изысканія.

Въ статикѣ у Галилея были современники, частію старшіе его, частію моложе его годами, представлявшіе въ совокупности извѣстные успѣхи этой отрасли знанія, но между ними выдѣляется одинъ, обнаруживающій въ своемъ родѣ нѣкоторое подобіе реформаторскимъ качествамъ Галилея. Это—нидерландецъ Симонъ Стэвинъ (ум. въ 1633), о которомъ, касательно началъ Статики и Гидростатики, мы поведемъ рѣчь далѣе—особо и подробнѣе. Какъ Стэвинъ былъ старшимъ, такъ Декартъ—младшимъ изъ современниковъ Галилея, о которыхъ намъ придется говорить. Но метафизикъ Декартъ, имя котораго навсегда сохранить исторія только благодаря участію его въ развитіи геометріи, для насъ единственно въ томъ отношеніи представляетъ величайшій интересъ, что онъ являетъ собою поучи-

тельный примѣръ крайне вреднаго вліянія метафизической философіи, а какъ философія и доселѣ осталась въ сущности метафизическою, то и вообще — характеристичнымъ примѣромъ тормозящаго научное движеніе вліянія всякой такой философіи. А потому, отводя ему дѣйствительно принадлежащее ему мѣсто, мы помѣщаемъ его ниже подъ рубрикою философскихъ вліяній.

Кромѣ Стэвина и Декарта, нашему разсмотрѣнію подлежатъ еще нѣкоторые современники Галилея, которые, какъ напр. Фермать (ум. въ 1665 г.), являются геніальными представителями отдѣльных направлений. Но направленія такого рода, какъ Ферматово Начало наименьшаго дѣйствія, окажутся знаменитыми и вліятельными лишь въ позднѣйшемъ своемъ развитіи, такъ-что въ этомъ отдѣлѣ мы ограничимся лишь бѣглымъ изложеніемъ подобныхъ, пока лишь въ зародышѣ являющихся, мыслей.

14. Резюмируя только-что данныя указанія, можно вкратцѣ сказать, что Галилеево зданіе динамики было уже готово, пока его время и даже лишь въ это время зародившіяся философскія направленія ограничивались главнѣйше простою статикою. Но если спросить о томъ, какъ самъ онъ относился къ послѣдней, то слѣдуетъ сказать, что и здѣсь ему принадлежитъ роль усовершенствователя, ибо въ эту отрасль механики, кромѣ нѣкотораго расширенія ея, онъ внесъ и новый образъ пониманія статическихъ принциповъ. Именно, здѣсь онъ далъ значеніе принципу возможныхъ скоростей какъ нѣкоторому вездѣ примѣнимому основному воззрѣнію, въ которомъ вмѣстѣ съ тѣмъ содержалось бы и представленіе объ истинной причинѣ равновѣсія и вообще взаимнаго уравниванія силъ. Такого широкаго значенія этотъ принципъ до тѣхъ поръ не получалъ еще ни у одного изслѣдователя.

О Галилеѣ можно уже въ нѣкоторомъ смыслѣ сказать, что онъ привелъ статику и динамику въ тѣснѣйшую связь, и при основаніи своей новой науки никоимъ образомъ не допускалъ того разъединенія принциповъ, въ какое послѣ него привели эти обѣ отрасли, чтобы затѣмъ снова сблизить ихъ лишь въ теченіе послѣдняго столѣтія. Въ самомъ дѣлѣ, весьма знаменательно, что въ этомъ отношеніи Лагранжъ прямо долженъ былъ вернуться къ Галилеевскимъ основнымъ понятіямъ, и въ видахъ, объединенія всей рacionales механики, снова вызвать ихъ на свѣтъ изъ забвенія и пренебреженія.

Такъ какъ болѣе совершенное пониманіе статическихъ принциповъ сдѣлалось возможнымъ лишь при посредствѣ динамическихъ воззрѣній, то мы должны начать съ историческаго введенія въ эти послѣднія, а разсмотрѣнія касательно началъ статики частію влести въ это введеніе, частію говорить о нихъ лишь вполнѣдствіи.

15. Важнѣйшія сочиненія Галилея, относящіяся къ механикѣ— въ то же время вообще и его главныя сочиненія. Лишь къ концу своей долгой, продолжавшейся почти 80 лѣтъ (1564—1642), жизни, выпустилъ онъ въ свѣтъ то произведеніе, предметомъ котораго было собственно основаніе динамики. Это — *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* и т. д. Этотъ діалогъ появился впервые въ 1638 г. Ядро его слѣдуетъ искать въ отдѣлѣ подъ заглавіемъ «третій день», въ коемъ авторъ, при всемъ своемъ знаніи древнихъ языковъ отдававшій предпочтеніе изложенію на живомъ языкѣ, измѣняя на этотъ разъ усвоенному обычаю, рядомъ съ итальянскимъ болѣе свободнымъ изложеніемъ помѣстилъ и латинское формулированіе главныхъ положеній. Другое главное сочиненіе, въ которомъ также, хотя и мимоходомъ, играя лишь служебную роль, уже излагались начала механической науки и даже основанія динамики, есть съ самаго появленія своего, а также и вслѣдствіе печальной участи, которую причинилъ онъ автору, слѣлавшійся знаменитымъ *Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo*, обнародованный въ 1632 году. Хотя главнымъ предметомъ его служить доказательство правильности Коперниковой системы, но это вмѣстѣ съ тѣмъ и произведеніе, въ которомъ авторъ излагаетъ свои мысли по предмету физики, свой методъ изслѣдованія и даже свою натур-философію.

Лишь третьестепенное значеніе имѣетъ небольшое, вмѣстѣ съ тѣмъ и самое раннее, но для механики очень важное произведеніе Галилея. Въ первомъ изданіи 1612 года оно появилось подъ заглавіемъ: *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono*. Эта работа, посвященная частію защитѣ гидростатическихъ положеній Архимеда въ виду появившихся возраженій, частію изложенію оригинальныхъ воззрѣній, важно и интересно особенно въ томъ отношеніи, что въ немъ содержится приложеніе принципа возможныхъ скоростей къ равновѣсію и движенію въ жидкостяхъ; кромѣ того въ немъ развиты въ видѣ введенія, съ величайшей ясностью и оригинальностью, соотвѣтствующія общія и частію прямо Галилеевскія понятія и представленія. Въ виду этого, мы обратимъ гораздо большее вниманіе на содержаніе этой работы, чѣмъ дѣлалась до сихъ поръ, тѣмъ болѣе что своимъ сравнительно раннимъ появленіемъ оно въ высшей степени облегчаетъ точное опредѣленіе эпохи, въ которую извѣстныя теоріи сдѣлались общимъ достояніемъ.

Замѣчательно, что то именно сочиненіе, которое авторомъ названо механикою, по своему значенію можетъ занять лишь четвертое и послѣднее мѣсто. Это — небольшая работа по статикѣ, появив-

шаяся на итальянскомъ языкѣ лишь семь лѣтъ спустя по смерти автора. Но ранѣе (въ 1634) она появилась во французскомъ (нѣсколько вольномъ) переводѣ Мерсенна. Самъ Галилей, повидимому, не слишкомъ высоко цѣнилъ этотъ трактатъ о механическихъ силахъ. Но изданіе французскаго перевода¹ указываетъ на интересъ, какой возбуждала именно эта работа въ парижскихъ ученыхъ кружкахъ, для которыхъ неутомимо дѣятельный Мерсеннъ какъ бы замѣнялъ журналы. Если бы важнѣйшія основныя воззрѣнія не нашли себѣ мѣста въ другихъ, несомнѣнно подлинныхъ не-посмертныхъ работахъ, то и это небольшое сочиненіе по предмету статики было бы неоцѣненнымъ источникомъ, и его было бы вполне достаточно, чтобы поставить внѣ всякаго сомнѣнія по меньшей мѣрѣ сплошное примѣненіе начала возможныхъ скоростей, равно какъ и нѣкоторыя другія основныя воззрѣнія Галилея. Итакъ, къ сочиненію *Della scienza meccanica* (1649) мы будемъ обращаться по большей части лишь какъ къ второстепенному.

Кромѣ этихъ сочиненій, изъ коихъ лишь послѣднее есть, такъ сказать, полу-посмертное, имѣется и еще кое-что по механикѣ, впрочемъ въ рѣдкихъ случаяхъ пригодное для характеристики, и въ остальныхъ работахъ и письмахъ, частію астрономическаго, частію физико-математическаго содержанія. Нѣкоторыя изъ этихъ работъ изданы лишь въ новѣйшее время. Между ними особенно выдаются *Sermones de motu gravium*², какъ очень ранняя штудія, одинъ изъ отдѣловъ коей послужилъ образцомъ для выше приведенныхъ *Discorsi*, появившихся пятьюдесятью годами позже. Также и вышеупомянутыя латинскія вставки въ главномъ сочиненіи по динамикѣ взяты почти буквально изъ *Sermones*, слѣд. изъ той самой ранней группы работъ, которою еще двадцатилѣтній Галилей началъ свое ученое поприще. Такъ какъ работы эти относятся къ основнымъ теоріямъ, то этимъ неизбежно устанавливается фактъ, что Галилей весьма рано не только уже выработалъ свои основныя взгляды, но вывелъ и существеннѣйшія ихъ слѣдствія. Впрочемъ, *Sermones* содержатъ даже простѣйшіе основныя законы движенія, а сверхъ того интересны еще и въ томъ отношеніи, что позволяютъ усмотрѣть, какъ ихъ авторъ расквитался съ аристотелевскими преданіями, и сколько трудностей пришлось ему преодолѣть, чтобы выйти изъ подъ опеки господствующихъ воззрѣній.

16. Для нашей цѣли не столько важно представить полное изложеніе главныхъ результатовъ динамики, которыми прославился Га-

¹ *Les mécaniques de Galilée*. Paris. 1634.

² Въ первый разъ появились въ 1854 г. въ Флорентинскомъ изданіи сочиненій Галилея, томъ XI.

лилией, сколько дать анализъ принципиально важнаго въ нихъ. Законы свободнаго паденія, равно и паденія по наклонной плоскости и колебаній маятника, затѣмъ опредѣленіе параболическаго движенія брошенныхъ тѣлъ и всего, что нѣкогда установлено было въ предѣлахъ этихъ фундаментальныхъ результатовъ, въ обычныхъ своихъ рамкахъ для современнаго пониманія—вещь очень хорошо извѣстная, но въ отношеніи образа происхожденія этихъ результатовъ и свойственной Галилею формы мышленія—вещь уже не такъ хорошо изслѣдованная. Въ силу этого намъ предстоитъ выяснитъ, какимъ образомъ, напримѣръ, теорія паденія тѣлъ заходитъ значительно дальше предѣловъ, обнимающихъ отличительныя особенности отдѣльныхъ главныхъ результатовъ и включаетъ уже ученіе объ общей формѣ силоваго дѣйствія. Вообще мы вездѣ будемъ тщательно замѣчать зародыши позднѣйшихъ теорій, дабы такимъ образомъ надлежаще прослѣдить постепенное превращеніе простѣйшихъ принциповъ въ особо-выдающіеся или болѣе совершенные образы воззрѣнія позднѣйшаго времени. На этомъ основаніи, равно и въ интересахъ болѣе рельефнаго выдѣленія систематическаго, каковое въ извѣстной мѣрѣ само выдѣляется въ исторіи, мы начинаемъ съ характеристики нѣкоторыхъ основныхъ понятій, прямо свойственныхъ галилеевскому образу мышленія. Сюда относится прежде всего понятіе о моментѣ, которое, какъ это впервые указалъ Лагранжъ¹, оформлено гораздо натуральнѣе, чѣмъ та спеціальная идея, которая по укоренившемуся въ современной механикѣ способу выраженія, ради краткости обозначается этимъ словомъ, а также словомъ статическій моментъ. Со времени критическаго замѣчанія автора Аналитической Механики, первоначальная идея Галилея до извѣстной степени снова вошла въ силу какъ идея о виртуальныхъ моментахъ, какъ ихъ понимаютъ въ современной механикѣ. Впрочемъ, понятіе, какое имѣлъ въ виду Галилей, гораздо общѣе и натуральнѣе, и даже еще дальше хватаетъ, чѣмъ представлялъ себѣ Лагранжъ.

17. Понятіе о моментѣ у Галилея совпадаетъ съ понятіемъ о силѣ по столько, по скольку оно есть ничто иное, какъ натуральное и ясное выраженіе, равно и болѣе точное опредѣленіе въ то время еще не установившейся концепціи силы. Чувственное представленіе о давленіи, какое производитъ тяжелое движущееся тѣло на нѣкоторую преграду, очевидно, служило источникомъ, откуда возникла галилеевская идея о моментѣ. Такъ какъ моменты въ этомъ смыслѣ дѣйствительны не только для движущихся массъ, но и для статическихъ случаевъ простаго давленія или тяги, то они и пред-

¹ Мéc. anal. 2 изд. 1811, Т. I, первый отд., секція I, чл. 16.

ставляютъ начало, общес статикѣ и динамикѣ, отношеніямъ и равновѣсія и движенія.

Первое, къ тому же и самое ясное развитіе понятія о моментѣ находится въ вышеприведенномъ сочиненіи: «О предметахъ, находящихся въ водѣ или въ ней движущихся» (1612), которое нерѣдко называютъ трактатомъ о плавающихъ тѣлахъ. Въ немъ ¹ Галилей даже оправдываетъ свою терминологию какъ нѣчто, вполне согласующееся съ обыкновеннымъ разговорнымъ языкомъ, ибо говорить же: «Это очень важное (grave) занятіе, но другое не имѣетъ большаго значенія (è di poco momento)». Моментомъ у него называется та *virtù, forza, efficacia*, съ какою *Motor* (двигатель) движетъ, а движимое сопротивляется, «какая сила (*virtù*) зависитъ не только отъ простой тяжести, но и отъ скорости движенія и отъ различныхъ наклоновъ путей, по которымъ происходитъ движеніе». Впрочемъ, Галилей выражается такъ, какъ будто бы понятіе о моментѣ въ этомъ родѣ было уже въ ходу среди механиковъ. Но это обстоятельство опять-таки ограничивается тѣмъ, что онъ оправдываетъ употребленіе своихъ терминовъ. Въ этомъ ему не было бы никакой надобности, если бы механики уже освоились съ инымъ понятіемъ о моментѣ, чѣмъ то, которое мы нашли у Бенедетти (§ 11), а кромѣ того и съ убальдовскимъ началомъ возможныхъ скоростей.

Любимымъ выраженіемъ для обозначенія мгновеннаго силового дѣйствія служить у Галилея слово *impeto*. Это «побужденіе», которое очевидно, вначалѣ онъ представлялъ себѣ по оцѣнкѣ посредствомъ мускульнаго ощущенія, совершенно равнозначно моменту, и послѣднее наименованіе имѣло служить лишь научнымъ терминомъ, причемъ постоянно имѣется въ виду въ то же время и объективное измѣреніе и устраненіе грубой формы простаго представленія ощущенія. Впрочемъ, Галилей никоимъ образомъ не отвергаетъ связи этого понятія съ первоначальнымъ представленіемъ «*Impetus*», какъ скоро является надобность въ поясненіи при помощи ссылки на послѣднія познаваемые причины. Этимъ путемъ онъ становится въ одно и то же время и доступнымъ и основательнымъ. Далѣе въ вышеприведенномъ мѣстѣ онъ говоритъ: «Равные абсолютные грузы, движущіеся съ одинаковою скоростью, обладаютъ равными силами и моментами». Къ этому первому принципу, важному для насъ прежде всего въ виду понятія о моментѣ, прибавлено, въ качествѣ втораго принципа, болѣе пространное формулированіе, по которому

¹ Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua... Томъ XII, сказ. изд. сочиненій, стр. 14.

моменты равныхъ грузовъ при неравныхъ скоростяхъ пропорціональны этимъ скоростямъ. Во всѣхъ гидростатическихъ приложенияхъ, а равно и относящихся къ движенію въ жидкостяхъ, представленіе о равенствѣ или объ отношеніи моментовъ служить вездѣ безъ изыятія руководящею точкою зрѣнія, и такимъ образомъ Галилей имѣлъ право сказать, что въ этой работѣ онъ хотѣлъ дать болѣе непосредственныя основанія чѣмъ Архимедъ и слѣдовать иной методѣ.

Дословно приведенные принципы, собственно говоря, суть лишь перифразы тѣхъ представлений, которыя уже заключались въ понятіи самаго момента. Потому они цѣнны лишь какъ истолкованія этого опредѣленія.

Въ главномъ сочиненіи «Разговоры о новыхъ наукахъ» находимъ подобное же опредѣленіе и характеристику понятія о моментѣ. Поставленный въ связь съ радикальнымъ объясненіемъ паденія по наклонной плоскости, моментъ названъ тамъ именами: ¹ «l'impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del discendere». Слово talento, способность, равно какъ и вообще нагроможденіе наименованій, достойно вниманія. Эти обстоятельства указываютъ на стремленіе автора—выяснить понятіе, для коего онъ не можетъ подыскать никакой вполнѣ удовлетворительной формулы. Последнее нисколько не удивительно, ибо рѣчь идетъ вообще о научно-вѣрномъ и пригодномъ къ употребленію силовомъ понятіи.

18. Въ сочиненіи *Della scienza meccanica* находимъ припоровленное къ школьному преподаванію опредѣленіе момента. Галилей прямо ссылается на этотъ свой трудъ, нѣкогда составленный имъ просто для своихъ учениковъ, и въ вышеупомянутомъ мѣстѣ *Discorsi* ². Въ этомъ, не-діалогическомъ, краткомъ изложеніи статики въ изъясненіи предварительныхъ понятій ³ читаемъ: «Итакъ, моментъ есть стремленіе (impeto) двигаться внизъ, слагающееся изъ тяжести, положенія тѣла и другихъ условій, служащихъ причиною такого стремленія (propensione)». Это опредѣленіе понятія примыкаетъ еще отчасти къ обыкновенному понятію статическаго момента. Однако, этимъ опредѣленіемъ имѣется въ виду дать совершенно общее представленіе, ибо здѣсь видно намѣреніе понимать силу, какъ она существуетъ для мгновенія, какъ бы пунктуально, и до дальнѣйшаго, производимаго ею движенія. Вопросъ о томъ, слѣдуетъ ли подобное, существенно отвлекаемое отъ протяженія времени, понятіе принимать въ этомъ отношеніи со всею строгостью,—для

¹ *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, т. XIII, 3 день, стр. 174.

² Тамъ же, стр. 175.

³ *Della scienza meccanica*, т. XI цитир. изд. стр. 90.

нась здѣсь безразличенъ. Галилей пытался соединить во-едино причину съ дѣйствіемъ, разумѣя подъ моментомъ столько-же способность (*virtu, talento*), сколько и фактическое дѣйствіе (*efficacia, energia*). Очевидно, онъ хотѣлъ подъ моментомъ разумѣть не простое стремленіе и не просто основаніе для возможнаго дѣйствія, но элементарное количество дѣйствія, а послѣднее требуетъ во всякомъ случаѣ нѣкотораго, хотя бы и весьма малаго, времени. Впрочемъ, мы вовсе не имѣемъ въ виду мимоходомъ покончить въ этомъ мѣстѣ съ этою фундаментальною трудностью, простиравшеюся до сего времени на всю механику. Здѣсь мы заранѣе только обращаемъ вниманіе на то, что двойственныя опредѣленія силы, именно какъ причины движенія или же только лишь стремленія къ движенію, не позднѣйшаго происхожденія, но съ этимъ своимъ двойственнымъ смысломъ содержались уже въ Галилеевскомъ понятіи момента. Только Галилей имѣетъ то преимущество передъ новыми, что онъ болѣе рѣшительнымъ образомъ усматриваетъ единство и болѣе склоняется къ такому представленію, которое даетъ законное мѣсто причинѣ, предшествующей явленію движенія и выставляетъ силовое понятіе, общее и статикѣ и динамикѣ.

Само собою разумѣется, что, если угодно, всѣ Галилеевскія представленія о моментѣ, соотвѣтственно словопроизводству съ латинскаго, можно понимать какъ «силу къ движенію» (*momentum, movimentum*). Но окончательнымъ и характеристичнымъ остается не такое, болѣе или менѣе произвольное, представленіе, но количественное отношеніе, какое всегда имѣетъ понятіе момента къ возможной или дѣйствительной скорости.

19. Какъ выше приведено, равные грузы имѣютъ моменты, пропорціональные скоростямъ, и вообще моментъ такъ складывается изъ «тяжести, положенія и иныхъ условій», вызывающихъ опредѣленно наклоненіе (направленіе), что всѣ эти обстоятельства и предварительныя условія отношенія двигательнаго побужденія мыслятся уже совокупно имѣющимися въ представленіи особаго момента. Легко видѣть, что это совокупленіе изъ различныхъ составныхъ элементовъ совсѣмъ не благопріятно въ смыслѣ простоты, какою должно отличаться основное понятіе. Но эта невыгода въ значительной мѣрѣ ослабляется тѣмъ, что Галилей вездѣ прилагаетъ величайшее стараніе къ отдѣленію этихъ составныхъ частей, и потому на дѣлѣ оперируетъ при помощи простыхъ понятій. И представленіе о самомъ моментѣ обнимаетъ въ сущности лишь то, что въ немъ фактически всегда имѣется, — именно скорость, имѣетъ ли она опредѣленную величину, или равна нулю. Въ послѣднемъ случаѣ мѣрою момента можетъ служить лишь скорость, которая будетъ сообщена.

Въ подобныхъ случаяхъ Галилей выражается такъ, что за моментъ принимается простая тяжесть безъ всякой прибавки, между тѣмъ какъ въ настоящее время мы обыкновенно разлагаемъ этотъ моментъ на два, даже, если угодно, на три фактора, ибо мы рассматриваемъ его какъ произведеніе изъ простой массы, мыслимой прежде всего безъ тяжести и изъ ускоренія, самое-же ускореніе задаемъ въ нѣкоторый произвольно-малый, но постоянный элементъ времени. Черезъ это къ ускоренію, выраженному для единицы времени (секунды), или другими словами, къ выросшей за это время скорости, присоединяется еще элементарный факторъ, каковой даетъ накопившееся въ этотъ произвольно выбранный элементъ времени количество скорости. Формула $P = mg$, обычная въ современной механикѣ, и выражающая вѣсъ P какъ произведеніе изъ массы m , мыслимой безъ силовой аффекціи, и аффекціи дѣйствующей на землѣ силы тяжести, порождающей въ секунду скорость g , — формула эта, конечно, не содержитъ произвольно малаго элемента времени. Но обстоятельство это вообще совсѣмъ не важно, ибо такое значеніе можетъ имѣть самая секунда, да и притомъ вполне позволительно прибавить въ обѣ части уравненія множитель dt . Но для Галилеевскаго образа представленія и понятія о моментѣ — приведеніе къ произвольно выбранному какъ угодно малому элементу времени, напротивъ, весьма существенное дѣло, ибо только такимъ образомъ становится возможно надлежащее заданіе момента въ его значеніи для какой угодно точки и для случая равновѣсія. Да и вообще, какъ мы видѣли, Галилеевское представленіе всегда есть представленіе пунктуальное, и сверхъ того должно изображать дѣйствительный напоръ силы. Чтобы удовлетворить обоимъ требованіямъ, мы не можемъ поэтому ограничиваться выраженіемъ пропорціональности, какъ это имѣетъ мѣсто въ приведенной формулѣ, въ совершенно общемъ видѣ, но должны рассматривать динамическое дѣйствіе для даннаго момента, хотя бы таковое, какъ въ случаѣ равновѣсія, и задерживалось и потому было бы лишь возможнымъ дѣйствіемъ.

Значительно проще представляется измѣреніе моментовъ какъ динамическихъ величинъ въ томъ случаѣ, когда фактически существуетъ опредѣленная скорость. Какъ уже сказано, Галилей опредѣляетъ отношеніе моментовъ въ этомъ случаѣ, въ предположеніи равныхъ грузовъ, очень просто по ихъ скоростямъ. Поэтому у него одинъ моментъ вдвое больше другаго, если имъ выражается равный абсолютный грузъ съ движеніемъ вдвое быстрѣйшимъ. Здѣсь же умѣстно напомнить о томъ, что позднѣе такое измѣреніе, непосредственно связанное со скоростью, сдѣлалось предме-

томъ, главнымъ образомъ, метафизическихъ пререканій между Лейбницемъ и, какъ обыкновенно говорятъ, картезианцами, въ сущности же между нимъ и всѣми противниками его метафизическихъ воззрѣній. Между послѣдними наибольшее значеніе имѣли сторонники Ньютона, и кстати здѣсь же замѣтить въ пользу Галилея, что, какъ оказалось, эти первоначальныя основныя понятія въ главномъ дѣлѣ пробу выдержали и даже,—если только можно позволить себѣ это выраженіе,—оказались метафизически вполне вѣрными.

Вопросъ объ ударѣ, какъ мы увидимъ впоследствии, былъ разработанъ Галилеемъ лишь весьма неполно, хотя и въ томъ, чего ему удалось достигнуть, его мысли были правильнѣе Декартовыхъ. Подчасъ даже его пробивающія дорогу представленія—прямо классическія, какова напр. идея, что ударъ слѣдуетъ разсматривать составленнымъ изъ элементарныхъ моментовъ. Но, слѣдуя плану, который мы имѣемъ въ виду въ настоящую минуту, мы оставимъ пока въ сторонѣ это расчлененіе удара, и ограничимся замѣчаніемъ, что по концепціи Галилея, самый моментъ разсматривается, собственно, какъ элементарный ударъ, причемъ, естественно, совершенно отвлекаются отъ непосредственнаго соприкосновенія какихъ-либо массъ. Всякое элементарное побужденіе, вызывающее опредѣленную скорость, обладаетъ ли уже само оно скоростью и просто ее переноситъ, или сначала ее порождаетъ и такимъ образомъ сообщаетъ нѣкоторой массѣ, разсматривается какъ мгновенный импульсъ, подобный удару, и на суммированіи такихъ импульсовъ основана вся умозрительная часть въ теоріи паденія и въ теоріи силового развитія вообще. Поэтому въ высшей степени важно, что моменты измѣряются масштабомъ существующихъ или имѣющихъ возникнуть скоростей.

20. Можно приписать нѣкоторой массѣ однообразную, неизмѣнную скорость какъ фактъ. Въ такомъ случаѣ тѣло проходитъ въ каждую какъ угодно малую частицу времени постоянно равныя пространства, и такое равномерное движеніе разсматриваютъ какъ простирающееся неопредѣленно въ ту и другую сторону. Въ этомъ случаѣ рѣчь идетъ не о причинѣ, не о дѣйстви, а непосредственнымъ предметомъ изслѣдованія служитъ продолжающееся неограниченное время движеніе. Но такая неизмѣнная, всегда сохраняющаяся, скорость или косное движеніе можетъ быть разсматриваемо также какъ нѣкогда возникшее и соотвѣтственно этому какъ подлежащее когда-либо прекращенію или, по крайней мѣрѣ, превращенію въ нѣчто иное, чѣмъ движеніе. Въ обоихъ случаяхъ будетъ идти рѣчь о суммированіи, т.-е. о вычитаніи элементовъ скорости. Приэтомъ, опредѣленное количество скорости разсматривается какъ

нѣкоторая величина, происходящая вслѣдствіе нарастанія, отъ нуля, чрезъ постоянное приращеніе равныхъ элементовъ. Точно такъ же можно мыслить, что нѣкоторое количество скорости, существующее въ нѣкоторой массѣ и теряющееся при какомъ-либо процессѣ, уничтожается мало-по-малу чрезъ отнятіе равныхъ элементовъ скорости и какъ бы исчерпывается до нуля. Откуда скорости являются и куда онѣ исчезаютъ—здѣсь вопросъ второстепенный. Но точно также нѣтъ надобности знать пока и того, какъ сама элементарная скорость можетъ возникнуть изъ чего-либо, или же перейти въ что-либо, что не есть скорость.

Великая заслуга Галилея состоитъ въ основаніи правильнаго представленія о производженіи скоростей какъ сущности силового дѣйствія на свободно движущееся тѣло. Всякую скорость, съ которою масса движется, Галилей разсматриваетъ какъ такую, о которой или можно доказать, что она возникла суммированіемъ элементарныхъ скоростей, или, при неимѣніи подобнаго доказательства, какъ такую, которая могла такимъ образомъ возникнуть. Отсюда слѣдуетъ, что всякую опредѣленную скорость можно вообразить снова разложенною соотвѣтственнымъ образомъ и какъ бы фактически разрѣшенною. Впрочемъ при опредѣленіи законовъ паденія Галилей главнымъ образомъ пользуется первымъ представленіемъ. Безъ этого представленія вообще совершенно нельзя обойтись, какъ скоро должно быть точно охарактеризовано развитіе силы какого бы то ни было рода.

Если на мѣсто скоростей, производимыхъ въ нѣкоторое время, прямо будемъ разсматривать пространства, проходимыя до конца этого времени, то на мѣсто простаго поставимъ нѣчто сложное. Сверхъ того мы создадимъ себѣ только затрудненія, разставивъ съ изяществомъ и простотою этого способа представленія и даже перемѣшавъ неизмѣнно-пребывающее и главное въ дѣлѣ съ простою формою явленія перемѣнныхъ состояній движущагося тѣла. Но какъ ближе всего—принять за исходный пунктъ при сужденіи о силовомъ дѣйствіи дѣйствительно проходимое пространство, то мы должны допустить, что Галилей имѣлъ особая основанія—принять за непосредственный результатъ силового дѣйствія и за основаніе всѣхъ прочихъ изысканій однообразно накапливающіяся, по мѣрѣ увеличенія времени, скорости.

По нашему мнѣнію, этимъ основаніемъ было ни что иное, какъ признаніе рѣшительной роли, какую скорости, сообразно съ его возрѣніемъ, уже играли въ статикѣ. Онѣ были тамъ прямо эквивалентны элементамъ дѣйствія, и моменты въ галилеевскомъ смыслѣ слова, какъ мы уже видѣли, слагались, при равныхъ массахъ, сообразно элементамъ скорости. Въ силу этого, величину моментовъ можно было опредѣлять массою и скоростью такъ, чтобы меньшая

скорость выравнивалась и уравнивалась большею массою и обратно, меньшая масса большею скоростью.

При этомъ предположеніи было весьма натурально и на новомъ пути чисто динамическихъ изысканій считать скорость признакомъ элемента силы и изъ всѣхъ формъ проявленія силового дѣйствія выбрать, какъ наиболѣе характеристическую, скорость, приобретенную въ концѣ нѣкотораго времени. Въ самомъ дѣлѣ, вмѣстѣ съ этою скоростью во всякомъ случаѣ принимается за основаніе и пространство; но это не есть то пространство, которое пробѣгается какъ бы въ тылу силового дѣйствія, но то, которое тѣло пробѣгало бы совершенно равномерно и непрерывно, если бы сила болѣе на него не дѣйствовала. Изъ постепенно накопившихся скоростей ничего не потеряно и всѣ элементы скорости представляются окончательно скоростью. Далѣе, скорость есть нѣчто совершенно независимое отъ времени, въ теченіе коего она обнаруживалась въ движеніи. Скорость никоимъ образомъ не можетъ быть замѣнена заданіемъ просто проходимаго пространства, ибо она, подобно вѣсу, представляетъ свойство, существующее во всякое время, слѣд. въ пространствѣ безпредѣльно. Напротивъ, если отнести пространство, пройденное съ извѣстною скоростью,—сверхъ того еще къ соответствующему времени, то въ первыхъ единица времени будетъ употреблена для опредѣленія отношенія между временемъ и пространствомъ, т. е. для выраженія скорости, и въ вторыхъ для измѣренія продолжительности состоянія, въ которомъ скорость или различныя скорости обнаруживались. Въ послѣднемъ случаѣ мы имѣемъ въ виду представленіе о нѣкоторомъ ограниченномъ силовомъ дѣйствіи, между тѣмъ какъ въ первомъ случаѣ безгранично сохраняющаяся скорость является представительницею всего, въ ней какъ бы сложеннаго, количества движенія.

21. Если произвожденіе скоростей характеризуетъ силовое дѣйствіе, то само собою понятно, что разъ возникнувшія скорости должны быть мыслимы сохраняющимися безгранично сами по себѣ, т. е. если отвлечься отъ какихъ-либо внѣшнихъ возмущающихъ дѣйствій. И однако этотъ основной законъ механики есть физическій фактъ, установленіе коего далось не легко. Косность матеріи въ отношеніи къ состоянію покоя—очевидна. Но другая часть закона инерціи, въ силу которой состояніе движенія сохраняется по направленію и скорости, есть настолько не самоочевидная аксіома, насколько она противорѣчитъ всѣмъ обычнымъ представленіямъ. Неограниченно сохраняющееся движеніе по прямой линіи и съ постоянною скоростью есть процессъ, парадоксальность котораго долго мѣшала его открытію. Но какъ отъ этого воззрѣнія без-

условно зависить прогрессъ динамики, то въ Галилеевскомъ законѣ косности и въ примѣненіи этого понятія къ объясненію и построению сложныхъ явленій мы должны признать такой же фундаментальный камень науки, какъ и въ представленіи о производженіи скоростей. Лишь обѣ идеи, взятыя вмѣстѣ, даютъ возможность объяснить и построить явленія силового дѣйствія, и, въ частности, дали средство Галилею развить законы паденія и ихъ комбинаціи.

Случай, несомнѣннѣйшимъ образомъ высказать и показать лежащее въ основаніи всѣхъ явленій начало косности, представился Галилею при разработкѣ параболическаго движенія брошенныхъ тѣлъ. Этотъ предметъ составляетъ тѣмъ четвертаго дня *Discorsi*, и—черта характерная,—тотчасъ-же, въ первыхъ латинскихъ формулировкахъ высказано ¹ начало «сохраненія» и «неразрушимости» равномернаго движенія (въ горизонт. плоскости) какъ руководящее основное представленіе. Затѣмъ, достойно замѣчанія, что коснѣніе равномернаго движенія не соединено въ одинъ принципъ инерціи съ сохраненіемъ покоя,—обстоятельство, которое никакъ нельзя считать недостаткомъ теоріи. Позднѣе принятое соединеніе обѣихъ идей ², въ ихъ обще-принятой концепціи имѣетъ характеръ сочетанія двухъ разнородныхъ составныхъ частей, между которыми на дѣлѣ нѣтъ ничего общаго кромѣ въ высшей степени общаго логическаго, или, если угодно, метафизическаго представленія объ отсутствіи причины измѣненія неизмѣнно сохраняющагося во времени состоянія. Но преимущество, какое можно бы было приписать этому позднѣйшему способу представленія закона инерціи, опять-таки, во всякомъ случаѣ, уничтожается тѣмъ обстоятельствомъ, что метафизическій способъ изъясненія принципа не можетъ ручаться за сохраненіе движенія. Принципъ инерціи, какъ уже сказано, есть физическій фактъ, который въ своей простотѣ долженъ быть указанъ и извлеченъ чрезъ разложеніе способовъ дѣйствія природы въ сложныхъ естественныхъ процессахъ, но не можетъ быть разсматриваемъ какъ чистая необходимость мышленія. Поэтому, то обстоятельство, что эта позднѣйшая несостоятельная концепція начала инерціи не находитъ никакой опоры въ Галилеевскомъ методѣ,—служить лишь оправданіемъ послѣдняго. Тѣмъ не менѣе, въ галилеевскомъ методѣ нѣтъ недостатка и въ умозрительныхъ элементахъ, какъ мы это тотчасъ увидимъ при изученіи возникновенія главныхъ результатовъ новаго направленія изслѣдованій.

¹ Т. XIII, цит. произвед., стр. 222.

² Впрочемъ, ср. въ шестомъ (посмертномъ) днѣ, на стр. 323 мѣсто о сохраненіи покоя и скорости.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Возникновение главных результатов галилеевской механики и формирование различных началъ.

22. Былъ поднятъ вопросъ о томъ, достигъ-ли Галилей главныхъ результатовъ своей динамики, а именно открытія законовъ паденія, путемъ эмпирическимъ, и уже только послѣ этого построилъ свои умозрѣнія на почвѣ полученныхъ такимъ образомъ воззрѣній, или же наоборотъ—сначала построилъ абстрактныя схемы движенія, какъ вѣроятныя формы, въ которыхъ должны бы были проявляться и дѣйствія физическихъ силъ, и лишь послѣ этого нашелъ опытные доказательства, говоряція въ пользу сдѣланныхъ предположеній. Отвѣтъ на этотъ, столь важный въ отношеніи принципиальнаго развитія науки, вопросъ не такъ простъ, какъ можетъ показаться на первый взглядъ. Во всякомъ случаѣ, послѣдніе наиболѣе доказательные опыты Галилея съ наклонною плоскостью были сдѣланы на почвѣ предположеній, содержавшихъ уже все, подлежащее доказательству. Но здѣсь рѣчь идетъ совсѣмъ не объ этомъ позднѣйшемъ стадіи разработки и установленія новыхъ воззрѣній, но объ ихъ первоначальнѣйшемъ появленіи. Въ этомъ послѣднемъ отношеніи опять никакъ нельзя отрицать, что первыя указанія къ концепціи какого бы то ни было рода движенія должны были исходить изъ самихъ физическихъ фактовъ, и что окончательная выработка мышленіемъ свободныхъ, самостоятельныхъ формъ представленія могла явиться лишь впоследствии. Какъ извѣстно, древніе не только вполне сроднились съ этимъ, подобнымъ игръ, приѣмомъ изслѣдованія и съ обработкою произвольно порождаемыхъ образовъ, но и были въ этомъ отношеніи болѣе чѣмъ пристрастны, такъ что апріорный методъ казался имъ наиболѣе естественнымъ и какъ бы исключительно образцовымъ. Но Галилей, равно какъ и его гениальный предшественникъ Леонардо-да-Винчи, съ своими приѣмами и съ своими тенденціями, составляли самый рѣзкій контрастъ этому античному приѣму, по скольку, именно, этотъ послѣдній изъ области чистой математики незаконно переносили въ область естествознанія. Аристотелевская натурфилософія была во времена Галилея представительницею самыхъ несостоятельныхъ научныхъ приѣмовъ, а потому слѣдуетъ заключить, что самый рѣшительный и самый сильный противникъ господствующаго у Аристотеля приѣма мышленія никакъ не могъ сдѣлать такого рода приѣмъ руководящею нитью собственныхъ изслѣдованій.

Судя по тому, какъ самъ Галилей высказывается о внутреннемъ

процессъ мышленія, коимъ онъ выработалъ свои основныя динамическія воззрѣнія, можно установить только то, что исходнымъ пунктомъ при математической разработкѣ представленія о равномѣрно ускоренномъ движеніи служили ему простыя наблюденія, и что затѣмъ онъ искалъ экспериментальнаго подтвержденія результатовъ, приобрѣтенныхъ имъ на этой почвѣ чистаго мышленія. Но какого рода были эти первыя, такъ сказать, сырыя и неопредѣленные наблюденія, давшія первыя основанія для идеальныхъ построеній и для экспериментальной провѣрки добытыхъ результатовъ, объ этомъ ничего нельзя сказать на основаніи имѣющихся источниковъ. Здѣсь играла нѣкоторую, хотя и незначительную, роль и традиція; особенно же, какъ можно думать, ложное мнѣніе, что скорости возрастаютъ пропорціонально пространствамъ, могло въ нѣкоторой мѣрѣ побудить Галилея къ точнѣйшему изслѣдованію законовъ свободного паденія.

Не слѣдуетъ также забывать и того, что понятіе о непрерывности носило у Галилея чисто математическій характеръ, и въ этой формѣ очень было пригодно къ тому, чтобы обратить его вниманіе на способъ, какимъ природа, при различнѣйшихъ обстоятельствахъ, производитъ скорости посредствомъ постепенныхъ приращеній. Повидимому, въ этомъ отношеніи, даже движенія животныхъ послужили для Галилея точкою опоры. Такъ, въ началѣ 2-й книги (3-й день) *Discorsi* ¹ читаемъ: «Въ изслѣдованіи естественно ускорительнаго движенія руководило насъ, въ концѣ концовъ, наблюденіе устройства и обычая самой природы во всѣхъ остальныхъ ея произведеніяхъ, гдѣ она обыкновенно прибѣгаетъ къ первоначальнымъ, простѣйшимъ и легчайшимъ средствамъ; ибо, я полагаю, едва-ли кто станетъ утверждать, чтобы летаніе или плаваніе могло осуществиться болѣе простымъ или болѣе легкимъ способомъ, чѣмъ тотъ, какой птицы и рыбы примѣняютъ, руководясь естественнымъ инстинктомъ».

Вслѣдъ за тѣмъ ² точнѣе обозначается этотъ простой путь и основнымъ представленіемъ сдѣлано простое суммирование скоростей пропорціонально текущимъ элементамъ времени. Еще раньше авторъ прямо выразилъ, что онъ тотчасъ же могъ бы сдѣлать исходнымъ пунктомъ фикцію о равномѣрно переменномъ движеніи. Что касается дальнѣйшихъ изслѣдованій Галилея на этомъ пути, то мы могли бы прямо сослаться на наше розысканіе касательно его представленія о элементарномъ производеніи скоростей. Впрочемъ, что касается главнаго предмета, который мы имѣемъ въ виду установить здѣсь, то изъ

¹ Т. XIII цит. изд., стр. 154.

² Ibid., стр. 155.

приведеннаго ясно, что творецъ законовъ паденія перешель очень скоро отъ кое-какихъ указаній наблюденія къ чисто спекулятивнымъ изслѣдованіямъ, и что преимущество его пріема состоитъ, главнымъ образомъ, въ томъ, что онъ тотчасъ же беретъ за исходный пунктъ своего схематизированія простѣйшіе процессы, какіе только можно представить себѣ. Физическій фактъ, принятый имъ за основаніе, былъ—возрастаніе скоростей. Умозрѣніе говорило ему, что это возрастаніе должно совершаться непрерывно, а въ статикѣ онъ уже привыкъ смотрѣть на скорость какъ на указателя силы, поэтому и въ паденіи элементы скорости онъ разсматривалъ какъ элементарныя проявленія силы. Но равномерность теченія времени казалась ему тою формою нарастанія элементовъ, въ какой должны совершаться и простѣйшія элементарныя проявленія силового дѣйствія. Такимъ образомъ онъ пришелъ къ представленію, по которому дѣйствіе силы во времени проявляется въ послѣдовательномъ, пропорціональномъ элементамъ времени, производеніи скоростей. Опредѣленіе равномерно перемѣннаго движенія было, слѣдовательно, просто дѣломъ формулированія. Въ сущности процессъ, коего, такъ сказать, лишь форономическимъ проявленіемъ служить пробѣганіе пространствъ пропорціонально квадратамъ времени, былъ охарактеризованъ уже указаніемъ на форму производенія скоростей. Этотъ способъ представленія даже глубже проникаетъ, чѣмъ тотъ, который тотчасъ же дѣлаетъ исходнымъ пунктомъ фактически пробѣгаемаго пространства. Но онъ и научнѣе, ибо онъ даетъ замѣтить то простое, изъ котораго сложное явленіе вытекаетъ лишь какъ дальнѣйшій результатъ.

23. Вполнѣ правильно и Лагранжъ усматривалъ геніальность Галилея не столько въ его удачныхъ наблюденіяхъ, сколько въ способности разлагать и распутывать физическіе факты, являющіеся нашему уму въ весьма запутанномъ видѣ. Одно мѣсто изъ Аналитической Механики¹, не разъ уже цитированное въ этихъ видахъ писателями, не бесполезно привести еще разъ и на этихъ страницахъ, ибо ложныя идеи о сущности истинной индукціи всего лучше опровергаются правильною оцѣнкою классическихъ образцовъ. Но Галилей не являлъ бы собою такого образца, если бы не обладалъ тою силою разлагающаго мышленія, безъ которой косные факты едва-ли могутъ сами собою содѣйствовать дѣйствительно значительному расширенію знанія. Лагранжъ противопоставляетъ астрономическимъ открытіямъ динамическія теоріи, говоря: „Открытія спутниковъ Юпитера, фазъ Венеры, солнечныхъ

¹ Изд. 1811, т. 1, 2-ое отд. Sect. 1, Вступленіе.

пятенъ и т. д. требовали лишь телескопа и прилежанія; но нуженъ необыкновенный геній (*génie extraordinaire*), чтобы извлечь законы природы изъ явленій, ежеминутно совершающихся передъ глазами, но истолкованіе коихъ, тѣмъ не менѣе, доселѣ не поддавалось усиліямъ философовъ“. Итакъ, индуктивное умозрѣніе было самою характерною чертою въ приѣмѣ Галилеевскаго мышленія. Оно состояло въ математически-правильномъ мышленіи въ такихъ формахъ, которыя, будучи натуральными, тѣмъ самымъ служили вѣрнымъ ручательствомъ, что имъ должно нѣчто соответствовать въ природѣ. Но этотъ методъ былъ бы еще весьма несовершененъ охарактеризованъ, еслибы мы особенно не указали важнѣйшей составной части его. Законы паденія не были бы даже приблизительно установлены, если бы съ самаго начала не выступала правомѣрно мысль, со временемъ точнѣе опредѣлить всѣ представленія касательно отношеній встрѣчающихся въ нихъ величинъ, а не довольствоваться неопредѣленными, какъ бы колеблющимися, идеями. Даже просто гипотетическое введеніе количествъ далеко еще не связывало бы насъ съ дѣйствительностью природы и не выходило бы изъ сферы чистаго мышленія. Лишь опредѣленное измѣреніе количественныхъ отношеній въ явленіяхъ могло дать выходъ изъ сферы простаго умозрѣнія и послужить мостомъ для перехода къ дѣйствительности. Можно разсуждать и спорить сколько угодно о формальныхъ отношеніяхъ величинъ, напр. объ ускорительномъ приращеніи или о сложной пропорціональности въ проходимыхъ пространствахъ, не приходя ни къ какому рѣшительному результату, если не придавать никакого значенія сочетанію мышленія съ дѣйствительностью путемъ опредѣленія ускоренія или пространства, проходимаго въ первую секунду. Даже опытъ, которымъ устанавливались бы только простыя отношенія, но не было бы дано абсолютныхъ величинъ, представлялъ бы въ извѣстномъ смыслѣ нѣчто несовершенное. Лишь допущеніе въ область мышленія и въ вычисленіе чисто случайнаго или, скорѣе, фактическаго могло дать полный просторъ умозрѣнію, и вотъ эта-то сторона метода, опирающаяся на важность абсолютныхъ, существующихъ въ природѣ, величинъ, одна была въ состояніи создать динамику природы и вывести умъ на настоящую дорогу.

Всѣ абсолютныя количественныя опредѣленія, относящіяся къ простѣйшимъ элементамъ явленій, составляютъ также родъ принциповъ; ибо ихъ нельзя замѣнить ничѣмъ инымъ, и нельзя о нихъ заключать или ихъ выводить ни изъ чего иного. Они на столько же принципиальныя факты, насколько и логическія необходимости, и если они не были выставлены въ качествѣ аксіомъ или иначе не

были надлежаще отмѣчены въ системѣ сообразно своему значенію, то это обусловливается односторонне-формальною традиціею, взявшею за образецъ своихъ представленій о свойствахъ и необходимыхъ элементахъ силлогистической системы чистую математику, или, что было еще хуже, принявшею въ руководство обыкновенную логическую форму чисто спекулятивно разрабатываемыхъ другихъ ученій. Но всякая наука, включающая элементы опыта, только тогда въ отношеніи этихъ послѣднихъ принимаетъ строгую форму, когда природу эмпирическаго сохраняетъ въ неприкосновенной чистотѣ и даетъ ему надлежащую цѣну и въ логической обработкѣ научнаго матеріала. Но такая оцѣнка невозможна дотолѣ, пока абсолютныя количественныя опредѣленія занимаютъ не такой же рангъ, какъ и аксіомы.

Впрочемъ, самъ Галилей имѣлъ совершенно ясное сознаніе о томъ, чѣмъ онъ выдѣлялся изъ среды своихъ предшественниковъ. Во введеніи къ третьему дню *Discorsi* онъ высказывается о прежнихъ работахъ и книгахъ вообще, и о томъ, какъ мало дано въ нихъ мѣста наблюденію и какъ недостаточны доказательства. «Кое-что менѣе важное было замѣчено, какъ наприм., что естественное движеніе падающихъ тяжелыхъ тѣлъ непрерывно ускоряется. Но въ какомъ отношеніи возрастаетъ ускореніе—доселѣ оставалось недознаннымъ; ибо никѣмъ, сколько мнѣ извѣстно, не было доказано, что пространства, проходимыя движущимся тѣломъ въ равныя времена, начиная отъ состоянія покоя, находятся въ такомъ же отношеніи, какое имѣютъ послѣдовательныя нечетныя числа, начиная съ единицы. Также точно, хотя наблюденіе и показало, что ядра или брошенныя тѣла описываютъ нѣкоторую кривую линію, но что эта кривая—*парабола*, никто этого не доказалъ. Справедливость этихъ положеній и многое другое, достойное знанія, будетъ мною доказано, и что, какъ я думаю, еще важнѣе, будетъ открытъ доступъ къ наукѣ въ высшей степени многообъемлющей и превосходной, причемъ эти наши работы положить первыя ея основанія, а ея болѣе сокровеннымъ и болѣе отдаленнымъ не замедлять овладѣть глубже проникающіе умы».

24. Рѣдко удавалось пролагающему новые пути изслѣдователю въ столь краткихъ и простыхъ словахъ одинаково мѣтко охватить прошедшее, настоящее и будущее своего предмета. Указаніе на математическую форму, на количественныя отношенія и на абсолютныя величины было новымъ принципомъ, который въ примѣненіи къ свойствамъ свободного паденія и движенія брошенныхъ тѣлъ давалъ элементы новаго рода знанія, послужившаго позднѣе въ рукахъ Ньютона къ объясненію міроваго механизма или, по меньшей мѣрѣ,

одной из существенных сторон его. Итакъ, здѣсь дано было именно то, чего прежде не доставало, и было вѣрно предусматрѣно, что эти новыя основанія должны имѣть огромное значеніе.

Внутреннее происхожденіе ихъ у перваго творца началъ должно было соотвѣтствовать сущности дѣла. Поэтому участія натурфилософіи въ истинномъ смыслѣ этого слова и ея на дѣлѣ умозрительныхъ предположеній не только нельзя отрицать у Галилея, напротивъ слѣдуетъ признать въ высокой мѣрѣ, чтобы сдѣлать очевиднымъ—какъ значительно разстояніе, отдѣляющее приемы, при помощи коихъ была основана раціональная механика и изслѣдованіе міроваго механизма, отъ тѣхъ манипуляцій, какія рекомендовалъ Бэконъ. Вліяніе философіи, а вмѣстѣ съ тѣмъ и особыя черты вышеупомянутаго, въ высшей степени важнаго, различія мы разсмотримъ въ особой главѣ. Здѣсь мы укажемъ только на то, что Галилей въ главномъ своемъ открытіи гораздо болѣе опирался на почву умозрѣнія, чѣмъ Ньютонъ въ своемъ. Законы паденія были прежде всего вполнѣ раціонально схематизированы, и только послѣ этого подтверждены эмпирически. Напротивъ у Ньютона за основаніе были взяты Кеплеровы законы, и потребовалось не болѣе какъ простаго расчлененія ихъ содержанія, чтобы выработать представленіе объ элементарныхъ отношеніяхъ космическихъ движущихъ силъ, именно о дѣйствіи въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній, а затѣмъ и о всеобщности тяготѣнія.

Но если въ духѣ Галилея и преобладало развитіе изъ простѣйшихъ воззрѣній и началъ, то изъ этого не слѣдуетъ, чтобы начала эти у него тотчасъ были выдѣлены въ качествѣ таковыхъ, формулированы и пущены въ ходъ во всѣхъ направленіяхъ такъ, какъ мы это видимъ въ позднѣйшія времена. Одинъ изъ поучительнѣйшихъ примѣровъ касательно этого обстоятельства представляетъ необходимѣйшій принципъ сложенія силъ. Галилей прилагаетъ нѣкоторыя весьма важныя стороны этого начала во многихъ случаяхъ, и именно при доказательствѣ, что горизонтальная скорость и дѣйствіе тяжести обусловливаютъ параболическій путь. Это доказательство есть чисто дѣло математической консеквентности, какъ скоро сложеніе силъ принципиально установлено.

Если мы припомнимъ (§ 17—19) принципиальную роль, какую играло въ воззрѣніяхъ Галилея понятіе о моментѣ какъ синонимѣ силы, то насъ не удивитъ, если мы встрѣтимся у него съ теоремою о сложеніи моментовъ или побужденій. Въ четвертомъ днѣ *Discorsi*, т.-е. въ отдѣлѣ о параболическомъ движеніи брошенныхъ тѣлъ, мы встрѣчаемся съ принципомъ сложенія силъ въ двухъ мѣстахъ, для случая, когда направленія силъ взаимно перпендикулярны. Въ

одномъ мѣстѣ ¹ говорится, что моменты (или *impetus*) двухъ равноѣрныхъ движеній, изъ коихъ одно горизонтально, а другое вертикально, даютъ моментъ, равный имъ обоимъ въ степени (т.-е. въ квадратѣ). При этомъ доказательствѣ предполагается, что движенія слагаются по діагонали прямоугольника, образуемаго величинами моментовъ на сторонахъ его, т.-е. соответствующими имъ скоростями, и затѣмъ по длинѣ діагонали дѣлается заключеніе объ общемъ моментѣ, дѣйствующемъ по ея направленію. Итакъ, главнымъ дѣломъ въ данномъ принципѣ является не сложеніе чисто форонимическихъ движеній, или лучше простыхъ явленій движенія; но здѣсь идетъ рѣчь о сложеніи дѣйствительныхъ силовыхъ величинъ, т.-е. величинъ тѣхъ причинъ, которыя лежатъ въ основаніи проходимыхъ пространствъ какъ моменты и этимъ простымъ явленіямъ всегда какъ бы предшествуютъ. Такъ какъ мы еще не разъ должны будемъ коснуться различныхъ фазъ, подъ которыми является въ ходѣ развитія механики принципъ сложенія или разложенія силъ, то цѣлесообразно будетъ съ самаго начала и со всюю строгостью обратить вниманіе на существенную разницу между представленіями о сложеніи простыхъ движеній и представленіями о непосредственномъ сложеніи силъ. Идеи перваго рода принадлежатъ чистой математикѣ и не требуютъ ничего, кромѣ чисто интеллектуальной комбинаціи двухъ представленій движенія. Эти идеи—вполнѣ форонимическія, такъ что понятія о матеріальныхъ силахъ, даже о реальныхъ причинахъ вообще не играютъ въ нихъ никакой роли. Въ виду этого, уясненіе начала сложенія простыхъ движеній никогда не представляло никакой трудности, такъ что представленія объ этомъ рода сложеніи играли въ извѣстной мѣрѣ нѣкоторую роль уже въ высшей геометріи древнихъ, а именно у Архимеда.

Но важный для механики шагъ заключается именно въ установленіи начала сложенія непосредственно самыхъ силъ, и притомъ съ включеніемъ въ него и сложенія силъ въ состояніи равновѣсія. Въ примѣненіи начала сложенія къ статикѣ ясно обнаруживается, что сложеніе движеній просто есть вспомогательное средство и просто начало познанія сложенія силъ въ собственномъ смыслѣ, но само по себѣ и по отношенію къ реальному міру есть лишь второстепенное слѣдствіе болѣе общаго основнаго положенія.

25. Въ другомъ мѣстѣ ² мы находимъ болѣе популярное разъясненіе содержанія перваго мѣста, причемъ здѣсь изъ горизонтальнаго и вертикальнаго моментовъ, равныхъ 3 и 4, выводится равно-

¹ Discorsi etc. т. XIII цитир. изд. стр. 234.

² Ibid стр. 243.

дѣйствующій *impetus* 5, на основаніи пифагоровой теоремы. Въ отношеніи всего изложенія слѣдуетъ, впрочемъ, замѣтить, что, само собою разумѣется, Галилей нигдѣ не былъ бы въ состояніи оперировать, не овладѣвъ вполне общей идеей сложенія силъ, т.-е. идеей, не ограничивающейся разсмотрѣніемъ только такихъ силъ, которыя дѣйствуютъ въ различныхъ направленіяхъ. И соединеніе элементовъ одной и той же силы въ одномъ и томъ-же направленіи есть уже дѣйствительное сложеніе силъ, и только новѣйшій обычай, предлагающій намъ такъ называемый параллелограммъ силъ прямо какъ фундаментальное начало или даже какъ аксіому, служить причиною пренебреженія вполне примитивныхъ представленій о сложеніи или вычитаніи силъ въ одномъ и томъ же направленіи. Между тѣмъ, именно только при помощи этихъ простѣйшихъ представленій и становится вообще возможнымъ ясное понятіе о величинѣ силы. Мыслить силу какъ величину значить уже представлять ее себѣ какъ сумму элементарныхъ силъ. Поэтому вполне естественно и понятно, что Галилей, вездѣ выставлявшій сознаніе послѣднихъ началъ, и умѣвшій отменно точно формулировать ихъ, имѣлъ и соответствующія основныя представленія о самопростѣйшемъ видѣ сложения силъ. Лишь при помощи этихъ основныхъ представленій удалось ему вывести законъ пространствъ при паденіи, и даже уже его первоначальная идея о производженіи скоростей (ср. § 19—20) включала въ себѣ нѣкоторымъ образомъ сложеніе элементарныхъ силъ, тѣмъ болѣе что скорость всегда была для него непосредственною мѣрою момента.

Тѣмъ не менѣе, если гдѣ особенно рѣзко выдѣляются границы Галилеевскаго способа представленія, такъ это именно въ вопросѣ о сложеніи силъ. Какъ въ статикѣ, такъ и въ новосозданной области динамики представленіе о редуцированномъ или относительно дѣйствіи силы въ иномъ направленіи, не совпадающемъ съ направленіемъ свободнаго проявленія силы, выработано, по меньшей мѣрѣ, точно. Нынѣ этотъ случай очень легко приводится къ простому разложенію силы, такъ что заданному направленію дѣйствія соответствуетъ лишь проэкція силы на это направленіе. Безъ сомнѣнія, и Галилей оперировалъ фактически правильно, когда рѣчь шла о подобномъ, частію статическомъ, частію динамическомъ относительно силовомъ дѣйствіи. Однако, эта точка зрѣнія непосредственной простой редукціи, и именно въ динамическихъ примѣненіяхъ къ ускореніямъ, отнюдь не была ему свойственна, какъ это видно въ особенности изъ того, что въ главномъ вопросѣ, съ которымъ онъ справился лишь послѣ изданія *Discorsi*, онъ сталъ на эту точку зрѣнія лишь послѣ многократныхъ тщетныхъ попытокъ.

Вопросъ этотъ касался доказательства предложенія, употреблявшагося какъ недоказанное начало, что тѣла, падающія по наклонной плоскости и по вертикалу до горизонта или вообще до одинаковаго уровня, каждое въ направленіи своего движенія, приобретаютъ одинаковую скорость. Это предложеніе имѣло весьма большое значеніе для сравненія свободнаго паденія съ движеніемъ по наклонной плоскости, равно и для сравненія паденія по различнымъ наклоннымъ плоскостямъ. Предложеніе это лишь съ большою натяжкой можно было примѣнять какъ недоказанное начало, и лишь отсутствіе доказательства и большія трудности, встрѣтившіяся при изысканіи простыхъ основаній его истины, придали ему эту особенную роль. Впрочемъ, подобное употребленіе теоремъ въ формѣ недоказанныхъ началъ въ исторіи развитія механики не рѣдкость; съ однимъ изъ извѣстнѣйшихъ случаевъ этого рода мы еще встрѣтимся въ Гюйгеновскомъ рѣшеніи вопроса о центрѣ качанія.

26. Изслѣдованіе вышеупомянутой трудности имѣетъ такую важность въ отношеніи употребленія началъ у Галилея и бросаетъ столь яркій свѣтъ на его мышленіе въ области статики и динамики, что мы должны изложить и изслѣдовать этотъ случай съ большею тщательностью.

Относящееся сюда предложеніе гласитъ у Галилея буквально такъ ¹: «степени скорости движущагося тѣла, скатывающагося съ нѣкоторой наклонной плоскости естественнымъ движеніемъ, всегда равны при достиженіи горизонтальной плоскости, какъ скоро удалены всѣ препятствія». Впрочемъ, предложеніе это было уже высказано какъ постулатъ ² вмѣстѣ съ опредѣленіемъ равноѣрно - ускореннаго движенія, между тѣмъ какъ доказательство его находится въ вышеупомянутомъ, позднѣе прибавленномъ мѣстѣ ³, не встрѣчающемся еще въ Лейденскомъ изданіи 1638 года. Тамъ принятъ слѣдующій пріемъ, причемъ АВ означаетъ наклонную плоскость, АС вертикаль и вмѣстѣ съ тѣмъ высоту наклонной плоскости надъ горизонтомъ. Исходнымъ пунктомъ всего доказательства служитъ представленіе, что *impetus* въ вертикальномъ направленіи относится къ *impetus* по наклонной плоскости, какъ длина этой послѣдней къ ея высотѣ. На этомъ основаніи для опредѣленія его по направленію длины наклонной плоскости, на ней откладывается часть AD, составляющая третью пропорціональную къ длинѣ и высотѣ. Такой отрѣзокъ натурально получится, если изъ подошвы вертикала опустить перпендикуляръ на наклонную плоскость: это мы прибавляемъ

¹ Ibid. 3 день, стр. 177.

² Ibid. Стр. 163.

³ Ibid. Стр. 178.

отъ себя для лучшаго уясненія дѣла. Такъ какъ «моменты относятся какъ пространства», то AD изображаетъ такой отрѣзокъ, на прохожденіе коего по наклонной плоскости требуется столько же времени, сколько его нужно на прохожденіе всего вертикала AC при свободномъ паденіи.

Остановимся здѣсь на минуту. Моменты тяжести тѣла, падающаго изъ A по AB и такого же тѣла, падающаго по AC, относятся какъ AC къ AB, ибо сила тяжести, свободное направленіе которой совпадаетъ съ AC, на наклонной плоскости AB дѣйствуетъ только нѣкоторою своею частію, именно по скольку она мыслима дѣйствующею и вдоль AB. Но въ направленіи AB дѣйствіе оказывать можетъ только часть ея, представляющая проецію ея на это опредѣленное направленіе. Поэтому, прохожденію пространства AC соответствуетъ въ то же самое время пробѣгъ отрѣзка AD. По обычному въ наше время, но менѣе естественному и менѣе простому способу представленія, вдоль наклонной плоскости AB можетъ способствовать движенію только слагающая сила, получаемая разложеніемъ свободной силы тяжести на двѣ части: дѣйствующее нормально къ плоскости давленіе, и свободную динамически дѣйствующую составную часть. Мы не имѣемъ здѣсь въ виду дальнѣйшаго изслѣдованія этихъ различныхъ способовъ представленія, но лишь упоминаемъ о нихъ съ цѣлью исполнѣсно выдвинуть точку опоры Галилеевскаго доказательства. Очевидно, представленіе объ отношеніи моментовъ, обнаруживаемыхъ силою тяжести въ обоихъ направленіяхъ, носило у Галилея аксіоматическій характеръ и слѣдовательно въ разсматриваемомъ доказательствѣ замѣняло болѣе сложное начало простѣйшимъ. Тѣмъ не менѣе, это представленіе объ отношеніи моментовъ на наклонной плоскости и при свободномъ направленіи, какъ бы обычно въ изслѣдованіяхъ по статикѣ въ то время оно ни было, въ примѣненіи къ динамикѣ является собою нѣчто не совсѣмъ удовлетворительное. Является непроизвольное стремленіе къ большей ясности и болѣе точному обоснованію, и это требованіе усиливается въ еще большей мѣрѣ, какъ скоро при ближайшемъ разсмотрѣніи замѣчается, что и для чисто статическаго отношенія приведеніе силы къ данному направленію играло роль простаго постулата. Но объ этомъ послѣ — при разсмотрѣніи статическихъ идей Галилея. Освѣтивъ исходный пунктъ, прослѣдимъ лучше дальнѣйшій ходъ доказательства.

Скорости въ C и D тоже относятся, какъ первоначальные моменты; ибо эти моменты суммируются по обѣимъ линіямъ въ одинаковое время и именно пропорціоально времени. Въ сущности вѣдь моменты суть элементарныя скорости, а скорости нарастаютъ какъ

время. Но какъ отношеніе скорости въ D къ скорости при основаніи вертикала C извѣстно, то остается доказать такое же отношеніе для B и D. Но скорости въ B и D должны относиться какъ времена, въ продолженіи которыхъ онѣ производятся. Но эти времена опять тѣ же самыя, въ теченіе которыхъ пробѣгаются пространства AB и AD. Сказанная пропорціональность скоростей временамъ слѣдуетъ изъ опредѣленія равно-ускореннаго движенія. Но изъ дальнѣйшей теоріи этого движенія Галилею уже извѣстно, что времена, отношеніе которыхъ ищется, относятся какъ квадратные корни изъ проходимыхъ пространствъ AB и AD. Такимъ образомъ остается только взять среднюю пропорціональную между AB и AD. По построенію, она уже изображается линіей AC, и отношеніе линіи AB къ этой средней пропорціональной AC и будетъ искомое отношеніе временъ и слѣдовательно скоростей въ B и D. Итакъ, доказано, что скорости въ C и B находятся въ равномъ отношеніи къ скорости въ D, и слѣдовательно равны между собою.

Это доказательство для нашихъ новыхъ способовъ воззрѣнія является чѣмъ то необычнымъ, ибо оно многократно пользуется окольными путями геометрическихъ заключеній тамъ, гдѣ мы опредѣляемъ отношенія аналитическимъ путемъ непосредственно, не прибѣгая къ посредству третьей и средней пропорціональныхъ. И все таки чисто механической способъ заключенія въ этомъ доказательствѣ служить прекраснымъ примѣромъ простоты и точности принципіальныхъ основныхъ представленій Галилея. Моменты или *impetus*, скорости и ихъ производеніе пропорціонально времени, пропорціи временъ, — все это ясно выступаетъ, такъ что сразу приобрѣтается ясное представленіе—какъ пускать въ ходъ эти понятія. Лишь одинъ пунктъ остается въ нѣкоторой мѣрѣ неяснымъ; это, какъ уже упомянуто, есть динамическое допущеніе, что отношенія моментовъ при началѣ движенія, а стало-быть и въ каждой дальнѣйшей точкѣ его, поскольку они мыслимы въ этой послѣдней какъ новыя элементарныя побужденія тяжести, находятся въ отношеніи длины наклонной плоскости къ ея высотѣ. Если бы эти моменты понимались чисто въ смыслѣ статики, то этотъ исходный пунктъ былъ бы уже нѣсколько лучше обоснованъ. Но въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы ихъ встрѣчаемъ въ упомянутомъ доказательствѣ, они включаютъ и динамическую идею, что полному дѣйствію свободной силы тяжести при паденіи по AC соотвѣтствуетъ, для того же самаго времени, наклонное пространство AD; ибо пространства, сказано было, относились какъ моменты.

Впрочемъ, въ отношеніи указаннаго примѣненія представленія объ отношеніи моментовъ не можетъ быть болѣе никакого сомнѣнія, какъ

скоро статическое основное представлѣніе обезпечено и перенесеніе этого представлѣнія въ область движенія въполнѣ оправдано. Такимъ образомъ теперь рѣчь идетъ объ изысканіи основаній статическаго представлѣнія о приведеніи силъ къ данному направленію, и затѣмъ о методѣ, при помощи котораго статическія истины можно было бы примѣнять въ динамикѣ. Въ виду этого, прежде чѣмъ послѣдуемъ далѣе за Галилеемъ въ его динамикѣ, мы должны ближе рассмотретьъ одинъ пунктъ изъ статики.

27. Законъ косвеннаго неполнаго дѣйствія силы, которой что-либо препятствуетъ проявлять дѣйствіе въ первоначальномъ, собственномъ и свободномъ направленіи, играетъ въ Статикѣ Галилея фактически роль аксіомы. Въ этомъ можно убѣдиться изъ рассмотрѣнія разъясненія, присовокупленнаго ¹ къ принципу, что равные грузы имѣютъ точку равновѣсія въ срединѣ соединяющей ихъ линіи. Именно, къ этому аксіоматическому допущенію, совпадающему съ таковымъ же допущеніемъ Архимеда, присоединено, въ формѣ второстепеннаго примѣчанія, въ высшей степени важное обстоятельство, что при измѣреніи разстояній грузовъ, когда опредѣляется ихъ дѣйствіе, всегда слѣдуетъ брать перпендикулярныя разстоянія отъ линій направленія тяжести. Затѣмъ, редуцированное такимъ образомъ статическое дѣйствіе постулируется для случая, когда равныя плечи рычага образуютъ уголь, или, скорѣе, лишь для случая, когда одно плечо выведено изъ горизонтальнаго положенія, между тѣмъ какъ другое остается горизонтальнымъ. Это же послѣднее представлѣніе, вмѣстѣ съ идеей силоваго дѣйствія, редуцированнаго соотвѣтственно перпендикулярному разстоянію, служитъ затѣмъ для доказательства статическаго отношенія на наклонной плоскости. Основа этого доказательства, при посредствѣ котораго наклонная плоскость приводится къ рычагу, и есть, слѣдовательно, вышесказанный постулатъ объ измѣреніи разстояній, или, другими словами, объ опредѣленіи неполнаго дѣйствія, обнаруживаемаго силою въ направленіи, составляющемъ уголь съ свободнымъ ея дѣйствіемъ. Разбирая каждую составную часть доказательства, предложеннаго Галилеемъ въ его небольшомъ трактатѣ по статикѣ ² о равновѣсіи на наклонной плоскости, мы вездѣ найдемъ подтвержденіе тому, что здѣсь, какъ впрочемъ и вездѣ въ томъ же самомъ вопросѣ, главное-то дѣло и положено въ основаніе просто какъ подразумѣваемый постулатъ. Поэтому было бы чистою иллюзіей — считать это доказательство достаточнымъ.

¹ Della scienza meccanica, T. XI, стр. 91—92 цит. изд.

² Della scienza meccanica, ibid стр. 116—118.

Въ самомъ дѣлѣ, въ упомянутомъ мѣстѣ Галилей исходитъ изъ разсмотрѣнія равноплечаго рычага. Одно его плечо онъ заставляетъ отклоняться изъ горизонтальнаго положенія въ различные наклонныя положенія, между тѣмъ какъ другое плечо сохраняетъ горизонтальное положеніе. Моменты на вращаемомъ плечѣ измѣняются соотвѣтственно перпендикулярному разстоянію отъ вертикальной линіи, проходящей черезъ точку опоры и вращенія рычага. Натурально, сначала предполагаются равные грузы. Въ разныхъ точкахъ окружности, описываемой концомъ какъ бы поворачиваемаго плеча рычага, приложенные грузы производятъ дѣйствія, редуцированныя соотвѣтственно разстояніямъ. Но какъ наклонными положеніями рычажнаго плеча обусловливается только то, что они предписываютъ направленіе возможнаго каждый разъ дѣйствія тяжести, то ихъ можно замѣнить самымъ круговымъ путемъ, воображая его какъ неподвижную линію, и такимъ образомъ приходится имѣть дѣло, съ одной стороны, съ свободнымъ вертикальнымъ дѣйствіемъ, а съ другой стороны, съ наклоннымъ дѣйствіемъ въ нѣкоторой точкѣ круговаго пути. Оба дѣйствія уравниваются чрезъ посредство рычага, какъ скоро будутъ удовлетворены условія, соотвѣтствующія перпендикулярному разстоянію, т.-е. какъ скоро наклонно дѣйствующій грузъ будетъ увеличенъ въ отношеніи своего меньшаго разстоянія. Но посредство рычага потеряетъ всякое значеніе, если только сохранено будетъ все, что онъ даетъ, предписывая собою направленіе и взаимодѣйствіе силъ. Дѣйствіе же, производимое рычагомъ, эквивалентно сохранится, если совершенно отвлечься отъ этого механизма и вообразить себѣ, что точка на неподвижной круговой линіи соединена съ тою точкою, которая, по первоначальному предположенію, составляла конецъ неподвижнаго плеча рычага, а теперь увлекается въ вертикальной плоскости внизъ въ направленіи дѣйствія тяжести. Въ такомъ случаѣ, касательная въ нѣкоторой точкѣ неподвижной круговой линіи представитъ наклонную плоскость и притомъ вполнѣ точно, если только при опредѣленіи равновѣсія рассматривается одна только точка. Именно, наклонная плоскость, въ отношеніи такой точки, даетъ точный эквивалентъ дѣйствія неподвижнаго круговаго пути. Этотъ круговой путь обусловливаетъ точно также лишь опредѣленное направленіе дѣйствія для рассматриваемой каждый разъ точки. Остальное—дѣло геометріи, ибо самыя простыя соображенія тотчасъ же даютъ теорему, что дѣйствіе вертикальной силы редуцируется по длинѣ наклонной плоскости въ отношеніи длины къ высотѣ.

Таковъ ходъ Галилеевскаго доказательства, и нельзя не сознаться, что для рассматриваемаго предмета онъ слишкомъ сложенъ. Не-

подвижный круговой путь, очевидно, не настолько простая вещь, чтобы служить переходомъ къ наклонной плоскости; скорѣе, наоборотъ, наклонная плоскость можетъ послужить исходнымъ пунктомъ для изслѣдованія равновѣсія и движенія на кривыхъ поверхностяхъ или криволинейныхъ путяхъ. Впрочемъ, въ Галилеевскомъ доказательствѣ можно бы было совсѣмъ обойтись безъ введенія неподвижнаго круговаго пути и въ каждой рассматриваемой точкѣ тотчасъ ввести наклонную плоскость. Но такой приѣмъ нисколько не устранялъ бы главнаго недостатка. Этотъ существенный недостатокъ, какъ уже сказано, состоитъ не въ томъ только, что первоначально постулировалась редукція дѣйствія къ опредѣленному направленію, но еще въ большей мѣрѣ въ томъ обстоятельствѣ, что, строго говоря, весь законъ равновѣсія на наклонной плоскости въ сущности содержитъ не иное что, какъ правило такой редукціи дѣйствія для нѣкотораго заданнаго направленія. Теорема о наклонной плоскости, по своему содержанію, въ сущности есть ничто иное, какъ вышеуказанный постулатъ, а потому и самое доказательство есть не болѣе какъ миражъ, ибо въ сущности оно выводитъ ничто иное, какъ главнѣйшее предположеніе, на которомъ само оно основывается.

28. Изъ предыдущихъ параграфовъ выяснилось отношеніе, въ какомъ находилась Галилеевская динамика къ его статикѣ. Выяснилось, что теорія движенія на наклонной плоскости привела къ статикѣ, и въ этомъ отношеніи должна была бороться съ нѣкоторыми затрудненіями. Затѣмъ обнаружилось, что недостатку полнаго доказательства динамической теоріи, устраненному лишь позднѣе и окольнымъ путемъ, соответствовалъ подобный же недостатокъ въ статикѣ. Вмѣстѣ съ этимъ обнаружилось, какое вліяніе могло бы оказать точное обоснованіе статическихъ отношеній на тѣ задачи динамики, въ которыхъ рѣчь идетъ уже не о вполнѣ свободныхъ движеніяхъ и ихъ свободныхъ комбинаціяхъ. Главнѣйшія работы Галилея относятся къ сферѣ свободныхъ движеній, и вполнѣ систематическая комбинація ихъ съ условіями, заключенными въ произвольныя опредѣленныя рамки, относится лишь къ позднѣйшему времени. Эта послѣдняя задача даже въ наше время, хотя матеріально и разрѣшена, но формально, т.-е. что касается удовлетворительности способа представленія силовыхъ комбинацій, еще не вполнѣ закончена, какъ мы это докажемъ въ критикѣ позднѣйшихъ методовъ, а именно въ критикѣ концепціи сложенія силъ, общепринятой со временъ Вариньона. Теперь же, покончивъ съ разсмотрѣніемъ точекъ соприкосновенія со статикою, возвращаемся къ динамикѣ и къ изученію взаимной зависимости между ея главными результатами и методами.

Но дабы здѣсь же положить основаніе дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ, присоединимъ къ доселѣ изученнымъ точкамъ соприкосновенія статики съ динамикой еще одно общее замѣчаніе, значеніе котораго простирается и на теперешнее построеніе механическихъ ученій, и ведетъ за собою болѣе свободное воззрѣніе на взаимное отношеніе силъ.

Всякій разъ когда дѣйствию соотвѣтствуетъ противодѣйствіе, или, другими словами, когда разсмотрѣнію подлежитъ понятіе не одной свободной силы, но взаимодѣйствіе по крайней мѣрѣ двухъ силъ, которыхъ направленіе не вполне совпадаетъ и которыя, потому, не просто слагаются,—тамъ рядомъ съ результатомъ движенія или рядомъ съ направленнымъ во внѣ, какъ бы свободнымъ статическимъ комбинаціоннымъ дѣйствіемъ, имѣетъ мѣсто еще другой, такъ сказать, внутренній процессъ, въ силу котораго обѣ силы приходятъ отчасти въ равновѣсіе. Такимъ образомъ, силы отнюдь не могутъ вступать во взаимное отношеніе и во взаимодѣйствіе, не приходя по крайней мѣрѣ частію въ состояніе равновѣсія. За исключеніемъ двухъ самыхъ крайнихъ случаевъ, стоящихъ въ непрерывномъ ряду разнообразныхъ соотношеній какъ бы въ видѣ двухъ пунктуально уединенныхъ формъ, во всякомъ сложеніи силъ къ результату движенія примѣшивается результатъ статическаго взаимнаго уравновѣшенія. Это указываетъ намъ, при ближайшемъ разсмотрѣніи, и фундаментальная форма сложения—параллелограммъ силъ. Равные и противоположные перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ на діагональ, представляютъ здѣсь частныя дѣйствія обѣихъ, направленныхъ по сторонамъ, силъ, взаимно уничтожающіяся и, въ строгомъ смыслѣ слова, находящіяся въ равновѣсіи. Это взаимное уничтоженіе вполне ясно въ исключительномъ случаѣ, когда силы равны и противоположны по направленію, или если разсматривать уменьшеніе свободного двигательнаго эффекта, какъ онъ неограничено приближается къ нулю въ случаѣ равныхъ силъ, по мѣрѣ того какъ ихъ уголъ приближается къ двумъ прямымъ. Въ этомъ крайнемъ случаѣ силы взаимно уничтожаются не только частію, но вполне, и этотъ фактъ служитъ даже признакомъ того коснаго отношенія, которое мы для краткости называемъ равновѣсіемъ, и при которомъ мы не предполагаемъ никакого остатка свободного двигательнаго эффекта, который былъ бы результатомъ самихъ разсматриваемыхъ силъ. Всякое движеніе такой, находящейся въ равновѣсіи, системы силъ мы представляемъ, скорѣе, происходящимъ отъ внѣшнихъ силъ. Другой крайній исключительный случай—тотъ, когда свободныя силы, дѣйствующія совершенно въ одинаковомъ направленіи, просто складываются. Здѣсь имѣетъ мѣсто чистый эффектъ движенія и нѣтъ

никакого эффекта взаимнаго ослабленія; но, на что нужно обратить особое вниманіе, здѣсь нѣтъ и никакого противодѣйствія. Уголъ, образуемый силами, равенъ нулю, т.-е. его не существуетъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и противоположное дѣйствіе не имѣетъ мѣста. Но какъ бы мы ни представляли себѣ эти отношенія, предложеніе о смѣшеніи движенія и равновѣсія остается общимъ правиломъ по столъку, по сколько такое включаетъ въ извѣстномъ смыслѣ и крайніе случаи, если въ одномъ случаѣ положить равною нулю составную часть движенія, въ другомъ — составную часть, находящуюся въ равновѣсіи. Такой логически вѣрный способъ возрѣнія даетъ намъ руководящую нить, при помощи которой всѣ отношенія статики и динамики, съ которыми намъ придется имѣть дѣло, можно будетъ показать въ истинномъ свѣтѣ и привести къ ихъ послѣднимъ сокровеннѣйшимъ основамъ. По этому возрѣнію, которое никоимъ образомъ не есть пониманіе произвольное, но необходимый результатъ разлагающаго мышленія, — всѣ взаимодѣйствія силъ суть прежде всего отчасти отношенія равновѣсія, и всѣ явленія движенія равнымъ образомъ характеризуются, слѣдуя этому правилу, какъ частныя силовыя дѣйствія на основаніи какъ бы связаннаго съ ними частнаго равновѣсія. Отсюда сразу объясняется, почему динамика могла развиваться только на подкладкѣ расширенныхъ статическихъ познаній, и почему, обратно, главные начала статики должны были быть сведены къ извѣстнымъ представленіямъ движенія, именно къ виртуальнымъ или просто возможнымъ движеніямъ. Строго говоря, настолько же мы не вправѣ сказать, что динамика сполна ссылается на статику, какъ и обратно, что статика на динамику, какъ на сферу ея первыхъ началъ. Въ дѣйствительности, обѣ части механики образуютъ единую систему, двойственность которой обнаруживается лишь въ томъ, что эффекты взаимнаго уничтоженія разнородны съ эффектами движенія.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи, всякій разъ когда рѣчь будетъ идти объ отношеніи статики къ динамикѣ, мы будемъ ссылаться на вышеизложенное замѣчаніе. Что же касается специально галилеевскаго способа представленія, то изъ вышесказаннаго видно, что основатель новой динамики имѣлъ въ виду главнѣйше лишь свободныя силовыя дѣйствія, а сочетанія таковыхъ дѣйствій съ отношеніями равновѣсія могъ изслѣдовать лишь на наклонной плоскости, и то съ большимъ затрудненіемъ.

29. Уже теорія маятника, въ которой Галилей хотя и сдѣлалъ первый рѣшительный шагъ, но главнѣйше лишь въ эмпирическомъ родѣ, свидѣтельствуетъ о томъ, съ какими трудностями пришлось бороться примѣненію динамическимъ законовъ, установленныхъ для

свободныхъ силовыхъ дѣйствій, къ статически болѣе опредѣленнымъ комбинаціямъ. Въ такихъ случаяхъ тотчасъ примѣшивались чисто математическія препятствія къ проведенію самихъ по себѣ правильныхъ мыслей, а потому мы и не должны удивляться, что теорія маятника получила болѣе совершенный видъ лишь въ рукахъ Гюйгенса. Тѣмъ не менѣе, уже простая теорема Галилея, что «длины обратно пропорціональны квадратамъ чиселъ колебаній, совершающихся въ одно и то же время» ¹, имѣла характеръ пролагающаго новые пути предложенія. Въ указанномъ мѣстѣ она приведена какъ результатъ многократныхъ опытовъ; но не слѣдуетъ забывать, что побужденіемъ къ динамическимъ умозрѣніямъ и послужило Галилею именно случайное наблюденіе качательныхъ движеній висящей люстры. Даже его ошибка ², по которой паденіе по круговой дугѣ не только просто скорѣе паденія по хордѣ, но,—что справедливо лишь для циклоиды,—есть и скорѣйшее, свидѣтельствуетъ, по меньшей мѣрѣ, о попыткѣ подыскать для маятника болѣе строгую математическую теорію. Объ общей формѣ колебательнаго движенія рѣчь идетъ,—весьма нагляднымъ образомъ, уже въ знаменитомъ астрономическомъ діалогѣ. Здѣсь въ точнѣйшихъ выраженіяхъ говорится о равенствѣ скоростей въ соотвѣтственныхъ точкахъ, лежащихъ на одинаковой высотѣ, равно и о наибольшемъ наращеніи скорости въ самой низшей точкѣ дуги, затѣмъ объ уменьшеніи скорости до нуля при достиженіи высшей точки пути, и сверхъ того выставляется въ высшей степени важное положеніе ³, что скорость приобрѣтенная по достиженіи низшей точки дуги, представляетъ *Impetus*, вполне достаточный для поднятія маятника на ту высоту, съ которой началось его паденіе. Далѣе здѣсь изображается, какимъ образомъ тѣло, которое падало бы къ центру земли,—въ предположеніи что онъ обладаетъ тяжестью,—и могло бы оттуда свободно продолжать свое движеніе какъ бы въ каналѣ, должно бы было совершать неограниченный рядъ колебаній взадъ и впередъ, ибо при паденіи оно приобрѣло бы ровно такую скорость, которая позволила бы ему подняться, или, лучше, достигнуть выхода въ другомъ пунктѣ земной поверхности. Общая основная форма этого представленія правильна, хотя въ частности здѣсь и сдѣлана Галилеемъ неважная ошибка, ибо паденіе по прямому каналу, проходящему черезъ центръ земли, нельзя разсматривать такъ, какъ бы тяжесть дѣйствовала бы изъ центра какъ сила постоянная. Но поправка, что сила тяжести внутри земли уменьшается пропорціонально просто разстоянію отъ

¹ Discorsi e dimostazioni matematiche, Т. XIII сочиненій, 1 день, стр. 99.

² Idid. 3 день, стр. 217, схолія къ 36 предложенію.

³ Dialogo intorno ai due massimi sistemi etc. Т. I цит. изд. 2 день, стр. 250.

центра, въ отношеніи главнаго дѣла не важна; ибо колебательное движеніе, тѣмъ не менѣе, сохранить свою общую форму, хотя скорости въ отдѣльныхъ точкахъ пути и измѣнять свою абсолютную величину.

Изъ предыдущаго видно, что Галилей уже въ весьма общемъ видѣ усвоилъ себѣ то существенное динамическое основное представленіе, которое еще и нынѣ составляетъ фундаментъ механическаго мышленія, и что онъ былъ уже близокъ къ тѣмъ принципамъ, которые позднѣе, въ работахъ Гюйгенса, получили форму представленій о сохраненіи силы. Идея о томъ, что скорость, приобретаемая свободно-падающимъ тѣломъ, совершенно равно той, какая необходима для поднятія тѣла до первоначальной высоты, навѣрное возникла вначалѣ изъ размышленій о маятникѣ. Но именно эта идея и стала образцовымъ типомъ для представленій о сохраненіи силы. Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы позднѣе увидимъ, Гюйгенсъ только и сдѣлалъ, что эту идею объ отдѣльномъ падающемъ и поднимающемся тѣлѣ перенесъ на центръ тяжести системы тѣлъ.

30. Основаніемъ, почему теорія маятника лишь позднѣе получила болѣе совершенную форму, уже по отношенію къ простому маятнику была, очевидно, трудность болѣе точной математической обработки. Еще и нынѣ потребны приближенія, чтобы осилить при помощи дѣйствительныхъ вычисленій эту, повидимому, столь простую задачу и опредѣлить ширину размаха, при которой имѣло бы мѣсто, безъ замѣтной погрѣшности, вышеприведенное Галилеевское простое соотношеніе между длинами и имъ обратно-пропорціональными квадратами чиселъ колебаній. Это обстоятельство и можетъ служить намъ указаніемъ, гдѣ мы должны искать математическія границы Галилеевской динамики. Но изъ него же мы можемъ усмотрѣть, съ другой стороны, какихъ простыхъ геометрическихъ средствъ первоначально было достаточно для проведенія и примѣненія по большей части основныхъ представленій динамики. Тамъ, гдѣ мы нынѣ прилагаемъ интегралы, Галилей пользовался очень простыми геометрическими построеніями или вполнѣ элементарными ариѳметическими представленіями. И все-таки въ главномъ дѣлѣ онъ достигъ совершенно того же, что позднѣе въ менѣе элементарной формѣ нашло для себя иногда лишь менѣе ясное выраженіе. Притомъ, какъ эти первыя математическія основныя представленія о непрерывномъ суммированіи элементовъ силы вмѣстѣ съ относящимися къ нимъ простѣйшими результатами являются типомъ для всего дальнѣйшаго, то мы должны на минуту на нихъ остановиться. Сверхъ того мы будемъ имѣть при этомъ еще то преимущество, что съ самаго начала получимъ возможность опредѣ-

лечь съ меньшимъ трудомъ роль чисто-математическаго элемента въ выработкѣ механическихъ воззрѣній, чѣмъ если бы мы захотѣли выяснитъ это принципиальное различіе лишь въ болѣе сложныхъ задачахъ.

Математическое обоснованіе законовъ паденія впервые изложено уже въ діалогѣ о системахъ міра, а не въ чисто механическомъ главномъ сочиненіи *Discorsi*. Для изображенія пространства, пробѣгаемаго отъ начала паденія, имѣетъ рѣшительное значеніе изображение дѣйствій скоростей, существовавшихъ въ каждой точкѣ и образовавшихся сообразно возрастанію времени. Чтобы сдѣлать это изображение ¹ возможно болѣе строгимъ образомъ, принято—времена представлять возрастающими частями нѣкоторой прямой, а соотвѣтствующія имъ скорости неограниченнымъ числомъ перпендикуляровъ. Такимъ образомъ получается треугольникъ, площадь котораго выражаетъ сумму всѣхъ скоростей. Дополнивъ его до параллелограмма, Галилей тотчасъ находитъ теорему, что равномерное движеніе съ пріобрѣтенною въ концѣ времени скоростью дало бы для того же времени двойное пространство. Это, нынѣ столь избитое предложеніе основано на томъ соображеніи, что каждое дѣйствіе скорости производитъ элементарное, изображаемое соотвѣтственною линіей, пространство, такъ какъ по закону инерціи, всякая первоначальная скорость продолжаетъ свое дѣйствіе во все время движенія. Вѣсьма легко вывести отсюда дальнѣйшій законъ, что пространства-возрастаютъ какъ квадраты временъ ², ибо они возрастаютъ, какъ показываетъ и геометрическое представленіе, въ сложномъ отношеніи временъ и скоростей. Но какъ самыя скорости увеличиваются какъ времена, то это отношеніе и пропорціонально квадрату времени.

Все, что кромѣ этого въ томъ или другомъ отношеніи носить имя законовъ паденія, есть ничто иное какъ чисто математическія слѣдствія этого перваго основнаго представленія. Суммирование непрерывныхъ дѣйствій возрастающей со временемъ скорости,—вотъ главный пунктъ всей задачи, и выполненіе его, помимо абсолютныхъ количественныхъ опредѣленій, есть полное разрѣшеніе основной задачи динамики и существеннаго содержанія теоріи паденія. Но что привело къ ея разрѣшенію, по скольку рѣчь идетъ о математическихъ операціяхъ? Очевидно, ничто иное какъ наглядно-геометрическое уясненіе процесса, посредствомъ котораго величина возрастаетъ не просто по образу простыхъ нарашеній, но въ сложномъ отношеніи. Если этого рода возрастаніе привести къ анали-

¹ *Dialogo*, *ibid.* стр. 252.

² *Discorsi*, 3 день, стр. 169.

гическому выраженію, то мы получимъ половину квадрата простой перемѣнной величины какъ сумму различныхъ нарашеній, считая ихъ отъ нулеваго значенія до нѣкоторой произвольной величины. Другими словами, это есть интеграль произведенія изъ скорости на элементъ времени. Приэтомъ, насъ не должно смущать то обстоятельство, что въ Галилеевскомъ геометрическомъ представленіи сразу вводится произведеніе времени на скорость и объ величины представляются возрастающими соотвѣтственно на свои элементы. Въ дальнѣйшемъ развитіи механики намъ еще не разъ придется упомянуть объ этомъ послѣднемъ произведеніи; впрочемъ, какъ скоро рѣчь идетъ о простой пропорціональности времени или скорости, оно вполне эквивалентно тѣмъ другимъ произведеніямъ, въ которыхъ фигурируютъ квадратъ времени или квадратъ скорости. Поэтому мы имѣемъ полнѣйшее право сказать, что Галилей своимъ треугольникомъ пространствъ изобразилъ, правда весьма простой, интеграль скоростей, или точнѣе говоря, дѣйствій скорости.

Но если отвлечься какъ отъ новой формы аналитическаго выраженія, такъ и отъ геометрическаго представленія, и выставить присущее объѣмъ формамъ содержаніе мыслей, то мы достигнемъ такой ступени отвлеченія, которая намъ будетъ весьма полезна въ будущемъ при уясненіи принципиальныхъ вопросовъ, и особенно при разсмотрѣніи силового дѣйствія при ударѣ. Задача объ опредѣленіи пространствъ при свободномъ паденіи, разъ схвачена динамическая мысль о непрерывномъ, пропорціональномъ времени, производженіи скоростей, сводится къ совершенно абстрактному вопросу: что выйдетъ изъ нѣкоторой величины, которая возрастаетъ такъ, что нарастающіе элементы постоянно тотчасъ-же становятся основаніемъ новаго нарастанія? Въ разсматриваемомъ нами случаѣ, во-первыхъ, имѣетъ мѣсто простое возрастаніе пространствъ при помощи уже имѣющихся на лицо скоростей, и кромѣ того всякій вновь прибавляющійся элементъ вноситъ свой вкладъ въ нарастаніе на все дальнѣйшее время. Но можно найти и другое болѣе простое выраженіе въ данномъ случаѣ, сказавъ, что пространства производятся тѣмъ, что скорости какъ бы постоянно порождаютъ пространства съ теченіемъ времени, сами же возникаютъ и приходятъ въ дѣйствіе лишь пропорціонально времени.

Но въ какой бы формѣ мы ни дали себѣ отчетъ объ этомъ первомъ основномъ представленіи, всегда, если мы захотимъ оправдать дальнѣйшіе факты историческаго развитія, должны придавать большой вѣсъ тому, что представленіе о непрерывномъ суммованіи возрастающихъ скоростей есть такое воззрѣніе, на которомъ всего естественнѣе можно было обосновать дальнѣйшія идеи о дѣйствіи

силъ. Выше мы видѣли, что у Галилея скорость или моментъ есть настоящій представитель силы. Но уже въ отношеніи пространствъ при паденіи скорость нельзя смѣшивать съ дѣйствіемъ скорости. Дѣйствіе скорости мыслимо или неограниченно во времени, или по отношенію къ опредѣленному, хотя и весьма малому или неограниченно малому времени. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, для ближайшаго опредѣленія подобнаго дѣйствія потребно задание времени, въ теченіе котораго это дѣйствіе совершается. Такимъ образомъ должно мыслить скорость дѣйствующую, а не придавать ей значеніе мгновеннаго, какъ бы пунктуальнаго отношенія, если желаемъ уразумѣть значеніе величинъ, соотвѣтствующихъ квадратамъ, или скорѣе половинамъ квадратовъ скоростей. Самыя скорости суммируются лишь просто, между тѣмъ какъ ихъ дѣйствія слагаются изъ того, что является результатомъ закона инерціи и изъ каждый разъ вновь приходящаго элемента.

31. Въ самой совершенной формѣ оба основные закона свободного паденія изложены въ *Discorsi* ¹. Теорема о квадратичномъ возрастаніи пространствъ паденія приведена тамъ къ предложенію, по которому пространство представляется происшедшимъ вслѣдствіе равномернаго движенія со скоростью, равною половинѣ окончательной скорости. Но окончательныя скорости относятся какъ времена; а пространства, соотвѣтствующія окончательнымъ полускоростямъ, относятся также какъ времена, въ теченіе которыхъ эти равномерныя скорости предполагаются дѣйствующими. Поэтому пространства возрастаютъ какъ квадраты временъ. Въ приведенномъ мѣстѣ Галилей прямо прибавляетъ еще, что мѣрою возрастанія пространствъ, вмѣсто квадратовъ временъ, могутъ служить квадраты скоростей. Въ другомъ мѣстѣ также буквально значитсѣ ²: «пробѣгаемая пространства находятся въ отношеніи квадратовъ временъ, а слѣд. и степеней скорости (*e conseguentemente de gradi di velocita*)». Подобныя, повторяющіяся при случаѣ, выраженія важны какъ начало того представленія, по которому квадратъ скорости начинаетъ играть роль мѣры силового дѣйствія. Впрочемъ, по отношенію къ позднѣйшему возникновенію этого воззрѣнія не слѣдуетъ забывать, что первоначально у Галилея этою мѣрою всегда служило произведеніе изъ времени на половину скорости, въ которомъ на мѣсто скорости можно подставить пропорціональное ей время, или же на мѣсто времени пропорціональную ему скорость, не измѣняя этимъ самаго отношенія.

¹ Ibid. стр. 166—168.

² Ibid. стр. 177.

Дальнѣйшее развитіе динамическихъ началъ Галилеемъ, помимо того, о чемъ мы уже упоминали касательно наклонной плоскости и сложения движеній въ случаѣ брошенныхъ тѣлъ, не представляетъ ничего особеннаго, т.-е. имѣющаго важное значеніе для формировапія основныхъ положеній механики. Впрочемъ, въ этомъ смыслѣ имѣетъ нѣкоторое значеніе теорема, что время паденія по наклонной плоскости относится ко времени паденія по вертикалу, какъ длина наклонной плоскости къ ея высотѣ ¹, теорема, доказательство которой должно было вести при посредствѣ аксіомы о равныхъ скоростяхъ на одномъ и томъ же уровнѣ. Въ силу этого недоказаннаго положенія, скорости всегда равны въ двухъ точкахъ, лежащихъ на одной и той же горизонтальной линіи. Эти скорости равны на каждой горизонтальной линіи, пересѣкающей наклонную плоскость и вертикаль. Но какъ пространства, не смотря на равныя скорости, неравны, то и времена, въ которыя пробѣгаютъ эти пространства, должны различаться въ томъ же отношеніи. Это Галилеево заключеніе тѣмъ замѣчательнѣе, что оно ясно показываетъ, какимъ образомъ болѣе продолжительное дѣйствіе тѣхъ же скоростей на наклонной плоскости обуславливаетъ совершенно иную форму паденія.

Описаніе опытовъ на наклонной плоскости ², при помощи которыхъ впервые можно было дать полное опытное доказательство касательно формы и отношеній паденія, составляетъ безъ сомнѣнія важнѣйшую составную часть теоріи, поскольку послѣдняя основывается на фактахъ, а не просто на умозрѣніяхъ о возможной формѣ равно — ускореннаго движенія. Различныя наклоненія жолоба, выравниваніе его поверхности и измѣреніе времени водянымъ приборомъ — все это обстоятельства, имѣвшія большое значеніе для экспериментатора того времени, который пожелалъ бы провѣрить Галилеевы опыты, но въ наше время о нихъ стоитъ развѣ только упомянуть, особенно тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о происхожденіи принциповъ.

Различныя предложенія относительно паденія тѣлъ по наклонной плоскости суть ничто иное, какъ геометрическія примѣненія и обобщенія вышеприведеннаго фундаментальнаго принципа, который, въ свою очередь, есть опять-таки результатъ комбинаціи представленія о статическомъ отношеніи съ общою теоріей равномерно-ускореннаго движенія. Самое же доказательство, къ которому Галилей пришелъ лишь подъ конецъ, свидѣтельствуетъ, какъ мы видѣли въ § 26, о томъ, что обращенія къ отношенію равновѣсія на

¹ Ibid. стр. 179.

² Ibid. стр. 172.

наклонной плоскости и введенія его въ динамику обойти было нельзя. Вышеупомянутый, принятый за аксіому, законъ равенства скоростей на одномъ уровнѣ является въ этой новой концепціи даже прямо слѣдствіемъ статической редукціи силы тяжести.

Что касается движенія брошенных тѣлъ, служащаго предметомъ бесѣды четвертаго дня Discorsi, то теорія его основывается на принципѣ сложенія движеній и моментовъ или силъ, изложенномъ нами въ § 25 въ духѣ Галилеевскомъ. Первая теорема¹ прямо высказываетъ, что тѣло, имѣющее горизонтальное равномерное движеніе и при этомъ безпрепятственно повинующееся силѣ тяжести, движется, описывая полупараболу. Въ предположеніи принципа инерціи и правила сложенія, установленнаго для пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ движущихъ побужденій, все остальное есть просто дѣло геометрической характеристики описываемой кривой и не зависитъ уже отъ соображеній специально механическихъ.

Теорія движенія брошенных тѣлъ является первымъ случаемъ, въ которомъ простые динамическіе законы сочетаются не съ статическими основными положеніями, какъ на наклонной плоскости, но опять съ законами движенія. Для дальнѣйшаго историческаго развитія это различіе не маловажно. Одинъ рядъ успѣховъ, главнымъ виновникомъ которыхъ прежде всего является Гюйгенсъ, касается комбинацій статическихъ отношеній съ чисто динамическими законами. Главною задачей въ этомъ направленіи является теорія сложнаго маятника. Другой рядъ завоеваній относится къ свободному движенію тѣлъ и развитіе его вызвано эмпирически найденными законами космическихъ процессовъ. Онъ совершенъ главнѣйше Ньютономъ, обобщившимъ Галилеевскій способъ комбинаціи съ движеніемъ по инерціи и такимъ образомъ установившимъ общую теорію криволинейныхъ движеній и ихъ производящихъ силъ. Но замѣчательно, что новыя направленія менѣе удаляются отъ Галилеевскихъ, чѣмъ тотъ шагъ, который совершенъ самимъ основателемъ динамики, и который повелъ его въ обоихъ направленіяхъ уже дальше простаго разсмотрѣнія свободного паденія. Слѣдовательно, паденіе по наклонной плоскости и параболическое движеніе брошенных тѣлъ нужно разсматривать какъ два типическія развѣтвленія первоначальнаго ствола динамики. Поэтому, слѣдя за дальнѣйшимъ развитіемъ теорій, мы прежде всего обратимъ вниманіе на состояніе статическихъ принциповъ, какъ оно представляется частію самимъ Галилеемъ, частію его старшими, либо младшими современниками.

¹ Ibid. стр. 222.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Статическіе принципы въ Галилеевскій періодъ.

32. Чтобы уразумѣть, какъ развивались въ новое время принципы основанной еще древними, и именно Архимедомъ, статики, мы должны начать съ старѣйшаго современника творца динамики, съ Симона Стэвина (ум. въ 1633 г.). Этого нидерландскаго математика и техника мы могли бы назвать даже предшественникомъ Галилея, если-бы тогдашняя относительная изолированность изслѣдованій не препятствовала приведенію во взаимную связь явленій и теорій, возникшихъ, очевидно, независимо другъ отъ друга и долгое время сохранявшихъ такое изолированное положеніе.

Кромѣ Стэвина, являющагося, помимо Галилея, представителемъ прежде всего статическихъ успѣховъ разсматриваемаго періода, принадлежитъ изученію и младшій современникъ основателя динамики Картезий (1596—1650), хотя онъ и не имѣетъ такого значенія для положительной механики какъ его противникъ, современникъ и землякъ, Роберваль (1602—75), а, какъ уже замѣчено въ § 13, служить почти исключительно доказательствомъ вредной реакціи метафизической спекуляціи. Здѣсь же мимоходомъ обратимъ вниманіе и на великаго математика Фермата, хотя у него мы найдемъ лишь отдѣльныя замѣчанія и соображенія, имѣющія значеніе для механики. Хотя Ферматъ является еще младшимъ современникомъ Галилея и его дѣятельность едва переступаетъ за половину 17-го столѣтія (1608—65), но главная мысль его, подъ именемъ принципа наименьшаго дѣйствія, пріобрѣтаетъ общій для механики интересъ лишь спустя почти столѣтіе. Мы должны коснуться и работъ Паскаля (1623—62), по скольку въ нихъ идетъ рѣчь о принципахъ статики жидкостей, а именно о примѣненіи къ жидкостямъ принципа виртуальныхъ скоростей.

33. Въ способѣ изложенія у Стэвина замѣчается нѣкоторое сходство съ древними, такъ какъ онъ даетъ строго расчлененныя доказательства, между тѣмъ какъ основанія возникновенія отношеній у него почти не выступаютъ впередъ. Мы цитируемъ здѣсь сочиненія его не по голландскому оригиналу, но по французскому переводу Жирана, изданному in-folio въ Лейденѣ въ 1634 году, и содержащему также и статику. Кстати замѣтить, Стэвинъ придавалъ весьма большое значеніе языку, и то обстоятельство, что во времена, когда всѣ писали по-латыни, онъ, подобно Галилею, предпочиталъ живой народный языкъ, свидѣтельствуетъ объ энергіи его усилій. Затѣмъ, доступность и оригинальность его изложенія статики на столько ве-

лики и такъ рѣзко выдѣляются, что во всемъ, что касается статическихъ изслѣдованій, предшествовавшихъ Галилею и ему современныхъ, Стэвину принадлежитъ первое мѣсто. Впрочемъ, здѣсь мы будемъ имѣть дѣло съ тѣмъ, что въ отношеніи общихъ началъ статики имѣтъ у него вполне оригинальный характеръ. Если оставить пока въ сторонѣ гидростатику, то Стэвиновъ приемъ, при помощи котораго онъ выводитъ условіе равновѣсія на наклонной плоскости, даже въ наше время имѣтъ не одинъ историческій интересъ.

Онъ разсматриваетъ ¹ опирающійся на горизонтальное основаніе и расположенный въ вертикальной плоскости треугольникъ, огибаемый замкнутою цѣпью шарообразныхъ грузовъ. На Стэвиновской фигурѣ шары распредѣлены такъ, что на одну сторону треугольника ихъ приходится 4, на другую 2, и 8 шаровъ висятъ свободно подъ основаніемъ треугольника. Эта послѣдняя нижняя часть цѣпи должна быть сама собою въ равновѣсіи, ибо шары могутъ свободно принимать опредѣленное взаимное положеніе, совершенно такъ, какъ бы цѣпь была прикрѣплена къ концамъ основанія треугольника, независимо отъ верхней своей части. Пусть шары распредѣлены равномерно, такъ чтобы при каждомъ передвиженіи цѣпи на обѣ стороны треугольника приходилось число шаровъ, пропорціональное длинѣ сторонъ; въ такомъ случаѣ вращеніе цѣпи не произведетъ никакой перемѣны въ относительномъ распредѣленіи ихъ. На каждой сторонѣ треугольника будетъ всегда оставаться число грузовъ, пропорціональное длинѣ стороны, и только отдѣльные шары при каждомъ положеніи могутъ быть не одни и тѣ же на данной сторонѣ. Нижняя свободно висящая часть цѣпи также будетъ сохранять одно и то же число шаровъ. Слѣдовательно, если допустить, что группы шаровъ, соотвѣтствующія обѣмъ сторонамъ и на нихъ лежащія, не были бы въ равновѣсіи, то цѣпь пришла бы въ движеніе въ сторону перегруза. Но какъ, по вышесказанному, всѣ отношенія при этомъ перемѣщеніи и вращеніи цѣпи остаются безъ измѣненія, то имѣлось-бы постоянное основаніе къ сохраненію движенія «и это движеніе не имѣло бы конца, что нелѣпо» (*ce mouvement n'aurait aucune fin, ce qui est absurde*). Слѣд. сдѣланное предположеніе ложно и слѣд. ему противное, т.-е. сохраненіе равновѣсія между сторонами, обремененными пропорціонально длинѣ ихъ, вѣрно.

Приемъ, какъ легко видѣть, въ высшей степени характеристичный и доказываетъ изобрѣтательность. Для насъ онъ въ данную минуту имѣтъ еще и то значеніе, что указываетъ на непрямой методъ

¹ Simon Stevin: Oeuvres mathématiques, перев. Жирара, Лейденъ, 1634, статика, стр. 448, теорема X¹.

доказательства, основывающийся на невозможности вѣчнаго движенія и, какъ кажется, подлежащій обобщенію. Невозможность эта принята у Стѣвина за первоначальный принципъ или за аксіому, и именно въ силу этого имѣетъ особый интересъ по отношенію къ задачѣ нашего труда. Но своевременно будетъ обратиться къ этому принципу только тогда, когда мы перейдемъ къ изслѣдованію новѣйшихъ представленій объ исчерпываніи каждой силы ея дѣйствиємъ и объ вытекающемъ отсюда сохраненіи одного и того же количества силы.

Три силы, приложенныя къ одной точкѣ, находятся въ равновѣсіи, когда онѣ по направленію, смыслу, порядку и величинѣ соотвѣтствуютъ тремъ сторонамъ треугольника. Эта теорема есть ничто иное, какъ иная форма или иной способъ представленія идеи, изображаемой обыкновенно параллелограммомъ силъ; ибо одинъ изъ треугольниковъ, на которые параллелограммъ раздѣляется діагональю составнаго движенія, всегда есть такой треугольникъ, изображающій три силы, находящіяся въ равновѣсіи, если только взять равнодѣйствующую движенія въ противоположномъ смыслѣ.

Вышеуказанное предложеніе не имѣетъ у Стѣвина полной общности, но имѣется лишь нѣкоторое приближеніе къ нему, такъ какъ берется случай, когда двѣ силы образуютъ прямой уголъ. Но подобные намеки совсѣмъ не такъ важны, какъ иногда думали. Отъ работъ Стѣвина, первоначальная форма которыхъ относится уже къ 1605 году, до сознанія вполне общаго принципа сложения силъ еще слишкомъ далеко, ибо этотъ принципъ съ достаточною общностью и съ примѣненіями его къ условіямъ равновѣсія на машинахъ представленъ впервые въ двухъ сочиненіяхъ 1687 года. А потому общій принципъ сложения силъ мы разберемъ при изученіи эпохъ этихъ двухъ произведеній, именно Ньютоновыхъ «Началъ» и Вариньонова «Проекта новой механики». Здѣсь намъ нужно было только упомянуть, что Стѣвиновскія представленія иногда приводились въ связь съ позднѣйшею теоріею и принималось, что вышеуказанное, но не достаточно обще выставленное предложеніе стало основаніемъ позднѣйшаго принципа сложения силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, нѣтъ никакой и надобности въ такомъ взглядѣ, чтобы признать Стѣвиновскіе элементы статики за выдающійся трудъ. Способъ, при помощи котораго этотъ инженеръ и математикъ принца Морица Оранскаго трактовалъ стародавнюю задачу о наклонной плоскости, на которую въ древности напрасно потрачено было столько силъ, уже одинъ можетъ служить достаточнымъ свидѣтельствомъ его гения. Впрочемъ, при изложеніи гидростатическихъ началъ мы ознакомимся и съ другими чертами его статическаго мышленія.

34. Если сравнить способъ, какимъ Стэвинъ приходитъ къ предложению о равновѣсіи на наклонной плоскости, съ соотвѣтствующимъ доказательствомъ Галилея, то найдемъ, что у послѣдняго и самая теорема представлена въ простѣйшемъ видѣ, и сдѣлана попытка свести ее къ началу рычага. Во-первыхъ, что касается концепціи самаго предмета доказательства, то, какъ мы уже видѣли, Стэвинъ сразу предложилъ себѣ задачу, опредѣлить отношеніе равновѣсія на сочетаніи двухъ наклонныхъ плоскостей. Какъ скоро вопросъ былъ рѣшенъ въ самомъ общемъ видѣ, оставалось только одну изъ плоскостей привести въ вертикальное положеніе, и тотчасъ найдено было отношеніе высоты къ длинѣ какъ формула искомаго условія. Галилей, напротивъ того, съ самаго начала принимаетъ за исходный пунктъ простѣйшее предположеніе одной наклонной плоскости и старается даже, какъ мы это усматриваемъ изъ одного мѣста его небольшого сочиненія *Della scienza meccanica*¹, и этотъ случай разсмотрѣть сначала лишь въ частной формѣ. Именно, основаніе того, что Паппусъ (въ 8 книгѣ своихъ коллекцій) безуспѣшно пытался опредѣлить отношеніе силъ на наклонной плоскости, онъ видитъ въ кардинальной ошибкѣ Александрійскаго Математика, будто бы для произведенія движенія на горизонтальной плоскости потребно опредѣленное количество силы. Предположивъ, что достаточно произвольной, хотя и какъ угодно малой силы, если только устранены всѣ возможныя сопротивленія, онъ находитъ для горизонтальной плоскости предѣлъ нуль, а вмѣстѣ съ тѣмъ и одну изъ крайнихъ величинъ непрерывнаго ряда отношеній, въ какихъ должна стоять сила къ грузу при различныхъ наклонахъ плоскости. Другую крайнюю величину, въ такомъ разѣ, даетъ строго-вертикальная плоскость, на которой нужно преодолѣть полный вѣсъ и слѣдовательно полное дѣйствіе тяжести. Увеличеніе дѣйствія тяжести зависитъ, по-этому, отъ непревынаго возрастанія наклона, или, какъ нынѣ принято говорить, оно есть функція этого наклона, т.-е. угла, этотъ наклонъ опредѣляющаго, и притомъ функція, непрерывно измѣняющаяся между нулемъ и единицею. Если Галилей выражался и не въ этомъ родѣ, то приведенное мѣсто все-таки показываетъ, что онъ думалъ именно такъ, и въ своихъ первоначальныхъ соображеніяхъ опирался какъ на принципъ непрерывности, такъ и на указанія, вытекающія изъ разсмотрѣнія обоихъ предѣльныхъ случаевъ. Дальнѣйшее доказательство, которое онъ ведетъ съ помощію принципа рычага, и которое нами уже изложено въ § 27, позволяетъ еще усмотрѣть слѣды перваго исходнаго пункта. Въ самомъ дѣлѣ, послѣдователь-

¹ Т. XI цит. изд. сочиненій, стр. 115.

ное наклоненіе рычажнаго плеча и введеніе неподвижнаго круга указываетъ на стремленіе — удержать въ виду совокупность всѣхъ возможныхъ наклоненій плоскости и сдѣлать ее доступною наглядному созерцанію.

Тому факту, что Галилей при изученіи задачи о наклонной плоскости опирался на начало непрерывности, мы не придавали-бы такого большаго значенія, еслибы это обстоятельство не составляло такого замѣчательнаго контраста съ общимъ способомъ изложенія Стэвина, съ одной стороны, и не служило бы очень раннимъ историческимъ свидѣтельствомъ примѣненія консеквенцій непрерывности, съ другой стороны. Стэвинъ предлагаетъ свои теоремы и доказательства въ прочной, даже, такъ сказать, неподвижной формѣ, оказывающейся въ концѣ концовъ большею частью какъ бы принудительнымъ средствомъ убѣжденія, между тѣмъ какъ Галилей по большей части выставляетъ на видъ самый процессъ мышленія, а связанное, такъ сказать, эластичное развитіе его доказательствъ позволяетъ выступить впередъ наиболѣе естественнымъ основаніямъ познанія, въ ихъ какъ бы произвольно проявляющейся зависимости. Стэвиново доказательство закона наклонной плоскости въ высшей степени оригинально; но Галилеево изложеніе, не смотря на иллюзорную природу главнаго пункта, несравненно поучительнѣе. Хотя въ немъ, какъ мы раньше видѣли, рѣшающее обстоятельство постулируется, вслѣдствіе чего самое доказательство — только кажущееся, тѣмъ не менѣе, развитіе его болѣе способствуетъ уразумѣнію природы предмета, нежели остроумный, но ничѣмъ не мотивированный, пріемъ нидерландскаго математика.

Теперь спрашивается, въ самомъ-ли дѣлѣ Стэвинъ строже доказалъ разсматриваемую теорему, чѣмъ Галилей. Первый считался вплоть до послѣдняго столѣтія открывателемъ начала наклонной плоскости, и для младшаго итальянскаго современника было бы невыгодно, еслибы въ столь существенномъ пунктѣ онъ остался, по остроумію, ниже своего предшественника. Дѣло приметъ еще болѣе подозрительный видъ, если припомнимъ, что уже Леонардо-да-Винчи удалось установить правильный взглядъ даже относительно времени движенія по наклонной плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, доказательство Стэвина подлежитъ изслѣдованію не только какъ остроумный искусственный пріемъ, но и въ отношеніи логической связи его частей и особенно въ отношеніи формы подразумѣваемыхъ въ немъ предположеній. Допущеніе, что свободная часть цѣпи должна быть въ равновѣсіи сама собою, вовсе не такого рода, чтобы могло служить аксіомою, но само нуждается въ доказательствахъ. Какъ бы оно ни было правильно

само по себѣ, но все-таки оно непосредственно не очевидно. Невольно рождается вопросъ—почему. Но какъ скоро имѣется такое требованіе разума—сперва еще обосновать данное представленіе, то это обстоятельство служитъ несомнѣннымъ признакомъ, что мы имѣемъ дѣло вовсе не съ совершенно простою и, слѣдовательно, не съ аксіоматическою истиною. Сверхъ того, Стѣвиновское построеніе доказательства слишкомъ сложно, чтобы его можно было признать идеаломъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположеніе, что части цѣли или группы шаровъ, при передвиженіи, всегда принимаютъ сходное положеніе, приведено въ связь со многими не прямо простыми представленіями, которыя вдобавокъ тѣмъ труднѣе допустить, что здѣсь идетъ рѣчь о заключеніяхъ въ примѣненіи къ механически невозможному положенію вещей. Этотъ непрямой характеръ доказательства, въ силу чего оно принимаетъ видъ приведенія къ нелѣпости, годится лишь въ такихъ случаяхъ, гдѣ механическія невозможности можно пускать въ ходъ à priori. Но это выполнимо только тогда, когда рѣчь идетъ не о дѣйствительно механическомъ, но лишь о математическомъ содержаніи разсматриваемыхъ отношеній. Поэтому такого рода приемы не годятся для специфически механическаго, каковое основывается на началахъ опытныхъ, а не просто на законахъ мышленія и представленія, ибо хотя такіе приемы и предполагаютъ все, что только можетъ соответствовать обычнымъ воззрѣніямъ, но изъ этого не слѣдуетъ, чтобы оно могло дѣйствительно служить основаніемъ доказательствъ.

Въ виду этого, ни у Галилея, ни у Стѣвина мы не встрѣчаемъ удовлетворительнаго доказательства принципа наклонной плоскости, но какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ имѣемъ дѣло лишь съ указаніемъ на законъ или съ нѣкотораго рода толкованіемъ закона. Приведеніе силы къ опредѣленному направленію, т. е. опредѣленіе ея дѣйствія въ предписанномъ направленіи, какъ мы уже изъяснили въ § 25 и 27, есть фундаментальный пунктъ, рѣшеніе котораго равнозначаше съ доказательствомъ принципа наклонной плоскости. Но это ядро дѣла не изъяснено ни у Галилея, ни старѣйшими пріемами Стѣвина. У перваго къ подразумеваемому постулированію главной вещи присоединяется еще осложненіе, возникшее вслѣдствіе примѣненія начала рычага. Впрочемъ, насколько это приведеніе начала наклонной плоскости къ рычагу логически несостоятельно, мы тогда только вполне уяснимъ себѣ, когда познакоимся съ природою и трудностями вполне надежнаго доказательства закона рычага.

35. Теорема о рычагѣ служитъ основаніемъ античной статики, а главнымъ образомъ исходнымъ пунктомъ и первыхъ усилій новаго

времени въ этой наукѣ. Архимедъ являлся въ этомъ отношеніи почти повсемѣстно образцомъ. Даже тамъ, гдѣ наряду съ этимъ вводились и другія точки опоры, все-таки не удалось дать вполне самостоятельнаго вывода закона рычага. Поэтому послѣдній игралъ фундаментальную роль не только, какъ это весьма натурально, рядомъ съ теоремою о наклонной плоскости, но и наряду съ примѣненнымъ у Галилея во всѣхъ направленіяхъ принципомъ виртуальныхъ скоростей. Понятно, что и зачатки воззрѣнія о принципѣ сложенія силъ не могли послужить въ ущербъ самостоятельному характеру начала рычага, ибо даже до настоящаго времени соотношение параллельныхъ силъ остается отношеніемъ, непосредственно не подчиненнымъ началу сложенія силъ. Въ теченіе текущаго столѣтія, а именно по поводу Пуансотовскаго понятія силовой пары, мало-по малу даже выяснилась необходимость предположить особенную и въ самомъ дѣлѣ безъинтересную двойственность принциповъ. Часто высказывавшееся замѣчаніе, что случаи, въ которыхъ законъ рычага даетъ легчайшее средство, являются для принципа сложенія труднѣйшими, имѣетъ глубокое логическое основаніе, но выясненіе его будетъ уместно лишь при изслѣдованіи новыхъ формъ системы механики. Здѣсь мы ограничимся лишь указаніемъ роли, какую законъ рычага и его доказательство играли сами по себѣ какъ отдѣльные исходные пункты статики.

Въ началѣ новаго времени вообще примыкали къ Архимедовскому наслѣдію, и позволяли себѣ, какъ это дѣлали Стэвинъ и Галилей, лишь относительно весьма мало уклоняющіеся приемы, даже собственно лишь маловажныя, служащія лишь для нагляднаго поясненія, измѣненія. Поэтому, дабы быть въ состояніи оцѣнить новѣйшій способъ изложенія, мы должны прежде всего точнѣе изложить ходъ мышленія Архимеда. Уже въ § 4 мы упомянули, что Архимедъ постулируетъ равновѣсіе равноплечаго, обремененнаго равными грузами, рычага. Онъ это дѣлаетъ, вводя въ началѣ первой книги *de aequiponderantibus* (о равновѣсіи плоскостей) фундаментальное положеніе: «равныя тяжести, дѣйствуя въ равныхъ разстояніяхъ, находятся въ равновѣсіи». Четвертое положеніе, несмотря на то, что ему дана форма теоремы, въ сущности есть перифраза того же основнаго предположенія. Но какъ оно служитъ подготовленіемъ къ главному предположенію о рычагѣ, то при критикѣ послѣдняго на него слѣдуетъ обратить вниманіе. Оно гласитъ: «Когда двѣ равныя тяжести имѣютъ не общій центръ тяжести, то центръ тяжести составленнаго изъ этихъ обѣихъ тяжестей груза находится въ срединѣ прямой, соединяющей центры тяжести обѣихъ грузовъ». Въ этой теоремѣ заключается вмѣстѣ съ тѣмъ опре-

дѣленіе центра тяжести произвольнаго числа равныхъ грузовъ, лежащихъ на одной прямой линіи въ равныхъ разстояніяхъ. Онъ всегда находится въ срединѣ между обѣими крайними тяжестями, т.-е. въ срединѣ всей линіи. Это послѣднее представленіе есть именно то, изъ котораго дѣлается окончательное употребленіе при доказательствѣ шестаго предложенія, формулирующаго общій законъ рычага. Во всякомъ случаѣ, ради точности, слѣдуетъ замѣтить, что въ шестомъ предложеніи общій законъ рычага доказывается только для соизмѣримыхъ отношеній между плечами рычага и грузами, а затѣмъ уже, при помощи методовъ истощенія, дѣлается переходъ къ случаю несоизмѣримости. Но этотъ чисто математическій приемъ не имѣетъ никакого спеціально механическаго интереса, и нынѣ въ обычаѣ, на мѣсто особыхъ манипуляцій, для краткости ссылаться на принципъ непрерывности, или же, спеціальнѣе, на логическую необходимость, что возможность неограниченнаго приближенія къ нѣкоторому предѣлу ведетъ за собою, что факты и свойства, имѣющіе мѣсто по отношенію къ безконечно-мало разнящимся отъ предѣла величинамъ, что эти факты и свойства имѣютъ мѣсто и въ предѣлѣ. На этомъ основаніи нѣтъ никакой надобности въ особенномъ разсмотрѣніи того случая, когда плечи рычага, а слѣдовательно и грузы, не имѣютъ общей мѣры.

Припомнимъ смыслъ, въ какомъ обыкновенно говорится объ общемъ законѣ рычага. Неизмѣняемая, т.-е. нерастяжимая и негибкая, твердая линія,—ее можно бы было назвать механически-математическою,—въ одной изъ своихъ точекъ подперта, т.-е., другими словами, поддерживается вертикальною подпоркою. Въ плоскости, образуемой линіею съ направленіемъ подпорки, и параллельно этому направленію, но въ противоположную сторону, приложены въ двухъ произвольныхъ точкахъ силы обратно пропорціональныя своимъ разстояніямъ отъ точки опоры. Въ этомъ случаѣ система находится въ равновѣсіи, т.-е. силы не производятъ никакого вращенія. Какое давленіе или какое натяженіе испытываетъ точка вращенія, это—вопросъ, на который хотя обыкновенно и даетъ отвѣтъ самый законъ рычага, но который лишь тогда не представляетъ никакой трудности, когда съ самаго начала выходятъ изъ понятія о центрѣ тяжести и изъ законовъ его опредѣленія.

Въ самомъ дѣлѣ, Архимедово рѣшеніе дастъ гораздо меньше поводовъ къ возраженіямъ, если припомнимъ, что сиракузскій математикъ всегда имѣлъ въ виду спеціально тяжесть и центры тяжести. Во-первыхъ, онъ беретъ рычагъ въ натуральномъ видѣ, заставляя на него дѣйствовать не силы вообще, но вертикальную тяжесть. Во-вторыхъ, его розысканіе отношеній точки опоры есть ничто иное

какъ выводъ центра тяжести отдѣльныхъ грузовъ, обременяющихъ горизонтальную линію. Первое изъ этихъ обстоятельствъ повело за собою возраженіе со стороны Фермата ¹, что на своемъ рычагѣ Архимедъ имѣлъ дѣло не съ строго параллельными силами, но съ такими двигательными побудами, которые сходятся въ центрѣ земли. Но какъ архимедовское доказательство на отношеніяхъ тяжести нужно понимать лишь такъ, что въ отношеніи къ нимъ формируются извѣстныя соотношенія, то рѣшаетъ само это формирование, но никакъ не выполнѣ специальное и второстепенное свойство этого прототипа. Иное дѣло, еслибы Архимедъ доказалъ кое-что, выходя отъ сходимости; но, скорѣе, онъ доказалъ все, выходя отъ предполагаемой параллельности.

Ходъ мыслей въ разсматриваемомъ доказательствѣ и въ вышеупомянутыхъ подготовленіяхъ къ нему, выполнѣ выяснится, если замѣтимъ, что оно содержитъ лишь рядъ предложеній о положеніи центровъ тяжести грузовъ, обременяющихъ одну и ту-же горизонтальную линію, и притомъ равныхъ между собою грузовъ. Основное предположеніе постулируетъ центръ тяжести двухъ равныхъ грузовъ въ срединѣ прямой, ихъ соединяющей. Упомянутое четвертое предположеніе даетъ болѣе точное понятіе этой идеи, такъ какъ центры тяжести самыхъ грузовъ разсматриваются какъ предѣлы разстоянія, и такимъ образомъ оно вмѣстѣ съ тѣмъ ведетъ къ опредѣленію общаго центра тяжести всего ряда. Если теперь предположить произвольный рядъ равно-тяжелыхъ грузовъ, расположенныхъ въ равныхъ разстояніяхъ на нѣкоторой горизонтальной линіи, то центръ тяжести всей системы находится въ срединѣ линіи, ограничиваемой обоими крайними грузами. Пусть теперь весь рядъ грузовъ раздѣленъ произвольно на двѣ группы и пусть для каждой изъ нихъ опредѣлены соотвѣтственные центры тяжести. Каждая группа можетъ быть какъ угодно измѣнена симметричнымъ перемѣщеніемъ около ея центра тяжести; можно даже эти грузы совершенно стянуть въ центры тяжести каждой группы. Тогда вмѣсто двухъ рядовъ, состоящихъ изъ одинаково-распределенныхъ и равныхъ грузовъ, мы получимъ два груза, приложенные въ обоихъ центрахъ тяжести, и по величинѣ пропорціональные протяженіямъ, какія первоначально занимали на обремененной линіи соединенные на нихъ отдѣльные грузы.

Чтобы не вдаваться во второстепенныя подробности, цѣлесообразно предположить сначала четное число грузовъ. Въ такомъ случаѣ число отрѣзковъ, образовавшихся на линіи, будетъ нечетное, и глав-

¹ Fermat: *Varia opera mathematica*, Tolosae 1679, стр. 142.

ный центръ тяжести, т.-е. центръ тяжести всего ряда совпадаетъ съ серединою средняго отрѣзка. Равнымъ образомъ, и группировку всего удобнѣе взять такую, чтобы каждая группа содержала четное число грузовъ и слѣдовательно нечетное число отрѣзковъ. Тогда центръ тяжести каждой группы будетъ совпадать съ серединою ея средняго отрѣзка, и въ ней должно сосредоточить всѣ ея грузы. Подразумѣваемое предположеніе состоитъ здѣсь въ томъ, что дѣйствіе грузовъ на всю систему нисколько не измѣнится отъ того, что всѣ они будутъ сосредоточены въ ихъ центрѣ тяжести. Вопросъ о взаимномъ положеніи трехъ центровъ тяжести, именно общаго центра тяжести, который предполагается подпертымъ или въ которомъ линія подвѣшена, и центровъ тяжести обѣихъ группъ, — вопросъ этотъ чисто-геометрическій, но, какъ сейчасъ увидимъ, онъ-то и ведетъ къ дѣйствительному выраженію закона рычага. Прежде всего вся линія дѣлится пополамъ, затѣмъ — на двѣ произвольныя части, каждая изъ которыхъ снова дѣлится пополамъ. Обѣ послѣднія точки дѣленія будутъ отстоять отъ первой на разстоянія, обратно пропорціональныя линіямъ, раздѣляемымъ ими пополамъ. Это — чисто геометрическое предложеніе. Но очевидно, что при его помощи тотчасъ же устанавливается, что разстоянія обратно пропорціональны приложеннымъ къ ихъ концамъ грузамъ; ибо эти грузы, какъ наглядно показывало ихъ первоначальное распредѣленіе, относились какъ протяженія, на которыхъ они были расположены. На единичу большее число грузовъ, сравнительно съ числомъ отрѣзковъ, не нарушаетъ указанной пропорціональности, ибо это обстоятельство имѣетъ мѣсто на той и на другой сторонѣ.

36. Вышеприведенное изложеніе показываетъ, что грузы, которые желательно распредѣлить на рычагъ такъ, чтобы они взаимно уравновѣшивались, должны находиться въ разстояніяхъ отъ точки опоры, обратно пропорціональныхъ ихъ величинамъ. Конечно, Архимедъ не выяснилъ ядра своего доказательства съ такою отчетливостію, какъ это сдѣлали мы. Можетъ даже показаться, что онъ избралъ въ нѣкоторомъ отношеніи обратный путь. Но при ближайшемъ разсмотрѣніи обнаружится, что всѣ прочія обстоятельства его доказательства лишь второстепенныя, и что прямой выводъ главнаго предложенія, въ сущности, въ самомъ дѣлѣ имѣетъ ту форму, подъ которой мы его представили. Въ самомъ дѣлѣ, Архимедъ выходитъ изъ тѣмы доказательства, т.-е. изъ уже формулированнаго предложенія, и потому долженъ данные грузы сначала разложить на равныя части. Затѣмъ эти части распредѣляются около центровъ тяжестей цѣлыхъ грузовъ по обѣимъ сторонамъ въ равныхъ между собою разстояніяхъ на самомъ рычагѣ и его продолженіяхъ такъ, что обра-

зуютъ по обѣимъ сторонамъ точки опоры одинаково распредѣленные ряды. Возможность такой аранжировки геометрически основывается на томъ обстоятельстве, что согласно съ предположеніемъ, грузы относятся обратно пропорціонально ихъ разстояніямъ отъ точки опоры. Такимъ образомъ, распредѣленіе дано и остается только доказать, что дѣйствительно будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе. Это Архимедъ и доказываетъ, показывая, что при данномъ распредѣленіи вся система, уже въ силу основнаго предположенія и вышеупомянутаго четвертаго предположенія, очевидно, находится въ равновѣсіи, и что замѣнъ этого распредѣленія можно подставить первоначальную систему, послужившую исходнымъ пунктомъ какъ предметъ доказательства. Въ этой подстановкѣ и лежитъ нервъ доказательства, а потому выше мы и приложили особенное стараніе къ выясненію этого пункта.

Для уясненія дѣла нужно еще замѣтить, что при рассматриваемомъ распредѣленіи каждое плечо рычага должно продолжить на разстояніе равное другому, такъ—что длина всего рычага удвоится. Если взять, напр., какъ дѣлаетъ Архимедъ, возможно простѣйшее отношеніе, т.-е. случай, когда одно плечо вдвое больше другаго, то получимъ три отрѣзка, а съ ихъ продолженіями шесть, такъ что большій грузъ нужно будетъ разложить на четыре, а меньшій на двѣ части. Затѣмъ, переносятъ эти части грузовъ въ середины отрѣзковъ. Этимъ путемъ осуществляется равномѣрное распредѣленіе на шести отрѣзкахъ, точка же опоры находится въ срединѣ, отдѣляя одинъ отъ другаго средніе отрѣзки, причемъ два ближайшіе груза находятся въ разстояніяхъ отъ точки опоры, равныхъ половинѣ отрѣзка.

Классичность архимедовскаго доказательства правила рычага доселѣ постоянно оспаривалась указаніями на нѣкоторые недостатки. До самаго новѣйшаго времени не упрочилось убѣжденіе, чтобы это доказательство было вполне надежно и не имѣло пробѣловъ. Главное сомнѣніе, какъ уже сказано, касается обстоятельства, имѣющаго самое рѣшительное значеніе, а именно замѣщенія отдѣльныхъ грузовъ совокупными и наоборотъ. Но всего менѣе прямо очевидно, чтобы такое замѣщеніе было позволительно даже тогда, когда размѣщаемые грузы, принадлежащіе къ одной группѣ, раздѣляются точкою опоры пополамъ. Именно въ этомъ случаѣ вполне очевидно, что все дѣло въ томъ, чтобы рассматривать особыя группы грузовъ прежде всего безъ всякаго отношенія къ рычагу, такъ, какъ бы вовсе не было точки опоры и какъ бы линія рычага имѣла назначеніе опредѣлять только положеніе и порядокъ и представлять соединеніе группъ, во всѣхъ остальныхъ отношеніяхъ свободныхъ, въ одно цѣлое. Такимъ

образомъ станеть вполне неоспорима законность подразумеваемаго допущенія, что дѣйствіе грузовъ остается то же самое, вообразимъ-ли, что они соединены въ ихъ центрѣ тяжести, или сгруппированы около него такъ, что онъ остается неизмѣннымъ. Еслибъ точка приложенія какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ оставалась бы та же самая, а не разлагалась бы скорѣе въ цѣлый рядъ точекъ приложеній, то измѣненіе формы грузовъ не составляло бы ни малѣйшаго затрудненія; ибо предположеніе, что грузъ всею своею тяжестью дѣйствуетъ въ точкѣ привѣса, заключается уже въ основномъ представленіи, какое долженъ былъ составить себѣ Архимедъ о величинѣ тяжести и вообще о дѣйствіи вѣса, равно какъ и объ ихъ мѣрѣ. Такимъ образомъ въ этомъ отношеніи нечего было бы возразить, если, конечно, не затрогивать вопроса о природѣ тяжести сообразно съ новыми воззрѣніями, и не пускаться въ изслѣдованіе вліянія формы тѣлъ. Но это было бы въ данномъ случаѣ тѣмъ менѣе уместно, что задача рычага вовсе не касается особаго рода силъ, но предполагаетъ вообще лишь двигательныя побужденія или силовыя дѣйствія въ данномъ направленіи въ данныхъ точкахъ приложенія.

Въ виду всего сказаннаго, главный результатъ изложенія и изслѣдованія архимедовскаго доказательства будетъ состоять въ признаніи совершенной логичности за его математическою стороною и характера въ высшей степени остроумной комбинаціи, между тѣмъ какъ чисто механическій элементъ его оставляетъ желать еще многого. Кромѣ правомочнаго допущенія равновѣсія равныхъ грузовъ на равноплечемъ рычагѣ, играетъ рѣшительную роль и менѣе ясный принципъ замѣщенія. Въ силу послѣдняго, который прямо не постулируется, но подразумевается при доказательствѣ, должна-бы была получиться возможность на мѣсто грузовъ во всѣхъ комбинаціяхъ брать сосредоточенную въ центрѣ тяжести массу ихъ. Но эта идея не настолько ясна сама по себѣ, чтобы могла служить въ качествѣ недоказаннаго сродства для вывода закона рычага.

Такъ какъ до сего времени всѣ попытки дать болѣе строгую форму архимедовскому доказательству не имѣли значительнаго успѣха, то является подозрѣніе, что рассматриваемый приѣмъ вывода механикѣ, какъ наукѣ, по существу своему, основывающейся на эмпирическихъ аксіомахъ, несвойственъ. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя имѣть никакого чисто апріорнаго представленія о соединеніяхъ и раздѣленіяхъ грузовъ и о возможности упомянутаго замѣщенія. Потому, всякій синтезъ чистаго мышленія наталкивается на каждомъ шагѣ на затрудненія. Онъ долженъ доискиваться того, чего нельзя найти при помощи чисто математическаго представленія, и что во взятой на самомъ дѣлѣ

эмпирической основной аксіомѣ и не содержится, и при помощи ея не можетъ быть и выведено. Допущеніе, что равные грузы, равно отстоящіе отъ точки опоры, находятся въ равновѣсіи, ничего не говоритъ о замѣщеніи двухъ грузовъ или даже группы грузовъ третьимъ, да къ тому же съ замѣною нѣсколькихъ точекъ приложенія одною или наоборотъ одной точки приложенія нѣсколькими. Очевидно, недостаточно было бы показать, что различные грузы всею суммою своихъ параллельныхъ движущихъ силъ оказываютъ на неподвижную опору такое же дѣйствіе, какъ соединенные въ центрѣ тяжести грузы. Въ самомъ дѣлѣ, рычагъ есть вращающаяся система, и, очевидно, этимъ дѣйствіе частныхъ грузовъ усложняется на столько, что упомянутое сомнѣніе насчетъ сказанныхъ замѣщеній сохраняетъ свою силу при всѣхъ обстоятельствахъ. Поэтому, разрѣшенія затрудненій архимедовскаго доказательства, признанныхъ между прочимъ и Гюйгенсомъ ¹, по всѣмъ вѣроятностямъ, т. е. если нашъ взглядъ на природу взаимной зависимости механическихъ истинъ правиленъ, слѣдуетъ искать не въ усовершенствованіи этого античнаго доказательства, но въ замѣнѣ его новымъ способомъ доказательства. Послѣдній, естественно, долженъ сводиться къ движеніямъ и соотвѣтствовать смыслу, въ какомъ примѣняется или можетъ быть примѣняемъ въ различныхъ направленіяхъ принципъ виртуальныхъ скоростей, въ виду его аксіоматической составной части.

37. Такъ какъ при посредствѣ все-таки весьма строгаго и остроумнаго архимедовскаго доказательства закона рычага мы убѣдились въ трудностяхъ, съ какими связано мысленное сплѣненіе специфически механическихъ фактовъ и отношеній, то уже здѣсь для пониманія дальнѣйшаго историческаго развитія не бесполезны были бы кое-какія замѣчанія о допущеніяхъ возможности вполнѣ удовлетворительныхъ механическихъ заключеній. Если должна имѣть мѣсто серьезная дедукція, то эмпирическія аксіомы неизбѣжны; ибо изъ чистой математики, безъ привнесенія чего-либо инаго, можетъ возникнуть опять только математическое, но никоимъ образомъ не что-либо специфически механическое. Послѣднія начала или аксіомы суть лишь результаты разложенія болѣе сложныхъ отношеній, а общій родъ послѣднихъ имѣетъ рѣшающее значеніе и въ отношеніи природы первыхъ. Должна существовать извѣстная однородность между истинами и лежащими въ основаніи ихъ аксіомами.

Другой очень важный пунктъ для строгой обработки системы механики есть формованіе исходныхъ понятій. Чѣмъ они отвлеченнѣе, тѣмъ легче вполнѣ овладѣть ими. Но въ высшей степени не-

¹ Demonstratio aequilibrii bilancis въ Opera varia.

обходимо, чтобы механическія понятія, изъ коихъ желаемъ вывести заключенія, не содержали бы ничего, что не было бы совершенно очевидно. Поэтому опытные элементы должно формулировать такъ, чтобы они являлись представленіями, по крайней мѣрѣ, формально вполне доступными уму. Такъ напр. идея о двигательномъ побужденіи или о движущей причинѣ, дѣйствующей на точку, формально вполне ясна, если только при этомъ не мыслится ничего, кромѣ допущенія, что существуетъ основаніе, въ силу котораго должно послѣдовать опредѣленное явленіе движенія. Это должно можетъ быть принято какъ бы узаконеніемъ мышленія и съ такимъ понятіемъ можно оперировать какъ съ чисто математическимъ понятіемъ. При этомъ, конечно, не подлежитъ обсужденію образъ причины въ частномъ случаѣ, и форма, въ какой такія причины существуютъ, какъ напр. естественный законъ инерціи, принадлежитъ области матеріальныхъ и эмпирическихъ началъ. Напротивъ, съ помощью основныхъ понятій, приведенныхъ въ упомянутую форму, можно возвести замкнутую въ себѣ и ни въ какихъ эмпирическихъ опорахъ не нуждающуюся систему. Въ самомъ дѣлѣ, всякій опытный основной законъ пригоденъ фигурировать лишь какъ простая посылка, при помощи которой умъ работаетъ какъ при помощи простой возможности. При такомъ направленіи достижима во всѣхъ отношеніяхъ строжайшая логичность, и уже можно нѣкоторымъ образомъ предвидѣть, на какомъ пути слѣдуетъ искать идеаль логически безупречной системы механики.

Послѣ этого нельзя ни на минуту усомниться въ томъ, что архимедово понятіе о рычагѣ конципировано недостаточно отвлеченно. Для строгой дедукціи необходимо знать, какъ мы представляемъ себѣ связанными два груза и ихъ дѣйствія. Далѣе мы должны знать, какъ сила или дѣйствіе передается черезъ посредство матеріальной соединительной линіи, или, по крайней мѣрѣ, должно передаваться. Въ этомъ отношеніи мы должны руководиться, по крайней мѣрѣ, предположеніемъ, если намъ нѣтъ надобности заботиться въ этомъ случаѣ о томъ особомъ способѣ, какимъ фактически въ природѣ передаются силовыя отношенія на нѣкоторомъ рычагѣ тѣми или другими напряженіями. Слѣдовательно, по меньшей мѣрѣ, неизбѣжно понятіе о неизмѣняемой во взаимныхъ отношеніяхъ своихъ частей линіи, и по отношенію къ такой линіи должно быть еще предположено свойство, что въ ней каждое двигательное побужденіе, имѣющее мѣсто въ какой-либо ея точкѣ, распространяется и на всѣ другія точки, хотя и по образу, который еще подлежитъ опредѣленію. Если къ такой линіи будутъ приложены три силы подъ прямымъ угломъ къ ней и не всѣ въ одну сторону, то о состояніи линіи можно

кое-что заключить по мѣровымъ отношеніямъ силъ, комбинируя движущія побужденія сообразно съ величиною двигателяго дѣйствія, возможнаго для каждаго такого побужденія.

Здѣсь не мѣсто тотчасъ же входить въ подробности о примѣрѣ, который, если его изслѣдовать всесторонне, повелъ бы даже къ Пуансотовской парѣ силъ. Наше вниманіе устремлено было только на то, чтобы уже на этомъ мѣстѣ дать замѣтить важность установленія, безъ всякихъ пробѣловъ, всѣхъ исходныхъ понятій и вмѣстѣ съ тѣмъ указать на то, какъ неудовлетворительны въ этомъ отношеніи не только архимедово доказательство правила рычага, но и положенный въ основаніе его постулатъ. Даже только въ виду этого, не говоря уже о соединеніи и раздѣленіи грузовъ, античный анализъ закона рычага далъ бы поводъ къ дальнѣйшимъ претензіямъ.

38. Внѣшнія преобразованія архимедовскаго доказательства правила рычага, предпріятыя Стэвиномъ и Галилеемъ, служатъ съ одной стороны къ наглядному уясненію дѣла, но съ другой стороны еще болѣе выставляютъ слабыя стороны чисто механическихъ умозаключеній. Сказанныя измѣненія, существеннымъ образомъ, состояли въ замѣнѣ распределенныхъ въ рядъ грузовъ двумя, имѣющими форму параллелопипедовъ, брусками, такъ что оба груза можно было представить вертикальнымъ подвѣшиваніемъ этихъ брусьевъ. Если этимъ брусьямъ дать такую длину, чтобы, будучи подвѣшены въ своихъ среднихъ точкахъ, они выходили за линію рычажнаго плеча на длину другаго плеча, то каждый изъ нихъ будетъ имѣть двойную длину того плеча, къ которому подвѣшенъ другой брусъ и оба займутъ собою все протяженіе рычага и его продолженій, совершенно аналогично архимедовскимъ грузамъ. Вся разница въ томъ, что въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ сплошною, непрерывною, связною массою. Срединя всего протяженія, занимаемаго обоими горизонтально подвѣшенными и такимъ образомъ соединенными брусьями, есть точка опоры, и потому все доказательство правила рычага сводится къ представленію, что вертикальное подвѣшиваніе можно замѣнить горизонтальнымъ.

У Галилея имѣются два, въ сущности, одинаковыя изложенія доказательства закона рычага, именно старѣйшее въ посмертномъ сочиненіи *Della scienza meccanica* ¹ и новое начертаніе въ главномъ трактатѣ по механикѣ — въ *Discorsi* ². Въ послѣднемъ данъ совершенно прямой выводъ закона рычага. Призма подвѣшивается обоими своими концами къ равной ей горизонтальной линіи, а по-

¹ Т. XI цит. изд. соч., стр. 92 и слѣд.

² Ibid Т. XIII, день 2-й, стр. 113.

слѣдняя, т.-е. вся система, привѣшенная за средину, приводится въ равновѣсіе. Здѣсь въ основаніе положено сформулированное Галилеемъ архимедовское предположеніе, что равные грузы относительно лежащаго въ срединѣ центра тяжести находятся въ равновѣсіи, „ибо нѣтъ основанія къ наклоненію въ ту или другую сторону“¹. Затѣмъ, призма разрѣзывается на произвольныя, но неравныя части и, для сохраненія равновѣсія, въ мѣстѣ разрѣза соединяется нитью съ линіей подвѣса. Затѣмъ, каждая изъ неравныхъ частей подвѣшивается только въ своей срединѣ, а на концахъ остается свободою. Этимъ все и кончается: искомое отношеніе равновѣсія на рычагѣ найдено; ибо каждое изъ разстояній обѣихъ новыхъ точекъ подвѣса отъ средней точки опоры линіи вдвое меньше призмы, подвѣшенной съ другой стороны. Слѣдовательно, въ построенномъ такимъ образомъ состояніи равновѣсія первоначальной горизонтальной линіи грузы относятся между собою обратно пропорціонально ихъ разстояніямъ отъ точки опоры.

Сомнѣнія, невольно возникающія въ отношеніи этого Галилееваго доказательства, подобно тому какъ и въ отношеніи Архимедоваго, едва-ли нуждаются въ особомъ изъясненіи. Но къ Галилеевскому доказательству присоединяется еще одно, свойственное ему, затрудненіе. Именно, въ немъ обнаруживается всего яснѣе, что перемѣна способовъ подвѣшиванія имѣетъ, или, скорѣе, должна имѣть рѣшительное значеніе и по существу своему—доказательное. Разрѣзанная призма, очевидно, должна быть подвѣшена въ мѣстѣ разрѣза вдвойнѣ, т. е. по крайней мѣрѣ нитью съ двумя концами. Чтобы ясно представить себѣ дѣйствіе слѣдующаго затѣмъ освобожденія каждаго куска призмы у его обѣихъ концовъ, даже необходимо предположить двѣ отдѣльныя нити, посредствомъ которыхъ подвѣшиваются обѣ совершенно разъединенныя части въ мѣстѣ разрѣза. Но вполнѣ очевидно, что изслѣдованіе измѣненій, являющихся результатомъ этихъ преобразованій и введенія точекъ приложенія и дѣйствія, вовсе не есть доказательство правила рычага, ибо для сужденія объ этихъ специальныхъ измѣненіяхъ правило рычага должно уже быть извѣстно. Совсѣмъ не очевидно аксіоматически, что оба куска призмы должны дѣйствовать на линію подвѣшиванія такъ же точно, какъ и цѣлая призма. Точно также совсѣмъ не самопонятно, что освобожденіе концовъ каждаго куска и подвѣшиваніе его за средину остаются безъ всякихъ послѣдствій для общихъ условій равновѣсія. Итакъ, всматриваясь ближе, мы замѣчаемъ, что и у Галилея замѣна другъ другомъ дѣй-

¹ Ibid. Т. XI, стр. 91.

ствій изъ центра тяжести и изъ другихъ точекъ приложенія играетъ неподобающую роль и даже въ этомъ новомъ порядкѣ выступаетъ еще очевиднѣе, чѣмъ у Архимеда. Все-же слѣдуетъ признать, что по крайней мѣрѣ способъ подвѣшиванія цѣлой призмы не таковъ, чтобы каждую часть ея должно было разсматривать какъ приложенную къ твердой линіи подвѣса. Лишь такое представленіе довершило бы аналогію съ архимедовскими грузами, такъ какъ на мѣсто ряда отдѣльныхъ точекъ приложенія выступила бы непрерывная линія. Но этакая форма, которая сдѣлала бы заключенія еще сложнѣе и еще болѣе затемнила бы дѣло, — съ счастіемъ, въ Галилеевскомъ изложеніи устранена.

Если припомнить математическій и чисто механическій элементы въ доказательствѣ закона рычага, то значеніе перваго и притягательное дѣйствіе, какое архимедовская концепція его производила на позднѣйшіе умы, станутъ вполне очевидны. Этимъ математическимъ элементомъ пользовался и Галилей; но и онъ, понятно, не могъ наполнить этихъ рамокъ удовлетворительными механическими представленіями. Какъ мы ранѣе заявили, мы не усматриваемъ въ этомъ обстоятельствѣ никакихъ индивидуальныхъ недостатковъ той или другой частной методы, но видимъ въ немъ слѣдствіе всеобщей необходимости. Совершенно невозможно сдѣлать понятными статическія основныя отношенія, а слѣдовательно и законъ рычага, не сводя ихъ на двигательныя побужденія. Самъ Галилей невольно свидѣтельствуетъ объ этомъ, присовокупляя къ аксіоматическому началу рычага вышеприведенное разъясненіе, что нѣтъ никакого основанія, почему бы равные грузы въ отношеніи къ лежащему въ срединѣ между ними центру тяжести должны были наклоняться скорѣе въ одну, чѣмъ въ другую сторону изъ предполагаемаго своего положенія.

39. Правило рычага въ Галилеевскомъ изложеніи имѣетъ значеніе вполне самостоятельнаго исходнаго пункта механики. Тѣмъ не менѣе и оно, какъ и другія болѣе простыя основныя отношенія статики, объясняется изъ начала виртуальныхъ скоростей. Виртуальная, т.-е. просто возможная отношенія движенія въ статическихъ комбинаціяхъ считаются у него даже болѣе глубокими основаніями познанія. Такого рода стремленіе, имѣющее цѣлью возможно шире распространить значеніе этого главнаго положенія, которое впослѣдствіи ради краткости названо будетъ началомъ виртуальныхъ скоростей, очевидно, свидѣтельствуетъ о строгости и натуральности Галилеевскаго образа мысленія.

Если въ предпріятіи Лагранжа — свести всю механику къ принципу виртуальныхъ скоростей, выдерживаетъ критику только нѣ-

которая, хотя и значительная, часть, то Галилей имѣетъ всего болѣе правъ считаться первѣйшимъ и настоящимъ основателемъ этого способа пониманія внутренней связи явленій. О болѣе раннихъ слѣдахъ виртуальнаго принципа у Леонардо-да-Винчи и Гвидо Убальди мы уже говорили въ §§ 10 и 12. У Галилея этотъ принципъ пушенъ въ ходъ, хотя и не по имени, за то по существу дѣла, во всѣхъ направленіяхъ. Онъ многократно примѣняется во всемъ сочиненіи *Della scienza messapica* къ различнымъ простымъ силамъ, кромѣ того, и предпочтительно, въ гидростатическихъ изысканіяхъ трактата о плавающихъ тѣлахъ (*Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua etc.*), а впрочемъ и въ другихъ трудахъ. Можно даже сказать, что примѣненіе этого принципа, получившаго всеобщее признаніе и сдѣлавшагося знаменитымъ лишь относительно гораздо позднѣе, составляло особенную характерную черту Галилеевскихъ натуральныхъ способовъ представленія.

Нынѣ сказанное начало формулируютъ въ такомъ видѣ, что оно является довольно сложнымъ предложеніемъ, рассчитаннымъ на разнообразныя послылки. Натурально, въ этомъ видѣ оно — всего менѣе аксіома, ибо постиженіе его требуетъ болѣе или менѣе обширнаго доказательства. При первомъ появленіи шире хватающихъ примѣненій этого, еще технически не обозначеннаго, начала, конечно, еще и рѣчи не было о такомъ сложномъ предложеніи. Это было скорѣе нѣчто дѣйствительно принципиальное и аксіоматическое и какъ таковое оно какъ бы прорвалось на свѣтъ.

Въ послѣдней фундаментальной формѣ, т.-е. какъ аксіоматическое ядро, принципъ этотъ находится въ тѣснѣйшей связи съ Галилеевскими представленіями о роли скорости въ количественномъ опредѣленіи силъ. Виртуальная, т.-е. возможная скорость или, другими словами, та скорость, съ какою могло бы послѣдовать движеніе въ случаѣ нарушенія равновѣсія, сообразно съ неизмѣняемыми и съ переменными отношеніями системы, есть въ высшей степени важное понятіе, позволяющее намъ разсматривать статическія отношенія какъ предѣлы, а съ тѣмъ вмѣстѣ и какъ слѣдствія двигательныхъ отношеній. Благодаря этому способу представленія, покоющіяся и скрытыя отношенія статики необходимо должны выступить въ явныхъ пропорціяхъ, и въ границахъ возможныхъ движеній и ихъ относительныхъ скоростей раскрыть то, что въ состояніи покоя не могло быть непосредственно видимо. Въ особенности, вся совокупность элементовъ механическаго распорядка или системы связей, къ которой приложены силы, только тогда и станетъ понятна въ своемъ, опредѣляющемъ отношеніи, дѣйствиіи, когда будутъ дознаны движенія, которыя она позволяла бы дѣлать точкамъ приложенія силъ

въ каждомъ случаѣ, а слѣдовательно и въ случаѣ равновѣсія. Отношенія этихъ возможныхъ движеній, для одного и того же элемента времени, т.-е. относительная скорости, если отвлечься отъ всѣхъ приложенныхъ силъ, представляютъ статическое дѣйствіе самой системы связей и какъ-бы внутреннія силовыя опредѣленія самаго арранжамента.

Но было бы ошибочно связывать существенное содержаніе виртуальнаго начала съ предположеніемъ, что въ основаніи его лежитъ неизмѣняемая система постоянныхъ и переменныхъ элементовъ связи. Впрочемъ, наличность подобной системы была исходнымъ пунктомъ изобрѣтенія и подтвержденія этого начала. Между тѣмъ, уже современное всеобщее примѣненіе принципа доказываетъ, что обычная концепція понятія системы связей не полагаетъ никакихъ ограниченій примѣненію этого основнаго начала. Для трехъ силъ, дѣйствующихъ на точку, точка эта образуетъ связь и въ болѣе широкомъ смыслѣ слова систему. или, по крайней мѣрѣ, элементъ, который на самомъ дѣлѣ приводитъ эти силы во взаимную связь и слѣдовательно соединяетъ ихъ въ систему. При такомъ широкомъ пониманіи, даже не существуетъ никакихъ силовыхъ комбинацій, а потому и никакихъ статическихъ вопросовъ, при которыхъ не предполагалось бы какой-либо системной связи. Итакъ, уже съ этой точки зрѣнія виртуальный принципъ распространялся бы на всю механику.

Мы должны были уже здѣсь выступить съ нѣкоторыми соображеніями относительно характера всеобщности, связаннаго съ виртуальнымъ принципомъ, дабы показать представленія Галилея въ полномъ ихъ объемѣ и во всемъ ихъ значеніи. Теперь намъ слѣдуетъ указать на частныхъ случаяхъ, въ какомъ смыслѣ и какимъ образомъ начало виртуальныхъ скоростей примѣняется у Галилея.

40. Въ наиболѣе простой формѣ виртуальный принципъ является въ случаѣ рычага. Достойно замѣчанія, что даже простой случай равноплечаго, обремененнаго равными грузами, рычага Галилей старается сдѣлать понятнѣе, обращаясь къ возможнымъ движеніямъ. Въ выше упомянутомъ трактатѣ о плавающихъ тѣлахъ ¹, въ которомъ онъ хочетъ слѣдовать иному, болѣе непосредственному методу, чѣмъ Архимедъ, онъ приводитъ вѣсы какъ первый примѣръ того принципа, что равные грузы при равныхъ скоростяхъ представляютъ равные моменты или дѣйствія. Уже ранѣе упомянутая идея о томъ, что нѣтъ никакого основанія къ отклоненію скорѣе въ одну сторону чѣмъ въ другую и слѣдовательно въ какую бы

¹ Т. XII цит. изд. стр. 15.

то ни было сторону, сводится здѣсь даже еще къ равенству возможныхъ движеній и скоростей конечныхъ точекъ вѣсовъ. Такимъ образомъ выясняется начало: «равные абсолютные грузы, движущіеся съ одинаковою скоростью, имѣютъ равныя силы и равные моменты при своемъ дѣйствіи».¹ Затѣмъ сюда примыкаетъ, какъ второй принципъ, положеніе, что при неравныхъ скоростяхъ эти послѣднія служатъ мѣрою отношенія силъ, и неравноплечій рычагъ является здѣсь главнымъ примѣромъ. Абсолютные грузы, какъ мы уже замѣтили въ § 19, даютъ простые моменты, а потому возможные скорости приводятся съ своими числовыми отношеніями какъ множители. На неравноплечемъ рычагѣ элементы дугъ, описываемые одновременно обоими плечами, относятся какъ самыя плечи, и какъ такимъ образомъ отношеніе скоростей возможныхъ движеній пропорціонально плечамъ рычага, то простые моменты грузовъ должны уравнивать это отношеніе обратною пропорціональностью. Только въ томъ случаѣ, когда это имѣетъ мѣсто, и возможно равновѣсіе; ибо моменты, которые на обѣихъ сторонахъ должны быть равны, состояются изъ простой тяжести и возможныхъ скоростей. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что для сужденія о равновѣсіи совѣмъ не требуется знанія абсолютныхъ скоростей, а достаточно знать отношенія скоростей. Въ самомъ дѣлѣ, если представить себѣ рычагъ совершенно отвѣченно, и замѣнить, на примѣръ, грузы пружинами различной упругости, то для опредѣленія виртуальныхъ отношеній совершенно безразлично, какова будетъ абсолютная скорость, съ какою приложенныя силы могли бы дѣйствовать при нарушеніи равновѣсія или сами по себѣ при свободномъ дѣйствіи.

Если даже равноплечій рычагъ, обремененный равными грузами, можетъ быть глубже разъясненъ при помощи виртуальнаго начала, то слѣдуетъ признать, что это начало допускаетъ большее углубленіе воззрѣній, чѣмъ всякое другое, и что было бы логически не позволительно предложеніе о равноплечемъ и равными грузами обремененномъ рычагѣ все еще считать дѣйствительною аксіомою. То, что допускаетъ дальнѣйшее разложеніе и обоснованіе, даже не можетъ быть аксіомою. Поэтому, согласно съ пріемомъ, который Галилей уже въ гидростатической работѣ 1612 г. вполнѣ сознательно противопоставлялъ Архимедовскому, начало это слѣдуетъ считать фундаментальнѣйшимъ, всего непосредственнѣе вытекающимъ изъ простаго понятія о силѣ и ея измѣреніи. Это начало, конечно, ограничивается требованіемъ, чтобы силы давали въ суммѣ ноль,

¹ Ibid. стр. 14.

если онѣ должны быть въ равновѣсіи. При этомъ, какъ видно, дѣло идетъ не только объ ихъ абсолютной величинѣ, но и о направленіи, или вообще о разницѣ ихъ направленій. Поэтому, для того, чтобы можно было виртуальное начало примѣнять вообще, не достаточно, какъ въ случаѣ параллельныхъ силъ на рычагѣ, знать слѣдствія прямо противоположнаго направленія силового дѣйствія или виртуальнаго движенія, но нужно также умѣть представлять и слѣдствія комбинаціи другихъ какихъ угодно разницъ направленій. На предполагаемомъ рычагѣ вращенію одного плеча соотвѣтствуетъ вращеніе другаго въ прямо противоположномъ смыслѣ, и соотвѣтствующія обоимъ возможнымъ движеніямъ касательныя надлежитъ проводить такъ, чтобы онѣ образовали между собою уголъ, равный двумъ прямымъ. Этотъ способъ воззрѣнія ясно показываетъ, что случай прямо противоположнаго направленія силъ представляетъ только частный видъ вообще возможныхъ, обнимающихъ всякія положенія, разницъ ихъ направленій. Отсюда слѣдуетъ, что виртуальный принципъ, безъ сочетанія его съ другими началами, не можетъ дать никакихъ результатовъ, и что именно начало редукціи силы къ опредѣленному направленію, а вмѣстѣ съ этимъ и параллелограммъ силъ является необходимымъ вспомогательнымъ средствомъ. Чтобы сдѣлать виртуальное начало достаточнымъ средствомъ дедукціи, по меньшей мѣрѣ, необходимо было бы съ самаго начала расширить его настолько, чтобы оно давало ясныя, въ качествѣ аксіомъ пригодныя положенія не только о дѣйствіи виртуальныхъ скоростей, но и о дѣйствіи виртуальныхъ направленій силового проявленія. Но о выполненіи этого требованія ни у Галилея, ни раньше не находимъ сколько-нибудь ясныхъ слѣдовъ, если только не считать таковыми приведеніе закона наклонной плоскости къ виртуальному принципу, или если не смотрѣть на новое болѣе сложное пониманіе этого начала какъ на свидѣтельство признанія аксіоматической роли за различіемъ въ направленіяхъ. Но какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ еще многого не хватаетъ для того, чтобы произвольное признаніе или привнесеніе вліянія разницы направленій получило форму настоящаго принципа редукціи направленій и—какъ таковой—ясно было установлено.

41. Въ собственно статической работѣ Галилея, правда, посмертной и представляющей очень раннюю разработку завѣщанныхъ имъ знаній, виртуальное начало играетъ лишь второстепенную роль, хотя оно и примѣняется здѣсь въ самыхъ разнообразныхъ направленіяхъ. Такъ наприм. объясненіе закона рычага приведено тамъ лишь какъ второй, равнымъ образомъ возможный способъ изслѣдованія подъ заглавіемъ «alcuni avvertimenti circa le cose dette», т.-е.

подъ рубрикою дополнительныхъ примѣчаній ¹, и этому новому способу воззрѣнія отнюдь не придается здѣсь такого значенія, какъ въ работѣ о плавающихъ тѣлахъ. На этомъ основаніи мы можемъ допустить, что хотя Галилей и отдавалъ предпочтеніе виртуальному принципу, какъ наиболѣе ясному и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе основательному средству истолкованія, но что сила традиціи, а также, можетъ быть, и трудности логически строгаго проведенія его не позволяли—этотъ болѣе проникательный и болѣе натуральный способъ обоснованія всюду ставить на первое мѣсто. Напротивъ, собственное творческое мышленіе Галилея едва-ли слѣдовало иному пути, а не тому, какой виртуальное начало въ Статикѣ само собою указываетъ каждому самостоятельно двигающемуся уму. Вѣрнѣйшимъ признакомъ такого значенія разсматриваемаго начала служить тотъ фактъ, что оно непосредственно вытекаетъ изъ правильнаго понятія о величинѣ силы, и что оно существенно основывается на идеѣ, въ силу которой въ обоихъ факторахъ силы, именно въ массѣ и скорости, одинъ частію могъ бы быть замѣненъ другимъ. На такую компенсацію даже прямо указано въ только что приведенномъ мѣстѣ.

Нынѣ начало виртуальныхъ скоростей обыкновенно формулируютъ въ такомъ родѣ, что сравниваютъ не самыя возможныя движенія и скорости, а ихъ ортогональныя проэкціи на свободное направленіе приложенныхъ силъ. На сколько такое пониманіе правомочно, если смотрѣть только на результатъ, на столько же оно мало соотвѣтствуетъ натуральному ходу мышленія. Въ случаѣ равновѣсія на наклонной плоскости обнаруживается совершенно ясно, какова должна быть форма натурального способа представленія. То, что здѣсь какъ-бы преломляется по заданному наклонному направленію возможнаго, т.-е. виртуальнаго пути и соотвѣтственно этому направленію редуцируется, есть сила отвѣсно дѣйствующей тяжести. Дѣйствіе ея вдоль наклоннаго направленія выражается произведеніемъ ея на косинусъ угла, составляемаго обоими направленіями, или для даннаго вертикальнаго отрѣзка соотвѣтствующею линіею косинуса на самой плоскости. А по правилу виртуальнаго начала предметомъ редукціи дѣлается скорость на наклонной плоскости, причемъ величину ея приводятъ къ вертикальному направленію умноженіемъ на тотъ же самый косинусъ, т.-е. опредѣляется та скорость, которая существуетъ въ вертикальномъ направленіи какъ проэкціонная скорость. Но эта послѣдняя проэкціонная скорость никоимъ образомъ не есть возможная въ смыслѣ системы, но чисто идеальная и формальная кон-

¹ Della scienza meccanica, T. XI цит. изд. стр. 95.

цепця, которой не соотвѣтствуетъ никакое представленіе, связанное съ дѣйствительною возможностью и сообразное съ возможными процессами при нарушеніи равновѣсія. Если вообразимъ себѣ грузъ на наклонной плоскости, связанный съ вертикально подвѣшеннымъ грузомъ перекинутою черезъ блокъ нитью, то возможныя движенія и скорости обѣихъ точекъ приложенія силъ, т.-е. грузовъ, совершенно равны между собою. Также и разность направленій обѣихъ скоростей по стольку не можетъ вліять на сообщеніе обоюдныхъ силовыхъ отношеній и напряженій, по скольку перекинутая черезъ блокъ нить всякое натяженіе, ею испытываемое, вполне и неизмѣнно передаетъ по другому направленію. Разсматриваемое здѣсь отношеніе вещей станетъ еще яснѣе, если вообразимъ себѣ, что на наклонной плоскости вмѣсто груза приложена производящая такое же дѣйствіе пружина, натягивающая одинъ изъ концовъ нити. Въ этомъ случаѣ уже не можетъ быть рѣчи о редукиціи виртуальныхъ скоростей. Будетъ-ли плоскость горизонтальна, какъ угодно наклонна или даже вертикальна,—для дѣйствія пружины это безразлично. Поэтому, желая изслѣдовать виртуальное значеніе системы, подобной описанной, мы должны различать вещи двоякаго рода. Во-первыхъ, спрашивается, каково вліяніе, производимое комбинаціей вертикальнаго направленія съ наклоннымъ на обѣ силы, дѣйствующія на нить въ обоихъ направленіяхъ. Такъ какъ движенію одной точки приложенія должно соотвѣтствовать равное движеніе другой, а оба противоположныя натяженія стремятся произвести два движенія прямо противоположныя и по направленію, то въ силу виртуальнаго начала обѣ силы должны быть равны. Такимъ образомъ, это соображеніе не даетъ еще пока закона наклонной плоскости. Мы придемъ къ нему только тогда, когда примемъ въ соображеніе и второй пунктъ. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе нити къ обоимъ направленіямъ и опредѣляемое имъ отношеніе силъ не есть вещь существенно важная, а дѣло въ томъ, каково отношеніе вертикальной силы, вынужденной дѣйствовать въ данномъ наклонномъ направленіи. Разъ дѣйствующая часть этой силы опредѣлена, то отношеніе при посредствѣ нити не имѣетъ уже никакого интереса; ибо уже извѣстно то, что желательно было выяснить и установить въ отношеніи наклонной плоскости. Но если эта дѣйствующая часть не будетъ опредѣлена непосредственно, то и введеніе нити и ея отношеній не поможетъ восполнить этого пробѣла при помощи виртуальнаго начала. Принципъ этотъ даетъ только условіе, что оба момента или силы,—каждая въ направленіи своего дѣйствія,—должны быть взаимно равны и противоположны. Но какова должна быть сила, дѣйствующая не по наклонному направленію,

дабы она могла произвести требуемый равный и противоположный эффектъ, на это въ особенности нужно отвѣтить. Поэтому нечего и мечтать, чтобы начало виртуальныхъ скоростей, взятое въ строгомъ и специальномъ смыслѣ, могло служить для вывода закона наклонной плоскости. Но если понимать это начало такъ, какъ его нынѣ принято формулировать, то-есть, если виртуальные моменты тотчасъ же редуцировать къ направленію приложенныхъ силъ, то объясненіе наклонной плоскости опять-таки будетъ только кажущееся. Въ самомъ дѣлѣ, начало наклонной плоскости будетъ въ такомъ случаѣ уже содержаться въ принципѣ виртуальныхъ скоростей, ибо редукціи направленій станутъ составною частию посылокъ самаго виртуальнаго начала.

42. Изслѣдованіе начала виртуальныхъ скоростей мы можемъ пополнить лишь тогда, когда дойдемъ до періода, въ которомъ понятіе неограниченно малаго перемѣщенія начинаетъ играть роль, опирающуюся на новый анализъ. Но до сихъ поръ, и для примѣненій, которыя здѣсь мы имѣли въ виду, обстоятельство это не имѣло значенія. Между тѣмъ, понятіе виртуальнаго момента вообще можно строго фиксировать не иначе, какъ если въ основаніе положить неограниченно малое перемѣщеніе изъ положенія покоя, или, другими словами, если разсматривать тѣ свойства системы виртуальныхъ движеній и скоростей, которыя выступаютъ при неограниченномъ приближеніи ея къ положенію равновѣсія. Черезъ это мы отвлекаемся отъ всякаго измѣненія, которое можетъ получить значеніе только съ дальнѣйшимъ развитіемъ движенія, и разсматриваемъ состоянія въ предѣлахъ того перваго малаго движенія какъ сами по себѣ не различимыя. Какъ послѣднее возможно, объ этомъ рѣчь можетъ быть только позднѣе, когда изслѣдованія будутъ опираться на начала непрерывности и безконечно малыхъ отношеній.

Для Галилеевскаго періода важны еще приложенія начала возможныхъ скоростей къ гидростатическимъ отношеніямъ; при этомъ мы укажемъ также, насколько новая разработка гидростатики приведена была въ связь съ общими принципами механики.

Архимедъ, и въ этой особой отрасли служившій образцомъ для Стэвина и Галилея, въ своемъ трактатѣ о плавающихъ тѣлахъ разрабатывалъ гидростатику, основываясь на особыхъ началахъ, касающихся свойствъ жидкостей, и вплоть до Галилея въ самомъ дѣлѣ не было сдѣлано ни одного серьезнаго шага, который имѣлъ-бы цѣлью сочетаніе общей статики съ гидростатикою. Въ Архимедовскомъ трактатѣ, состоящемъ изъ двухъ книгъ, дошедшемъ до насъ не въ греческомъ подлинникѣ, а въ латинскомъ переводѣ, даномъ въ 1565 г. Коммандиномъ подъ заглавіемъ *De iis quae vehun-*

in aqua, на первомъ мѣстѣ стоитъ допущеніе, что менѣе сдавленная частица жидкости выталкивается вверхъ болѣе сдавленною, и что всякая частица сдавливается стоящимъ отвѣсно надъ нею столбомъ жидкости. На этой основѣ и развиты затѣмъ кардинальныя положенія. Такъ, пятое предложеніе первой книги говоритъ о погруженіи болѣе легкаго тѣла на столько, чтобы вытѣсненная жидкость имѣла равный съ нимъ вѣсъ, а седьмое предложеніе содержитъ законъ потери вѣса болѣе тяжелымъ тѣломъ. Далѣе, трактатъ посвященъ, главнымъ образомъ, изученію условій устойчивости фигуръ, интересныхъ въ математическомъ отношеніи, каковы шаровой сегментъ и параболическій коноидъ.

Архимедовское начало, въ силу котораго каждая частица сдавливается стоящею отвѣсно надъ нею жидкостью, было весьма удобно для опредѣленія давленія жидкости на стѣнки сосуда. Стѣвинъ первый рѣшилъ эту задачу и притомъ оригинальнымъ пріемомъ, хотя и не приведеннымъ еще къ общимъ законамъ механики, а съ этимъ вмѣстѣ тотчасъ появился и гидростатическій парадоксъ, что жидкая масса можетъ произвести давленіе, болѣе своею вѣса. Въ цитированномъ уже французскомъ изданіи трактата Стѣвина гидростатикѣ посвящена четвертая книга статики. Установивъ въ десятомъ предложеніи ¹ теорему, что горизонтальное дно испытываетъ давленіе столба жидкости, простирающагося до ея уровня, Стѣвинъ излагаетъ во второмъ королларіѣ ² соображенія, съ помощію которыхъ непосредственно видно, что сказанная теорема относится не только къ вертикальному, но и ко всякому наклонному и какъ угодно изогнутому столбу жидкости. Для доказательства этого обобщеннаго предложенія, что всякій каналъ какой угодно формы и какихъ угодно размѣровъ давить на горизонтальное дно точно такъ, какъ давить-бы находящійся надъ нимъ вертикальный столбъ жидкости, имѣющій основаніемъ основаніе канала, а высотой разстояніе отъ дна канала до уровня находящейся въ немъ жидкости,—для доказательства этой общей теоремы, Стѣвинъ употребляетъ въ указанномъ королларіѣ дѣйствительно остроумный пріемъ. Именно, прежде всего онъ показываетъ, что замѣна нѣкоторой части жидкой массы твердымъ тѣломъ равнаго ей вѣса не измѣнитъ давленія на дно. Затѣмъ всю жидкость онъ замѣняетъ твердымъ тѣломъ такъ, что внутри послѣдняго наполнена жидкостью только одна произвольно изогнутая трубка, достигающая до дна. Давленіе этого жидкаго канала на дно получится, если

¹ Stevin: Oeuvres mathématiques, Leyden 1634, Statik, стр. 487.

² Ibid. стр. 488.

вообразить, что давленіе твердаго тѣла изолировано путемъ независимаго удержанія этого тѣла на своемъ мѣстѣ. По допущенію, сосудъ имѣетъ вертикальныя боковыя стѣнки и удержаніе равнотяжелаго тѣла, замѣщающаго всю жидкость за исключеніемъ изогнутаго канала,—удержаніе этого тѣла на своемъ мѣстѣ, очевидно не можетъ измѣнить давленія, производимаго этимъ тѣломъ на все дно, за исключеніемъ основанія канала. Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемое тѣло и безъ того неспособно къ передвиженію, ибо уже по допущенію оно находится въ равновѣсіи. Поэтому, удержаніе его нисколько не измѣняетъ давленія, имъ производимаго или имъ испытываемаго. Оно служитъ только къ тому, чтобы отдѣлить одно отъ другаго дѣйствія, производимыя на дно сосуда имъ и основаніемъ канала. Согласно съ такимъ способомъ представленія оказывается, что та часть равномернаго распредѣленнаго по дну давленія, которая соотвѣтствуетъ основанію канала, обусловливается дѣйствительно распространеніемъ напряженій въ этомъ изогнутомъ жидкомъ каналѣ. Окружающее же тѣло образуетъ просто стѣнки для этой жидкости, и такимъ образомъ доказано, что въ трубкѣ произвольной формы, т.-е. вообще въ сосудѣ какой угодно формы, но имѣющемъ горизонтальное дно, давленіе, производимое на дно, соотвѣтствуетъ вѣсу столба жидкости, имѣющаго это дно основаніемъ, а высотой разстояніе дна отъ уровня жидкости.

Это Стэвиновское доказательство мы изложили подробнѣе въ тѣхъ видахъ, чтобы показать, какія уловки могутъ потребоваться, если оставаться при специально гидростатическихъ началахъ, совсѣмъ не обращаясь къ общимъ статическимъ законамъ. Стэвиново доказательство величины давленія, испытываемаго боковыми стѣнками, имѣетъ скорѣе математическій, чѣмъ механическій интересъ. Одиннадцатое предложеніе, ¹ въ которомъ дано само по себѣ трудное опредѣленіе боковаго давленія, выдѣляется поэтому скорѣе приложеніемъ нѣкотораго рода метода безконечно-малыхъ разложеній и метода предѣловъ, чѣмъ новыми механическими точками зрѣнія. Математическимъ искусственнымъ средствомъ является здѣсь заключеніе въ предѣлы. Образуется неограниченное число горизонтальныхъ слоевъ. Соотвѣтствующая каждому слою полоса стѣнокъ испытывала бы болѣе сильное давленіе, если бы она, вмѣсто того чтобы образовать уголь, лежала бы горизонтально у нижняго уровня слоя, и испытывала бы меньшее давленіе, если бы находилась въ плоскости верхняго уровня. Давленіе, испытываемое ею въ дѣйствительности, заключается между этими обоими предѣлами, и

¹ Ibid., стр. 490.

какъ послѣдніе могутъ быть произвольно сближены, то возможно найти точный предѣльный результатъ. Нынѣ мы взяли бы сперва неограниченно малые элементы поверхности, а затѣмъ суммировали бы ихъ или интегрировали-бы. Въ такомъ случаѣ каждая точка боковой стѣнки будетъ испытывать такое давленіе, какъ бы надъ нею находился вертикальный столбикъ жидкости, простирающійся до самаго высшаго уровня. Затѣмъ, если вообразить себѣ цилиндръ, стоящій надъ ограниченной, представляющею нѣкоторую кривую поверхность, частью боковыхъ стѣнокъ, и представить себѣ, что онъ давитъ на эту частицу стѣнокъ, развернутую на плоскости, то нахожденіе его высоты есть прямо дѣло вычисленія и не зависитъ болѣе отъ примѣненія механическихъ основоположеній. Приэтомъ, ничего не измѣняетъ и тотъ способъ выраженія этой высоты, по которому она разсматривается какъ вертикальное разстояніе центра тяжести поверхности отъ уровня жидкости. Въ самомъ дѣлѣ, это—способъ формулированія чисто-математическій, и даже понятіе о центрѣ тяжести не играетъ при этомъ никакой механической роли.

43. Въ то время какъ Стэвинъ, съ своею гидростатическою методою, стоялъ въ сущности еще на точкѣ зрѣнія Архимеда, Галилей предпринялъ обоснованіе гидростатическихъ отношеній на общихъ началахъ статики и, въ частности, на принципѣ виртуальныхъ скоростей. Его работа о плавающихъ тѣлахъ содержитъ основополагающее введеніе совершенно общаго характера,— обстоятельство, которое уже не разъ вынуждало насъ дѣлать на нее ссылки, когда дѣло касалось общихъ механическихъ основныхъ понятій и положеній, и которое тѣмъ замѣчательнѣе, что въ этомъ сочиненіи авторъ въ сущности имѣлъ въ виду только защиту главныхъ положеній Архимедовской гидростатики противъ нѣкоторыхъ возраженій. Въ этомъ введеніи онъ прямо высказываетъ ¹,—о чемъ здѣсь уместно припомнить еще разъ,—что онъ хочетъ дать болѣе непосредственныя основанія, чѣмъ Архимедъ, и слѣдовать другому методу. Въ вышеупомянутомъ порядкѣ развиваетъ онъ понятіе о моментѣ, какъ изложено у насъ въ § 17. Сюда онъ присоединяетъ то основное положеніе, которое содержитъ въ себѣ аксіоматическое ядро начала виртуальныхъ скоростей, ибо онъ уравниваетъ моменты при неравныхъ грузахъ обратнымъ отношеніемъ скоростей. Но вполне ясно и совершенно въ новѣйшемъ смыслѣ выступаетъ виртуальное начало при особой разработкѣ отдѣльныхъ гидростатическихъ комбинацій.

Прежде всего, неполное или полное погруженіе тѣлъ въ жидкостяхъ объясняется изъ отношеній противоположныхъ момен-

¹ Т. XII сочиненій, стр. 13—14.

товъ ¹. Виртуальный принципъ примѣняется въ высшей степени изящнымъ образомъ ², а именно погруженіе призмы въ жидкость, заключенную также въ призматическій сосудъ, сравнивается съ поднятіемъ уровня жидкости, которое этимъ погруженіемъ вызывается. Аналогично этому, поднятіе призмы соотвѣтствуетъ паденію уровня жидкости. А то, что здѣсь, согласно съ виртуальнымъ началомъ, ставится въ соотношеніе съ протяженіемъ уровня и съ основаніемъ призмы, это—пути, проходимые основаніемъ призмы и уровнемъ жидкости при ея перемѣщеніи въ вертикальномъ направленіи. Эффектъ погруженія призмы, какъ видно, долженъ быть аналогиченъ эффекту сообщающихся сосудовъ и вливанію жидкости въ узкое колѣно. Однако, можетъ явиться сомнѣніе, не слишкомъ ли сложно представленіе этого процесса въ отношеніи вліянія, производимаго увеличеніемъ объема всей массы призмой,—не слишкомъ ли оно сложно, чтобы его можно было считать простымъ доказательствомъ. Но эта трудность простиралась бы только на математическое изложеніе. Въ чисто механическомъ отношеніи, Галилеевскій методъ въ высшей степени натураленъ. Въ то время какъ призма непосредственно дѣйствуетъ только соразмѣрно съ площадью своего основанія, ея движеніе должно посредственно обусловливать повышеніе, соразмѣрное съ цѣлымъ уровнемъ. Поэтому, скорости движенія той и другой поверхности должны быть обратно пропорціональны самымъ поверхностямъ. Впрочемъ, эта только кажущаяся трудность устраняется, если принять въ соображеніе, что процессъ долженъ быть такимъ же точно, какъ если бы въ узкомъ колѣнѣ сообщающихся сосудовъ мы заставили жидкость понизиться на нѣкоторую величину. Тогда уровень въ широкомъ каналѣ долженъ бы былъ подняться въ обратномъ отношеніи поперечныхъ сѣченій. Потому, Галилеевскій образъ представленія совершенно точенъ, и оба момента, о которыхъ идетъ рѣчь, равны между собою, ибо скорости обратно пропорціональны приводимымъ въ дѣйствіе массамъ.

Подобнымъ же образомъ, и всѣ факты, извѣстные со временъ Архимеда, Галилей постоянно пытается свести къ виртуальному началу. При этомъ достойно замѣчанія, что какъ въ случаѣ погружаемой призмы, такъ и въ случаѣ призмы, вынимаемой изъ жидкости онъ съ самаго начала исходитъ отъ дѣйствительныхъ движеній и такимъ образомъ наглядно разъясняетъ мертвыя отношенія статики, рассматривая способъ ихъ возникновенія и ихъ возможные измѣненія. Правда, что касается частныхъ въ Галилеевской

¹ Ibid. стр. 17.

² Ibid. стр. 20.

работѣ о плавающихъ тѣлахъ, то въ ней находили кое-какіе недостатки, и еще Лагранжъ ¹ вообще примыкалъ къ мнѣнію, которое не разъ высказывалось относительно недостаточной строгости выводовъ; но эти недостатки, если обратить вниманіе на рѣшающее значеніе главнаго пункта, неважны. Въ самомъ дѣлѣ, послѣдній состоитъ въ соединеніи гидростатики съ общою механикою, и, въ частности, въ сознаніи, что начало виртуальныхъ скоростей есть наиболѣе пригодное средство для выясненія законовъ равновѣсія жидкостей.

44. Къ Галилеевской новой гидростатической методѣ доказательства тотчасъ же мы присоединяемъ здѣсь поистинѣ остроумные приемы Паскаля, который очевидно приведенъ былъ къ своему способу пониманія и къ гидростатическому примѣненію начала виртуальныхъ скоростей примѣромъ великаго итальянца. Въ работѣ, озаглавленной «*Traité de l'équilibre des liqueurs*», изданной въ 1663 г., т.-е. спустя годъ по смерти Паскаля, всякая жидкость, находящаяся въ сосудѣ, разсматривается какъ машина, которая регулируетъ взаимодѣйствіе приложенныхъ силъ и предписываетъ для равновѣсія ихъ опредѣленные отношенія совершенно подобнымъ же образомъ, какъ рычагъ и другія простыя машины. На основѣ этого воззрѣнія начало виртуальныхъ скоростей примѣняется даже къ объясненію равнаго давленія, дѣйствующаго на всякую часть поршней, замѣщающихъ вырѣзы въ стѣнкахъ сосуда. Въ самомъ дѣлѣ, если вообразимъ, что одинъ изъ такихъ поршней вдвинуть въ сосудъ на нѣкоторое протяженіе, вытѣсняя своимъ цилиндрическимъ объемомъ соотвѣтствующую часть жидкости, и заставляя ее выталкивать другой поршень, находящійся въ другомъ мѣстѣ стѣнокъ сосуда, то перемѣщеніе этого втораго поршня по величинѣ зависитъ отъ его площади, т.-е. отъ поперечнаго сѣченія цилиндра, въ которомъ онъ двигается. Отношенія движеній поршней совершенно то же самое, что и измѣненія уровня въ двухъ сообщаемыхъ трубкахъ. Въ виду этого, слѣдующія слова Паскаля, въ которыхъ выражена, въ цитированномъ сочиненіи, методическая главная точка зрѣнія ², не нуждаются ни въ какомъ дальнѣйшемъ разъясненіи: «Нужно удивляться, что въ этой новой машинѣ мы встречаемъ то же самое неизмѣнное правило, которое имѣетъ мѣсто во всѣхъ прежнихъ, именно въ рычагѣ, безконечномъ винтѣ и т. д. и которое состоитъ въ томъ, что путь увеличивается въ томъ же отношеніи какъ и сила... такъ что путь относится къ пути какъ

¹ *Mécanique analytique*, T. I, 1811, первое отд., Sect. VI, гл. 3.

² Pascal: *Oeuvres*, Paris, 1779, томъ IV, стр. 227. (*Traité* Глава 2).

сила къ силѣ, что можетъ быть даже принято за истинную причину онаго дѣйствія, ибо очевидно, что совершенно все равно, заставить ли 100 фунтовъ воды пройти одинъ дюймъ пути, или одинъ фунтъ воды 100 дюймовъ пути». Уже Галилей, въ своемъ небольшомъ сочиненіи по статикѣ, пытался опровергнуть заблужденіе, будто бы при помощи машинъ можно увеличить передаваемую силу. Приэтомъ онъ неоднократно замѣчаетъ, что то, что теряется въ одномъ факторѣ силоваго дѣйствія, напр. въ пути, выигрывается въ другомъ факторѣ, напр. въ соответственномъ напряженіи дѣйствія давленія. Впрочемъ, уже формулируя свои начала, онъ высказалъ, что моменты состоятся изъ вѣса и скорости, и что одинъ изъ этихъ факторовъ можетъ служить компенсаціей, если другаго фактора отчасти не хватаетъ. На этомъ основаніи, мы стали бы противорѣчить исторіи, еслибы Паскалево замѣчаніе о 100 фунтахъ, проходящихъ 1 дюймъ пути и объ одномъ фунтѣ, проходящемъ 100 дюймовъ, захотѣли производить отъ Декарта, который хотя и ясно формулировалъ механическое тождество обоихъ эффектовъ, но ничуть не сказалъ болѣе того, что уже было установлено Галилеемъ и принято имъ за начало сравненія силъ.

45. Въ нашемъ изслѣдованіи статическихъ началъ въ Галилеевскомъ періодѣ доселѣ мы встрѣчались съ тремя исходными пунктами. Одинъ изъ нихъ завѣщанъ еще древнимъ міромъ: это — принципъ равноплечаго и равнообремененнаго рычага, или, если угодно, вытекающее изъ него предложеніе объ обремененіи неравноплечаго рычага въ обратномъ отношеніи его плечъ. Второй исходный пунктъ, именно законъ равновѣсія на наклонной плоскости, получаетъ самостоятельное обоснованіе лишь у Стэвина, а у Галилея, стремившагося къ единству началъ, былъ сведенъ, хотя и кажущимся образомъ, къ равновѣсію равноплечаго рычага. Третій исходный пунктъ непосредственнѣйшимъ образомъ вытекаетъ изъ понятія силы и изъ разложенія ея на два фактора, и представляетъ то основное положеніе, которое въ послѣдствіи было формулировано какъ всеобъемлющее начало виртуальныхъ скоростей. Оно замѣняетъ, какъ уже принималъ и Галилей, даже принципъ равноплечаго рычага, а кромѣ того оно же впервые дало возможность перекинуть мостъ отъ общей статики къ гидростатикѣ. Но и этотъ исходный пунктъ, въ своей обыкновенной формѣ, не можетъ замѣнить начала наклонной плоскости или вообще редукии силы къ нѣкоторому направленію, такъ что вліяніе разницы силовыхъ направленій на совмѣстное дѣйствіе силъ все еще остается принципиальной главной задачей. Этотъ пробѣлъ тѣмъ чувствительнѣе, что доказательства теоремы о рав-

новѣсїи на наклонной плоскости оказались или неудовлетворительными, какъ у Стэвина, или иллюзорными, какъ у Галилея.

То начало, которое позднѣе въ нѣкоторой мѣрѣ пополнило этотъ пробѣлъ, именно теорема о параллелограммѣ силъ, въ періодъ Галилея имѣло лишь зачаточную форму. Хотя у Галилея оно и должно было относиться не просто къ форонимическимъ движеніямъ, но къ моментамъ или самымъ силамъ, все же прямоугольникъ, который приходится строить въ вопросѣ о параболическомъ движеніи брошенных тѣлъ,—для сложенія горизонтальной скорости и вертикальной тяжести,—фактически имѣетъ значеніе только для простыхъ явленій движенія, такъ какъ этотъ примѣръ не даетъ еще повода для компенсаціи фактора тяжести скоростями. Но параллелограммъ силъ становится болѣе чѣмъ форонимическою теоремою только благодаря тому, что силы, дѣйствующія на одну и ту же точку, измѣряются не просто протяженіями производимыхъ ими движеній, но и напряженіями, происходящими отъ фактора вѣса, или иначе, натяженіями или чисто статическимъ отношеніемъ къ причинѣ. Этимъ легко объясняется также, почему въ разсматриваемомъ періодѣ сложеніе движеній является совершенно ходячимъ представленіемъ, между тѣмъ какъ относительно статическаго примѣненія принципа сложенія силъ не имѣется никакихъ слѣдовъ, которые доказывали бы наличность знанія этой стороны принципа. Но такъ какъ это статическое употребленіе начала сложенія въ сущности тождественно съ принципиальнымъ обладаніемъ закономъ редукціи силы къ данному опредѣленному направленію, то сейчасъ же объясняется и тотъ фактъ, что и теорема о наклонной плоскости не могла еще выступить въ настоящемъ свѣтѣ, и что фундаментальная сторона ея еще не могла быть выдѣлена.

Своеобразную иллюстрацію того контраста, въ какомъ стояли труды по принципу сложенія простыхъ движеній къ задачѣ о сложеніи силъ, представляетъ теоретическое положеніе Роберваля. Знаменитый методъ касательныхъ этого, всегда державшагося натуральнѣйшихъ путей, математика, основывается на принципѣ параллелограмма движеній. Построеніе касательныхъ основано у него на разсмотрѣніи ихъ какъ составныхъ направленій тѣхъ элементарныхъ движеній, которыя производятъ кривую. Гдѣ для данной точки возможно выполнить сложеніе производящихъ движеній, тамъ этимъ самымъ дана и касательная въ этой точкѣ. Статья ¹, въ которой форонимически рѣшена задача о проведеніи касательныхъ, знаменательно носитъ заглавіе «Замѣчанія о сложеніи движеній и о спо-

¹ Mémoires de l'Académie des Sciences (отъ 1666—99), т. VI, Paris, 1730.

собѣ нахожденія касательныхъ къ кривымъ линіямъ (*Observations sur la composition des mouvements etc*)». Въ ней развитъ параллелограммъ движеній на столько же точно, на сколько и обстоятельно. Въ особенности интересно воззрѣніе ¹, по которому обѣ линіи слагающихъ движеній представляются совмѣстно движущимися, а мѣсто движимаго—прогрессивно подвигающеюся точкою пресѣченія ихъ. Благодаря этому, двойное движеніе точки дѣлается весьма яснымъ, ибо выходомъ означенныхъ линій изъ ихъ первоначальнаго положенія она получаетъ двойственное и вмѣстѣ съ тѣмъ ея первоначальнымъ опредѣленіямъ соотвѣтствующее положеніе. Именно, она должна постоянно двигаться совмѣстно по двумъ направленіямъ, а это очевидно можетъ имѣть мѣсто не иначе, какъ если ея, въ каждой точкѣ приличествующія ей, направленія остаются параллельны линіямъ, первоначально выражающимъ эти оба направленія. Прогрессивно движущіяся линіи представляютъ собою, такимъ образомъ, побуждающія точку направленія, а кромѣ того отношеніемъ скоростей своихъ движеній выражаютъ и опредѣляющія скорости.

Предположеніе, что касательная въ нѣкоторой точкѣ кривой изображаетъ направленіе движенія, принято у Роберваля за аксіому. Въ задачѣ о касательныхъ, поставленной въ 5 предложеніи ², прежде всего дано общее рѣшеніе въ формѣ общаго правила нахожденія слагающихъ направленія движенія, а затѣмъ указаны частныя примѣненія этого правила къ цѣлому ряду кривыхъ, причемъ первымъ примѣромъ служитъ простой случай параболы. Хотя геометрическія изслѣдованія, примыкающія къ трактованію различныхъ кривыхъ, и представляютъ главный матеріалъ всей работы, все же сказанная подготовительная постановка принципа сложенія движеній имѣетъ для механики большую цѣнность. Цѣнность его станетъ для насъ еще выше, если сравнить изящное Робервалевское изложеніе съ неуклюжими, нагроможденными другъ на друга, выводами, къ которымъ позднѣе вынужденъ былъ прибѣгнуть Вариньонъ въ своей работѣ, въ которой принципу сложенія силъ онъ далъ статическое значеніе и примѣненіе. И это превосходство обуславливается не внѣшнею стилистической манерою, а ясностью и строгостью самаго хода мышленія; ибо работа о сложеніи движеній, появившаяся въ фоліантѣ Парижской Академіи лишь въ 1693 г., т.-е. черезъ 18 лѣтъ по смерти автора, была написана не самимъ Робервалемъ непосредственно. Ея редакція принадлежала одному приватному ученику, хотя въ 1668 г., въ видахъ чтенія ея въ Академіи, и снабжена замѣтками на поляхъ рукою Роберваля.

¹ Ibid, стр. 7.

² Ibid, стр. 22.

Въ небольшой—всего въ нѣсколько страницъ—статьѣ подѣ заглавіемъ: «*Projet d'un livre de mécanique traitant des mouvements composés*»¹ развивается идея нѣкотораго рода фороніи или кинематики, или лучше истолкованія всего мірозданія съ точки зрѣнія сложенія движеній. Приэтомъ всѣ силовыя дѣйствія, не исключая и органическихъ, рассматриваются какъ результаты сложеній. Такимъ образомъ очевидно, что Роберваль имѣлъ въ виду задачу въ самыхъ широкихъ размѣрахъ, стремясь подчинить своему началу сложенія движеній всѣ мѣстныя измѣненія какъ въ одушевленной, такъ и въ неодушевленной природѣ, и сдѣлать возможнымъ ихъ истолкованіе изъ болѣе простыхъ импульсовъ. Для уразумѣнія историческаго развитія тѣмъ замѣчательнѣе фактъ, что авторъ, преимущественно занимавшійся вопросомъ о сложеніи движеній, совсѣмъ не касался чисто статической стороны силового сложенія.

46. Набросанный нами очеркъ постиженія статическихъ началъ въ Галилеевскій періодъ, если оставить въ сторонѣ встрѣчаемый въ зародышѣ уже у Фермата, а позднѣе оказавшійся плодотворнымъ, принципъ наименьшаго дѣйствія,—данный нами очеркъ не сдѣлался бы полнѣе, если бы мы пустились въ изслѣдованіе другихъ явленій и личностей. Самое большее—кое-гдѣ могли бы сдѣлать картину яснѣе, показавъ, какъ эти принципы иногда были понимаемы, а иногда вызвали серьезныя недоумѣнія. Вопросомъ о томъ, какъ относился Декартъ къ приобрѣтеніямъ своего времени, а именно къ новой наукѣ Галилея, мы займемся въ слѣдующей главѣ, въ которой будетъ изложено вліяніе метафизическихъ исходныхъ пунктовъ. Такъ какъ слава Декарта зиждется съ одной стороны на его геометріи, а съ другой на его философіи, и такъ какъ изобрѣтеніе аналитической геометріи здѣсь непосредственно насъ не интересуетъ, то значеніе Картезія для механики будетъ заключаться главнымъ образомъ въ неблагопріятномъ вліяніи метафизической формы его точекъ зрѣнія, а потому принадлежитъ почти исключительно слѣдующей. главѣ. Однако, здѣсь мы должны упомянуть о его отношеніи къ статическимъ принципамъ по столько, по сколько оно отличается особеннымъ направленіемъ отъ того наслѣдія, путь къ которому былъ открытъ этому младшему современнику Галилея.

Начало виртуальныхъ скоростей должно было имѣть особую привлекательность для философски мыслящаго ума, ибо, по сущности своего содержанія, оно можетъ быть выведено какъ простое слѣдствіе изъ понятія силы. И въ самомъ дѣлѣ, оно примѣняется Декартомъ къ статическимъ основнымъ отношеніямъ, причемъ фран-

¹ Ibid. стр. 68—71.

цузскій мыслитель особенно выдѣляется здѣсь соображеніями о полиспаствѣ. Этотъ приборъ, вмѣстѣ съ рычагомъ и наклонною плоскостью, представляютъ главные примѣры, на которыхъ разъясняется принципъ, вначалѣ поставленный абстрактно. Въ одномъ изъ писемъ къ Мерсенню ¹ относительно кратко изложены всѣ воззрѣнія Декарта по статикѣ. Что въ немъ важно, помимо весьма искусно выбраннаго приложенія къ полиспаству, это — изложеніе основной идеи, по которой сила составляется изъ двухъ факторовъ, именно вѣса и скорости.

Правда, эта идея была достаточно ясно высказана уже Галилеемъ и была для него руководящею идеею при измѣреніи моментовъ, т.-е. количествъ дѣйствія; но Декартъ пытался дать ей внутреннее, такъ сказать, только логическое основаніе. Совершенно одно и то же, думаетъ онъ, поднять ли 100 фунтовъ на одинъ футъ и еще разъ сдѣлать это или за одинъ разъ поднять 200 фунтовъ на 1 футъ. ² Дѣйствительно, въ послѣднемъ случаѣ сразу имѣетъ мѣсто то, что въ первомъ случаѣ совершается послѣдовательно въ два приѣма. Это количественное тождество раздѣльнаго и цѣлостнаго процесса, очевидно, есть послѣднее основаніе, какое только можетъ быть дано относительно равенства потраченнаго въ обоихъ случаяхъ количества силы. Въ тѣснѣйшей связи съ этимъ способомъ представленія находится и техническое понятіе количества движенія (*quantité de mouvement*), которое принимаетъ въ расчетъ не только одно протяженіе форономического движенія, но и движимую массу. Согласно этому понятію, движеніе увеличивается вдвое, когда двойной вѣсъ испытываетъ то же перемѣщеніе, и въшестеро, когда пространство увеличивается приэтомъ втрое. Чрезъ это оба фактора количества движенія достаточно ясно выступаютъ въ своемъ первичномъ значеніи, и если остается еще какая-либо неопредѣленность, то она относится единственно только къ вопросу объ общей единицѣ времени или вообще о тождествѣ времени, каковое должно предполагаться при сравненіи пространственныхъ движеній. Галилей тотчасъ же ввелъ скорости и этимъ устранилъ всякую неточность представленія. Впрочемъ, ми не будемъ изслѣдовать здѣсь этого различія, ибо вначалѣ оба представленія имѣютъ въ виду одинъ и тотъ же результатъ, и начинаютъ расходиться въ своихъ слѣдствіяхъ только тогда, когда возникаютъ пререканія о различныхъ способахъ измѣренія силъ или, лучше, о разногласіи въ идеяхъ, каковыми можетъ сопровождаться единственно правильный способъ оцѣнки силъ.

¹ Descartes: Lettres, т. I, Paris 1663, письмо 73.

² Ibid. Письмо 73, стр. 332.

Переходъ отъ только-что изъясненнаго представленія къ виртуальному принципу дѣлается при помощи замѣчанія, что для сравненія статическихъ силъ слѣдуетъ обратиться къ началу возможнаго движенія. То обстоятельство, что полиспасть въ своемъ простѣйшемъ видѣ представляетъ первый примѣръ, весьма знаменательно. Въ самомъ дѣлѣ, нѣтъ другаго простаго орудія, при помощи котораго можно бы было съ такою наглядностью экстензивное силовое дѣйствіе преобразовать въ интензивную форму проявленія и силовые элементы, соединяющіеся въ своихъ дѣйствіяхъ на одномъ концѣ, одновременно распредѣлить одно рядомъ съ другимъ. Параллельныя веревки представляютъ интензивное суммирование или распредѣленіе натяженій въ рядъ. Въ то время какъ подвижной цилиндръ перемѣщается, конецъ веревки приходитъ въ движеніе, сообразное съ числомъ параллельныхъ обходовъ по блокамъ. Наоборотъ, вытягиванію конца веревки соответствуетъ уменьшенный въ томъ же отношеніи подъемъ подвижнаго цилиндра. Итакъ, при помощи подобнаго снаряда, ближайшее знакомство съ которымъ здѣсь, натурально, предполагается, имѣется средство,—болѣе экстензивному количеству движенія или количеству силы давать болѣе интензивную форму.

Натяженіе по всей длинѣ веревки должно быть одинаково, а потому многократно огибающія одинъ и тотъ же блокъ веревки представляютъ такое многократное натяженіе или силу. Представленію процесса можно дать весьма простую форму, если, какъ это дѣлаетъ Декартъ, ограничиться сначала случаемъ, когда къ веревкѣ, укрѣпленной однимъ концомъ и огибающей своимъ свободнымъ концомъ неподвижный блокъ, привѣситъ другой блокъ, образующій приэтомъ точку приложенія грузовъ или силъ, и помѣщенный такъ, что посредствомъ идущей подъ нимъ веревки его можно поднимать и опускать. Приэтомъ очевидно, что если части веревки параллельны, то вытягиванію конца веревки на опредѣленную длину должно соответствовать поднятіе подвижнаго блока на половину этой длины. Въ самомъ дѣлѣ, двойная веревка укорачивается какъ таковая только на половину убыли длины простой веревки. Пути обратно пропорціональны силамъ натяженія или грузовъ. Приэтомъ обнаруживается и самый способъ, какимъ можно превратить одинъ факторъ силы въ другой и достигнуть двойнаго напряженія или вѣсоваго дѣйствія на мѣсто простаго, экстензивнаго способа дѣйствія.

Нѣтъ надобности въ дальнѣйшемъ разъясненіи, почему на предположенномъ снарядѣ одновременные виртуальные пути, т.-е. виртуальныя скорости должны находиться въ обратномъ отношеніи къ

приложеннымъ грузамъ или къ натяженіямъ пружинъ, представляющихъ статическія дѣйствія. Самое Декартово объясненіе полиспаста привели мы лишь потому, что оно отличается непосредственною связью съ понятіемъ силы и съ виртуальнымъ началомъ. Галилей, въ своемъ изложеніи предмета ¹ главнымъ образомъ опирался на рычажныя комбинаціи, и менѣе заботился о болѣе простомъ способѣ представленія, въ силу котораго дѣйствіе полиспаста можетъ даже служить исходнымъ пунктомъ для совершенно общаго доказательства виртуальныхъ отношеній силъ. Значительно позднѣе одинъ изъ новыхъ мыслителей, именно Лагранжъ, обратилъ вниманіе на эту сторону полиспаста, и попытался дать настоящее доказательство ² теоремы о виртуальныхъ скоростяхъ, изображая всѣ силы, соединенныя въ систему, въ видѣ полиспаста. Такое весьма натуральное сочетаніе принципа полиспаста съ началомъ виртуальныхъ скоростей, въ своей простѣйшей и первоначальнѣйшей формѣ, какъ мы видѣли, весьма не ново; мы должны будемъ заняться имъ особенно еще разъ въ одной изъ позднѣйшихъ стадій: оно послужитъ исходнымъ пунктомъ критики попытокъ доказательства виртуальнаго начала.

47. Виртуальное начало есть самое общее и, такъ сказать, наиболѣе философское, съ какимъ намъ доселѣ пришлось встрѣтиться. Дальнѣйшее развитіе механики ведетъ къ общимъ формулированіямъ, имѣющимъ широкое значеніе, изъ которыхъ нѣкоторыя общи статикѣ и динамикѣ, а ихъ ядро-опредѣленные представленія о наименьшей тратѣ силы. Эти идеи опредѣляются съ одной стороны отношеніемъ къ математическимъ *minima* функцій, а съ другой стороны допущеніемъ, что природа вездѣ избираетъ такія комбинаціи, для которыхъ имѣется наименьшее сопротивленіе. То обстоятельство, что гениальный математикъ Ферматъ трудился надъ методомъ опредѣленія *maxima* и *minima*,—методомъ, который можно считать зародышемъ дифференціальнаго исчисленія, дѣлаетъ для насъ понятнымъ, что и въ своемъ способѣ пониманія механическихъ процессовъ и, между прочимъ, въ своихъ спекуляціяхъ о декартовомъ законѣ преломленія свѣта онъ напалъ на мысль, что при распространеніи движенія природа слѣдуетъ нѣкотораго рода закону наименьшихъ. Такимъ образомъ, онъ сдѣлался родоначальникомъ того начала, которое обыкновенно называютъ началомъ наименьшаго дѣйствія (*de la moindre action*), и которое, будучи распространено Мопертюи на динамику и статику, въ его рукахъ

¹ Delle taglie, въ Della Scienza mecanica, T. XI цит. изд. сочиненій, стр. 104—112.

² Впервые во 2-мъ изд. Мѣс. anal T. I, первое отд., Sect. I, чл. 18—19.

привлекло на себя всеобщее вниманіе. Эта позднѣйшая знаменитость начала въ его динамическихъ и статическихъ примѣненіяхъ вынуждаетъ насъ—теперь же выставить ферматову основную мысль.

Въ одномъ изъ писемъ этого математика читаемъ: ¹ „Мнѣ кажется, всего вѣроятнѣе искать объясненіе преломленія въ томъ началѣ, что природа дѣйствуетъ всегда кратчайшими путями (*agit toujours par les voies les plus courtes*)“. Такимъ образомъ, полагаетъ онъ, можно опредѣлить точку преломленія. Особо приведенное въ упомянутомъ письмѣ ² геометрическое доказательство этого принципа, какъ послѣдняго основанія закона синусовъ при свѣтовомъ преломленіи на границѣ, раздѣляющей двѣ среды, собственно имѣетъ темою то обстоятельство, что всякій путь отъ какой-либо точки падающаго до нѣкоторой точки преломленнаго луча, идущій чрезъ другую точку паденія, встрѣтилъ-бы большее сопротивленіе и потребовалъ бы болѣе времени, чѣмъ путь, вначалѣ предположенный согласно закону преломленія. Такъ какъ сопротивленія въ обѣихъ срединахъ различны, то законъ опредѣляется наименьшею суммою сопротивленій и слѣд. кратчайшимъ временемъ для всего пути и для угла, подъ которымъ этотъ путь преломляется въ точкѣ паденія.

Не входя здѣсь въ ближайшее разсмотрѣніе этихъ геометрическихъ изслѣдованій, замѣтимъ только, что въ заключеніе Ферматъ даетъ своей натурфилософской идеѣ характерное выраженіе, говоря ³ о природѣ, что изъ приведеннаго доказательства усматривается, „что эта великая работница для исполненія своихъ операций не нуждается въ нашихъ инструментахъ и машинахъ.“ Впослѣдствіи, при общемъ изслѣдованіи начала наименьшаго дѣйствія, мы покажемъ, что въ нѣкоторомъ точно опредѣленномъ смыслѣ оно имѣетъ, во всякомъ случаѣ, всеобщее значеніе и даже лежитъ въ основаніи всякой простѣйшей силовой комбинаціи. Итакъ, это довелъ все еще не совсѣмъ ясное начало, равно какъ и начало виртуальныхъ скоростей примѣнимо не только къ простѣйшимъ машинамъ, но уже и къ элементарнѣйшимъ силовымъ отношеніямъ, а слѣдовательно и къ параллелограмму силъ, и можетъ быть найдено въ этихъ основныхъ формахъ всѣхъ способовъ дѣйствія природы. Отсюда объясняется, почему это начало должно быть находимо во всякомъ болѣе сложномъ процессѣ механической природы, а слѣдовательно и въ законѣ свѣтоваго преломленія. При такомъ способѣ

¹ Fermat, varia opera mathematica, Tolosae 1679, стр. 156 (Та же страница въ Берлинскомъ изданіи сочиненій Фермата 1861 г.)

² Ibid. Стр. 158.

³ Ibid. Стр. 160.

разсмотрѣнія отступаетъ на задній планъ и точка зрѣнія цѣли и даже становится излишнею. Въ такомъ разѣ можно будетъ утверждать, что „великая работница,“ даже оставляя въ сторонѣ всякія цѣли, въ своихъ операціяхъ неминуемо должна слѣдовать опредѣленнымъ *minima*, или, скорѣе, творить въ силу просто дѣйствующей и независящей отъ цѣлей, причинности.

Уже Геронъ-механикъ ¹, какъ должно полагать, сводилъ отраженіе свѣта на то же самое начало, а потому не невѣроятно, что Фермать, хорошо знавшій наслѣдіе древняго міра, пришелъ къ указанной идеѣ, при случаѣ своихъ пререканій съ Декартомъ, благодаря этимъ давнимъ воззрѣніямъ. Но откуда могла явиться первоначальная мысль о примѣненіи этой общей натурфилософской идеи къ механикѣ и прежде всего специально къ оптикѣ? Во всякомъ случаѣ, источникъ ея отдалененъ, и такимъ образомъ понятно, почему новое начало до настоящаго времени играло столь сомнительную роль и столь чуждую остальнымъ простымъ основоположеніямъ статики и динамики. И его весьма тѣсную связь съ статическимъ отношеніемъ силъ здѣсь мы просто предполагаемъ; ее можно доказать лишь впослѣдствіи при упорядоченіи его содержанія, когда оно сдѣлается болѣе многостороннимъ. Метафизическая форма, въ которой это начало появилось впервые, повинна въ томъ, что въ дальнѣйшей исторіи развитія оно вызвало цѣлый рядъ пререканій. Подобное же замѣчаніе само собою напрашивается по отношенію ко всѣмъ понятіямъ и способамъ представленія, специально метафизическій характеръ имѣющимъ, и слѣдующая глава, имѣющая предметомъ изложеніе философски-метафизическихъ вліяній, не разъ подтвердить такое положеніе дѣла.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Вліяніе тогдашней философіи.

48. Хотя господствовавшая въ школахъ во времена Галилея философія, именно Аристотелевская, и пришла уже въ упадокъ, но ея реакція настолько еще значительна, что ее можно считать рѣшительно мотивомъ, тормозящимъ развитіе новыхъ истинъ. Профессора Аристотелии не признають законовъ паденія, опираясь на авторитетъ своей античной библіи, и когда Галилей въ своихъ діалогахъ желаетъ изобразить ограниченность, онъ избираетъ имя Симплиція, къ тому же принадлежавшее одному изъ древнихъ комментато-

¹ Montucla, Histoire des mathématiques, 2 изд. Т. III, стр. 644.

ровъ Аристотелевскихъ произведеній. О тѣхъ каверзахъ, съ которыми аристотелики того времени всегда были на готовѣ противъ новыхъ наукъ, можно составить себѣ нѣкоторое понятіе, если взять въ соображеніе хотя уже и безсильныя съ научной стороны реакціонныя стремленія теперешнихъ аристотеликовъ, и вообще современныхъ официальныхъ метафизиковъ. Философская схоластика послѣднихъ поколѣній, даже тогда, когда она не была уже специально Аристотеліей, но разыгрывалась въ собственныхъ системкахъ, играла по отношенію къ точному мышленію подобную-же, только несравненно болѣе безсильную роль, чѣмъ аристотелированіе во времена Галилея.

Что касается новой философіи въ эпоху Галилея, то философія Бэкона Веруламскаго отнюдь не соприкасалась съ основами точнаго мышленія, а философія Декарта положительно заявила унаслѣдованное этимъ жанромъ мышленія отъ теологіи чванство, пренебрегая новыми, составившими эпоху, ученіями. Фрэнсисъ Бэконъ, въ противоположность безъ сравненія превосходящему его, соименному средневѣковому своему предшественнику Рожеру Бэкону, не обладалъ способностью къ математикѣ и къ точному мышленію, а былъ просто жрецомъ грубой, такъ сказать, осязательной эмпиріи, болѣе умѣстной въ описательномъ естествознаніи, а не въ механическихъ и физическихъ изслѣдованіяхъ. Авторъ «Новаго Органо-на», не зная даже закона рычага, хотѣлъ поднять науку при помощи рецептовъ, которые не шли дальше собиранія случаевъ и противныхъ случаевъ, или такъ — называемыхъ инстанцій или противныхъ инстанцій. У него не было никакого чутія относительно значенія математическаго и строящаго мышленія, онъ осмѣивалъ Коперниково міровоззрѣніе какъ нелѣпость, и не сдѣлалъ ровно ничего для методологіи, что могло бы годиться для высшихъ раціональныхъ частей познанія природы. Если припомнить то, что было выставлено въ немногихъ словахъ Леонардомъ-да-Винчи относительно методовъ изслѣдованія, и то, что въ эпоху Галилея было положительно представлено величественными трудами въ механическомъ знаніи, то Бэконовъ Новый Органонъ покажется намъ не только свидѣтельствомъ недостаточности метода, но и прямымъ уклоненіемъ отъ правильныхъ методовъ. И въ самомъ дѣлѣ, если все высшее естествознаніе идетъ впередъ, то это благодаря только тому, что оно и не пыталось дѣлать употребленія изъ рецептовъ англійскаго канцлера.

Противоположный родъ уклоненія отъ натурального, строгой наукѣ приличествующаго метода, представляетъ Декартъ, и главнымъ образомъ благодаря своему притязательному заблужденію, что

можно вывести дѣйствительность изъ простыхъ понятій и опредѣленій. Напротивъ, истинно спекулятивную методу встрѣчаемъ у Галилея, который не только по поводу специальныхъ физическихъ проблемъ, но и въ отношеніи всего своего образа мышленія, имѣлъ полное право въ болѣе широкомъ смыслѣ утверждать, «что онъ потратилъ больше лѣтъ на философію, чѣмъ мѣсяцевъ на математику»¹. Напротивъ того, можно сказать, что Декартъ все время, какое онъ вообще потратилъ съ дѣйствительною пользою для человѣчества, посвящалъ математикѣ, а обусловливаемый этимъ обстоятельствомъ преобладающе геометрической характеръ мышленія равнымъ образомъ способствовалъ усиленію въ немъ, коренящагося въ схоластической теологіи, предубѣжденія въ пользу состоятельности выводовъ изъ чистыхъ понятій. Будучи фантазеромъ, онъ легкомысленно увлекался произвольными построеніями, какъ это доказываетъ его вихревая натурфилософія, которую онъ, такъ сказать, выдумалъ въ своихъ «Принципахъ философіи». Въ нихъ космическія движенія настолько произвольно объяснялись круговращательнымъ движеніемъ тонкой эфирной матеріи, окружающей міровыя тѣла, что даже Гюйгенсъ, почерпнувшій часть своего общаго образованія въ декартовой атмосферѣ, писалъ въ заключеніи своего «Космотеороса» относительно изображенія планетныхъ движеній: «Толкованія у Картезія построены сплошь на такихъ легкомысленныхъ основахъ, что меня часто удивляетъ, какъ онъ могъ положить столько труда на сочетаніе подобныхъ выдумокъ».

49. Помимо приведенныхъ, всего менѣе подходящихъ для насъ, способовъ представленія, въ Декартовыхъ «Началахъ Философіи» находимъ и философское формулированіе высшихъ началъ механическаго движенія. Хотя то, что въ этихъ формулированіяхъ оказывается правильнымъ, и не представляло фактически ничего новаго, тѣмъ не менѣе метафизическіе исходные пункты и самая форма, какую придаетъ онъ своимъ положеніямъ, нерѣдко представляютъ интересъ. И у Картезія во главѣ поставленъ уже Галилеемъ формулированный законъ косности или инерціи. Но Декартъ существенно расчленяетъ его на двѣ идеи. Именно, во второй части упомянутаго сочиненія² онъ ставитъ первымъ закономъ природы законъ коснѣнія въ одинаковомъ состояніи, и разумѣетъ это коснѣніе настолько обще, что въ примѣръ приводитъ даже сохраненіе четырехугольной формы. Видъ, состояніе покоя или движенія сохранялись-бы, т.-е. если отвлечься отъ вновь приводящаго движе-

¹ Письмо отъ 7 мая 1610, въ VI томѣ цитир. изд. его сочиненій, стр. 99.

² Principia philosophiae, 1643, pars II, Nr. 37.

нія. Мы не имѣемъ никакого основанія полагать, что движеніе можетъ само собою прекратиться. Ибо покой противоположенъ движенію, а ничто не измѣняется въ силу влеченія собственной природы въ себѣ противоположное, т.-е. не имѣетъ стремленія къ собственному разрушенію. Лишь послѣ этого ¹ выставляется, какъ второй законъ природы, динамическое основное начало Галилея, что всякое движущееся тѣло стремится продолжать свое движеніе по прямой линіи. Приэтомъ Декартъ, между прочимъ, обращается и къ опыту. Но третій ² мнимый законъ природы уже ясно показываетъ негодность Картезіанскаго метода. Именно, онъ долженъ состоять въ томъ, что тѣло при встрѣчѣ съ другимъ тѣломъ, котораго оно не можетъ привести въ движеніе, ничего не теряетъ изъ своего движенія, а при встрѣчѣ съ слабѣйшимъ тѣломъ теряетъ столько своего движенія, сколько его передаетъ. Поводомъ къ первой идеѣ послужило оптическое отраженіе. Но едвали можно мыслить менѣе сообразно съ законами механики, какъ допуская, что слабѣйшая сила, встрѣчая сопротивленіе, не испытываетъ со стороны этого сопротивленія никакого замѣтнаго измѣненія. Впрочемъ, мы имѣемъ въ виду коснуться здѣсь только методической стороны Декартовскаго пониманія механическихъ началъ и поэтому насъ не интересуетъ особое содержаніе этихъ превратныхъ идей. Эта методическая сторона, какъ показываютъ приведенныя ссылки, по отношенію къ закону косности состоитъ въ томъ, что метафизикъ подсовываетъ прежде всего совершенно несостоятельную идею. Эта идея, если выразить ее логически ясно, состоитъ не въ иномъ чемъ, какъ въ томъ, что содержаніе понятія, со включеніемъ уже разумѣмыхъ въ немъ измѣненій, остается то же самое, если его не измѣнять, т.-е. если никакихъ новыхъ элементовъ въ него не входитъ или къ нему не присоединяется. Но большое заблужденіе — предполагать, чтобы такое чисто логическое положеніе тождества, если его примѣнить и къ причинамъ движенія, будетъ достаточно, чтобы дать законъ сохраненія направленія и скорости. Оно можетъ дать здѣсь не болѣе того, какъ, наприм., и для круговаго или для параболическаго движенія; ибо и эти движенія остаются тѣмъ, что они есть, пока они не будутъ измѣнены посредствомъ элементовъ, содержащихся не въ нихъ самихъ.

Направленіе Декартовскаго образа мысленія, если сопоставить его съ Галилеевскимъ, весьма ясно выступаетъ въ письмѣ перваго, гдѣ онъ подвергаетъ въ высшей степени комическому приговору главное произведеніе великаго итальянца, а съ нимъ и новую науку, основанную имъ въ *Discorsi*. Въ этомъ письмѣ онъ обращается къ

¹ Ibid. Nr. 39.

² Ibid. Nr. 40.

Мерсенню ¹ съ слѣдующими словами: «Онъ (Галилей) искалъ только оснований нѣкоторыхъ частныхъ дѣйствій (effets particuliers), не разсматривая первыхъ причинъ природы (sans avoir considéré les premières causes de la nature) и такимъ образомъ строилъ здание безъ фундамента». Далѣе ²: «Все, что онъ говоритъ о скорости тѣлъ, падающихъ въ пустомъ пространствѣ etc., построено безъ фундамента; ибо онъ долженъ бы былъ сначала опредѣлить, что такое тяжесть, а еслибъ онъ имѣлъ о ней правильное понятіе, то онъ долженъ бы былъ знать, что ея вовсе не существуетъ въ пустомъ пространствѣ (qu'elle est nulle dans le vide)». Тотчасъ за этимъ ³ слѣдуетъ мѣсто, направленное противъ фундамента всей новой динамики: «Онъ предполагаетъ, что скорость падающаго груза постоянно равномерно увеличивается, что и я нѣкогда предполагалъ; теперь же, мнѣ кажется, я доказалъ, что это не вѣрно. Онъ принимаетъ также, что степени скорости одного и того же тѣла на различныхъ плоскостяхъ равны, если высоты этихъ плоскостей равны, но онъ этого не доказываетъ, и это, строго говоря, не вѣрно; а какъ все послѣдующее зависитъ только отъ этихъ двухъ предположеній, то можно сказать, что все оно построено на воздухѣ». И законъ движенія брошенныхъ тѣлъ онъ отвергаетъ, не признавая косинѣнія горизонтальнаго движенія съ одинаковою скоростью; ибо французскій мыслитель говоритъ ⁴: «Къ прежнимъ онъ прибавляетъ новое ложное допущеніе; а именно, что брошенные въ воздухѣ тѣла двигаются въ горизонтальномъ направленіи съ постоянною скоростью, а въ вертикальномъ направленіи (паденія) ихъ скорость возрастаетъ въ двойномъ отношеніи пространства. Изъ этого же предположенія весьма легко заключить, что движеніе брошенныхъ тѣлъ должно бы было описывать параболическую линію; но такъ какъ его предположенія ложны, то и заключеніе должно быть далеко отъ истины».

Въ виду прежде нами сказаннаго относительно Галилеевскихъ главныхъ понятій и его способовъ представленія, мѣста эти не требуютъ никакихъ разъясненій. Они сами собою характеризуютъ Картезіанскій методъ и даютъ осязательное доказательство того факта, что Декартъ совсѣмъ не понималъ новооснованной науки динамики. Въ самомъ дѣлѣ, его механическія представленія, не исключая и представленій о центрѣ качанія, въ сущности группировались около понятій чисто статическихъ, и хотя онъ опубликовалъ первое глав-

¹ Descartes, Lettres, т. II, Paris 1659, Письмо 91, стр. 391.

² Ibid, стр. 394.

³ Ibid, стр. 395.

⁴ Ibid, стр. 396.

ное свое произведеніе и началъ свое авторское поприще уже тогда, когда Галилей свое въ главномъ дѣлѣ закончилъ и уже давно обнародовалъ главные свои положенія въ знаменитомъ діалогѣ о системахъ міра, французскій метафизикъ оставался на почвѣ своихъ понятій, какъ онъ разумѣлъ ихъ сообразно съ первымъ вышеприведеннымъ мѣстомъ. Ему казалось невозможнымъ дѣлать какіе-либо выводы о тяжести, прежде чѣмъ будетъ понята ея сущность, изъ каковаго понятія все остальное, что только достойно знанія, можно бы было уже вывести. Законы паденія были для него построенными въ воздухѣ частностями, заниматься которыми едва-ли стоило труда. Какъ мало было у него чутія въ отношеніи способа, каковымъ истинные ревнители механики изображали и доказывали свои познанія и какъ не любилъ онъ изучать знаменитѣйшія произведенія, доказываетъ одно мѣсто ¹, въ которомъ выражаетъ онъ приговоръ о Стэвинѣ, заявляя, что у него не хватаетъ терпѣнія читать книги въ родѣ Стэвиновской такъ, чтобы вынести убѣжденіе въ точности приведенныхъ тамъ доказательствъ.

Чтобы о Декартовскомъ отношеніи къ новой наукѣ Галилея и вообще не оставалось никакого сомнѣнія, можно привести еще слѣдующее мѣсто изъ того же самаго письма ², имѣющаго значеніе и во многихъ другихъ отношеніяхъ, въ подробности о которыхъ входить мы здѣсь не можемъ; оно показываетъ, каково было отношеніе французскаго метафизика къ успѣхамъ механики того времени. Онъ пишетъ: «Что же касается Галилея, то я хочу вамъ (Мерсенню) сказать, что я его никогда не видалъ и не входилъ съ нимъ ни въ какія сношенія, и что слѣдовательно у него я ничего не могъ заимствовать, а въ его книгахъ не вижу ничего, чему я могъ бы завидовать (*que me fasse envie*), и почти ничего, что я могъ бы признать своимъ (*que je voulusse avouer pour mien*)». Кромѣ того онъ полагаетъ ³, что при помощи собственныхъ своихъ принциповъ очень легко можетъ объяснить все, о чемъ трактуетъ Галилей. На дѣлѣ же, какъ мы видѣли, эти собственные принципы были далеко недостаточны для оцѣнки завоеваній Галилеевской динамики, и не миновали грубѣйшихъ ошибокъ. Декартъ желалъ все выводить изъ понятій и, какъ достаточно показываетъ его метафизика своимъ положеніемъ «я мыслю, слѣдовательно, я существую»,—даже изъ одного основнаго понятія. Сама по себѣ подобная дедукція не заслуживала бы порицанія, если бы подъ нею должно было разумѣть только раціональную разработку нѣкотораго содержа-

¹ Ibid, стр. 398.

² Ibid, стр. 397.

³ Ibid, стр. 404.

нія, лишь при посредствѣ индукціи перешедшаго въ понятія. Но Декартъ проглядѣлъ, откуда понятія объ отношеніяхъ матеріальной дѣйствительности только и могли приходить, а потому обратился не къ послѣднимъ источникамъ самихъ понятій, но придерживался произвольнаго рефлекса, да къ тому же принималъ его за прирожденные идеи.

50. Хотя идеи Декарта и ограничивались, въ сущности, областью статики, тѣмъ не менѣе онъ пытался дать новое направленіе общему силовому понятію, и кромѣ того защищать о сохраненіи одинаковой суммы силъ въ природѣ идею, которую, на ряду съ Галилеевскою мыслью о скорости, необходимой маятнику для поднятія до первоначальной высоты, можно разсматривать какъ исходный пунктъ позднѣйшихъ представленій о неразрушимости и о неизмѣнномъ запасѣ силы. Прежде всего, что касается того понятія о силѣ, которое позднѣе сдѣлалось исходнымъ пунктомъ знаменитыхъ препирательствъ объ измѣреніи силъ, то существенное по этому вопросу мы уже изложили въ § 46. Впрочемъ, здѣсь умѣстно привести совершенно общую формулировку ¹ собственными словами виновника этихъ пререканій: «Сколько потребно силы для поднятія тяжелаго тѣла на опредѣленную высоту, столько же, не болѣе и не менѣе, ея нужно для поднятія другаго менѣе тяжелаго тѣла на высоту на столько большую, на сколько это тѣло легче, и т. д.» Этого принципа никоимъ образомъ нельзя оспаривать, и если бы Декартъ слѣдовалъ ему вездѣ, то Лейбницъ не могъ бы найти ничего, что могло бы доставить матерьялъ для возраженій. Галилей разложилъ силу на факторы вѣса и скорости, что и въ самомъ дѣлѣ представляетъ раціональную форму простаго воззрѣнія. Но чтобы возможно было это понятіе примѣнять во всѣхъ случаяхъ, нужно перейти отъ мгновеннаго отношенія къ суммированію моментовъ, а Картезіева формула представляетъ для случая скоростей, неодинаковыхъ въ различныхъ частяхъ движенія, уже готовый результатъ въ простой формѣ, а не такой, который еще требуетъ вычисленія. Кромѣ того, она имѣетъ еще то преимущество, что связываетъ понятіе количества силы съ понятіемъ дѣйствія. Напротивъ, и въ ея основѣ лежащее понятіе скорости она скрываетъ подъ представленіемъ преодоленія тяжести, т.-е. силы, каковая сама не можетъ быть опредѣлена безъ заданія скорости. Мы не должны также забывать, что самъ Декартъ дѣлалъ изъ своего принципа только статическое употребленіе, даже только съ этою цѣлью и установилъ его. Онъ служилъ ему, какъ мы видѣли въ § 46, только вспомогательнымъ средствомъ для осуществленія примѣненія виртуальнаго начала. Въ этомъ отно-

¹ Descartes, Lettres, т. I, Paris 1663, письмо 73, стр. 331. Также въ началѣ небольшого посмертнаго трактата по механикѣ.

шеніи, какъ правильно замѣчаетъ Лагранжъ, принципъ этотъ былъ даже «менѣе общъ»¹ чѣмъ Галилеевскій.

Декартъ исходитъ изъ положенія, что количество дѣйствія слѣдуетъ мѣриломъ при опредѣленіи силъ². Въ цитированныхъ уже «Принципахъ философіи» (часть II, чл. 36) выставляется основоположеніе, что (въ природѣ) сохраняется то же количество движенія, какое вложено было въ нее вначалѣ при сотвореніи. Не говоря уже о ложномъ взглядѣ на первоначальное произвожденіе этого движенія, положеніе это утверждаетъ не болѣе какъ постоянство разъ существующаго количества движенія. Но понятіе о количествѣ движенія заключало въ себѣ еще нѣкоторую неопредѣленность, какъ замѣчено нами въ § 46. Если взять его, какъ и должно это сдѣлать въ противность Декарту, въ смыслъ количества дѣйствія, т.-е. разсматривая его со стороны поднятія различныхъ массъ, то оно не избѣгнетъ возраженій, коимъ подпадаетъ представленіе о сохраненіи произведенія изъ массы на скорость. Впрочемъ, этотъ пунктъ подлежитъ окончательному разрѣшенію только при изслѣдованіи начала сохраненія живыхъ силъ.

Совершенно ошибочныя предложенія Картезія объ ударѣ и еще выполнѣе невыработанныя идеи о центрѣ качанія, хотя и имѣютъ нѣчто общее съ метафизическимъ способомъ мышленія, но ихъ можно коснуться только въ надлежащей связи, т.-е. не раньше какъ когда разработка относящихся сюда проблемъ поведется съ нѣкоторымъ успѣхомъ. Относительно центра качанія начало успѣху положить лишь Гюйгенсъ, равно какъ и законы удара будутъ установлены имъ, хотя и не исключительно имъ. Слѣдующій отдѣлъ нашего труда, посвященный періоду Гюйгенса и Ньютона, является поэтому приличнымъ мѣстомъ для указанія и раннихъ безуспѣшныхъ попытокъ, въ числѣ которыхъ находится и то, что было выработано по вопросу объ ударѣ уже Галилеемъ, и въ чемъ онъ выказалъ, по крайней мѣрѣ, превосходство своей методы. Эта метода предохранила его отъ грубыхъ промаховъ и поспѣшныхъ допущеній, между тѣмъ какъ Декартъ въ своихъ положеніяхъ объ ударѣ обнаружилъ чистый произволъ и почти сплошь впалъ въ заблужденія. Дальнѣйшее изложеніе дастъ только новыя подтвержденія выводамъ этой главы, но ни въ какомъ случаѣ добытая истина, что метафизическая философія всегда выступала враждебно успѣхамъ механики и не въ силахъ была произвести ни единого несомнѣннаго закона, никогда эта истина не встрѣтитъ ограниченій.

¹ Méc. anal. т. I (1811), Первое отд., Sect. I, Art. 16.

² Descartes, Lettres, т. II, письмо 92, стр. 413.

ВТОРОЙ ОТДѢЛЪ.

Времена Гюйгенса и Ньютона.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Общій ходъ развитія.

51. Какъ вездѣ, такъ и въ наукѣ имѣетъ мѣсто положеніе, что первый шагъ является труднѣйшимъ, и что какъ скоро первыя препятствія побѣждены,—дальнѣйшее развитіе способно уже къ относительно непрерывному ходу. Но эта истина получаетъ совершенно особое значеніе, какъ скоро идетъ рѣчь исключительно объ общихъ принципахъ. Въ случаѣ новой механики, эти послѣдніе тотчасъ же были установлены въ объемѣ, позволявшемъ всему дальнѣйшему развитію выступить въ формѣ процесса, совершающагося въ данныхъ уже рамкахъ. По крайней мѣрѣ, такое отношеніе несомнѣнно признаетъ всякій, кто способенъ надлежаще проникнуть отъ наружнаго облика, повидимому, не одинаковыхъ явленій къ внутренней связи между начатками и ихъ слѣдствіями и между первыми типами и ихъ метаморфозами.

Дабы было возможно сдѣлать послѣднія сближенія и дознаться о сродствѣ принциповъ, мы разработали первую эпоху нашего предмета съ особою отчетливостью, придавая особое значеніе основнымъ мыслямъ Галилея. Эти-то основныя мысли и служатъ руководящею нитью, позволяющею разобратся въ кажущемся разнообразіи позднѣйшихъ принципіальныхъ положеній, и даютъ возможность свести на первый взглядъ плохо мотивированныя направленія къ ихъ исходной точкѣ и основанію.

Въ числѣ простѣйшихъ принциповъ, на которыхъ основывается статика и динамика, есть одинъ, оставшійся доселѣ всего менѣе разработаннымъ въ своихъ примѣненіяхъ, а потому въ первую эпоху являвшійся еще весьма несовершеннымъ принципомъ. Это было правило сложенія силъ, все еще тѣсно примыкавшее къ сложенію

просто форономическихъ движеній. Въ новомъ періодѣ начало это, въ своемъ спеціально механическомъ смыслѣ, было ясно постигнуто и пущено въ ходъ одновременно Вариньономъ и Ньютономъ, такъ что съ этого момента, т.-е. съ 1687 года, въ который появились касающіяся его сочиненія, параллелограмъ силъ является истиною, дознанною во всѣхъ существенныхъ отношеніяхъ.

Впрочемъ, основныя начала, что касается ихъ содержанія, были удовлетворительно сформулированы уже въ первомъ періодѣ, въ отношеніи же своего логическаго характера они не потерпѣли сколько-нибудь сильнаго измѣненія. Рычагъ, наклонная плоскость, равно какъ основныя факты динамики играютъ еще нерѣдко роль отдѣльныхъ исходныхъ пунктовъ въ доказательствахъ. Виртуальный принципъ вначалѣ отступаетъ даже отчасти на задній планъ и раскрываетъ свое значеніе только при господствѣ новыхъ дифференціальныхъ методовъ. Напротивъ того, расширеніе старыхъ воззрѣній и формулированіе принциповъ совершается, главнымъ образомъ, въ двухъ направленіяхъ.

Образцовымъ типомъ одного изъ этихъ направленій служить Галилеево ученіе о движеніи по наклонной плоскости; другаго — его изслѣдованіе параболическаго движенія брошенныхъ тѣлъ. Главнымъ представителемъ перваго направленія является Гюйгенсъ, втораго — Ньютонъ. Именно, первый развиваетъ преимущественно тѣ воззрѣнія, въ которыхъ динамическое движеніе является статически-несвободнымъ, благодаря неподвижнымъ препятствіямъ, наиболѣе характеристическимъ примѣромъ чего служитъ маятникъ. Въ противоположность этому, Ньютоновы работы относятся преимущественно къ движеніямъ, опредѣляемымъ не неподвижными препятствіями, а свободными силами, дѣйствующими на разстояніи. Эта механика, такъ сказать, свободныхъ тѣлъ, проистекая изъ разложенія космическихъ фактовъ, повела къ ученію о криволинейныхъ движеніяхъ, которое должно разсматривать какъ развитіе и продолженіе Галилеевскаго вывода параболическаго движенія брошенныхъ тѣлъ. Величіе предмета и универсальная природа принципа тяготѣнія придали этой сторонѣ механики размѣры, которые значительно суживаются, если повести рѣчь о содержаніи ея въ отношеніи механическихъ принциповъ и отвлечься отъ объекта, къ которому эти принципы могутъ быть примѣнены.

Хотя въ эпоху, къ которой мы теперь переходимъ, аналитическіе методы и исчисленіе безконечно-малыхъ и не играютъ еще выдающейся роли, тѣмъ не менѣе то обстоятельство, что Ньютонъ весьма рано владѣлъ уже методомъ флюкцій, стало быть, въ сущности, дифференціальнымъ исчисленіемъ, не безразлично по отно-

шенію къ его механическимъ умозрѣніямъ. Гюйгенсъ и Ньютонъ, представлявшіе, помимо метафизическихъ направленій и философскихъ вліяній, въ достаточной полнотѣ принципиально важное въ разсматриваемый періодъ, во всякомъ случаѣ признавали синтетическую, т.-е. геометрическую форму изложенія на дѣлѣ достаточною для выраженія старыхъ и новыхъ истинъ механики. Но у Ньютона слѣдуетъ отмѣтить не только открыто выставленные, но и подготовительные, незамѣтные изъ-подъ покрыва геометрическаго изложенія, вспомогательныя средства флюкціоннаго исчисленія, какъ впрочемъ и вообще простыя аналитическія средства болѣе и болѣе способствовали приведенію и началу механики къ ихъ математически отвлеченнѣйшей и вмѣстѣ съ тѣмъ всеобъемлющей формѣ.

52. Соотвѣтственно новому характеру механики, ея дальнѣйшее развитіе прежде всего идетъ путемъ расширенія динамики, такъ что продолженіе и пополненіе статическихъ воззрѣній занимаетъ лишь второстепенное мѣсто, и нерѣдко служитъ лишь вспомогательнымъ средствомъ для разработки динамическихъ проблемъ. Поэтому, руководящимъ представленіемъ во всѣхъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ служитъ общая форма динамическаго дѣйствія силы. Галилей выразилъ эту форму въ законахъ свободнаго паденія, и слѣдовательно требовалось лишь весьма легкаго отвлеченія отъ случайныхъ условій перваго примѣненія, чтобы достигнуть возможности примѣненія схемы дѣйствія и способа развитія непрерывнаго силового проявленія къ разнообразнѣйшимъ задачамъ. На это основаніе опирались прежде всего сформулированныя Гюйгенсомъ правила центральнаго движенія и центробѣжной силы. Само собою понятно, что нужна была та же самая точка зрѣнія и при разработкѣ задачи маятника въ совершенно общемъ видѣ, т. е. въ вопросѣ о центрѣ качанія. Можно даже утверждать, что перенесеніе математической формы выраженія, полученной для свободнаго динамическаго силового дѣйствія, на случай произвольнаго тѣла, полная свобода движеній котораго стѣснена неподвижною осью, было рѣшительнымъ поворотомъ и вмѣстѣ съ тѣмъ вполне достаточноымъ средствомъ къ достиженію важнѣйшихъ успѣховъ, какіе механика сдѣлала въ этомъ періодѣ.

У Ньютона мы не находимъ никакого строго соотвѣтствующаго факта. Способъ, какимъ творецъ теоріи всемірнаго тяготѣнія распространялъ слѣдствія динамическихъ принциповъ на новооткрытую область приложенія, никоимъ образомъ не представлялъ тѣхъ же трудностей, какія предстояло одолѣть Гюйгенсу при розысканіи центра качанія. Въ космическихъ задачахъ дѣло шло объ эллиптическомъ движеніи, или, съ болѣе общей механической точки зрѣ-

нія, о движеніи по коническимъ сѣченіямъ и объ отношеніи силъ, дѣйствующихъ, какъ допускалось, изъ фокуса, и скорости по инерціи, первоначально сообщенной движущимся тѣламъ. Галилеево изслѣдованіе параболическаго движенія могло служить образцомъ въ обоихъ отношеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, оно соединяло первоначально данное, сохраняющееся по инерціи, движеніе съ дѣйствіемъ силы, которая хотя и была принята дѣйствующею по параллельнымъ направленіямъ, но, ради математическаго способа мышления, при помощи весьма простаго оборота могла быть разсматриваема и какъ сила исходящая изъ центра, чѣмъ въ дѣйствительности физически она и была. Если прибавить къ этому еще Гюйгенсову теорію круговаго движенія и центробѣжной силы, то очевидно, что переходъ къ общему ученію о движеніи по коническимъ сѣченіямъ, даже вообще къ теоріи силовыхъ отношеній въ такого рода движеніяхъ, былъ достаточно подготовленъ какъ со стороны динамической, такъ и со стороны статической. Далѣе, если припомнить, что самое наблюденіе, въ формѣ Кеплеровыхъ законовъ, наталкивало на механическое разложеніе эллиптическаго движенія, и что фактически оно и было тѣмъ, изъ чего было сдѣлано заключеніе о квадратичномъ уменьшеніи тяготѣнія небесныхъ тѣлъ, то видъ, который приняла механика въ рукахъ Ньютона, окажется весьма мотивированнымъ и непосредственно ведущимъ къ цѣли. Итакъ, если вообще и можно чему либо удивляться, то лишь тому, что уже Гюйгенсъ не предвосхитилъ выведенныя Ньютономъ слѣдствія. Впрочемъ, этому великому математику помѣшало достичь потребной независимости въ способѣ изслѣдованія отчасти его первоначальное воспитаніе въ картезіанской атмосферѣ, слѣдовательно, неблагоприятное вліяніе философіи. Не будь этого, Гюйгенсъ—какъ сторонникъ Галилеевскаго метода—не остановился бы на такихъ примѣненіяхъ механики, которыя группировались почти исключительно около маятника и маятниковыхъ часовъ, и только случайно, благодаря внѣшнимъ поводамъ, какъ наприм. въ случаѣ законовъ удара, касались и другихъ проблемъ.

Подобное неблагоприятное вліяніе метафизики еще долгое время спустя по возведеніи Ньютонской системы тяготѣнія мѣшало ея признанію математиками Франціи и Германіи и даже, какъ въ случаѣ Лейбница космическаго натурфилософствованія, было причиною рѣшительнаго движенія вспять. При этомъ, интересно видѣть, что обладаніе флюкціоннымъ исчисленіемъ и его быстрое преобразованіе въ форму символически болѣе удобнаго дифференціальнаго исчисленія, т. е. успѣхи въ чистой математикѣ, нашедшей себѣ на материкѣ уже у первыхъ Бернулли какъ бы фамиліное покрови-

тельство, не могли пересилить ложныхъ традицій неподобающей натурфилософіи, такъ что здѣсь тотчасъ же обнаружилась далѣе неизмѣнно имѣющая исторически подтверждаться истина, что одной математики далеко недостаточно для предохраненія отъ заблужденій въ физикѣ, не говоря уже о томъ, чтобы положительно вести по пути дѣйствительныхъ объясненій міростроенія.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Формированіе началъ у Гюйгенса.

53. Важнѣйшее новое начало, введенное Гюйгенсомъ въ динамику, это — предположеніе, что общій центръ тяжести группы тѣлъ, качающейся подъ вліяніемъ тяжести около горизонтальной оси, поднимается до первоначальной своей высоты, и ни въ какомъ случаѣ выше подняться не можетъ. Это аксіоматически принятое положеніе служить зародышемъ идеи, получившей впослѣдствіи, по почину лейбницевской метафизики, наименованіе принципа сохраненія живыхъ силъ. Вполнѣ правильно Лагранжъ, не обинуясь, приписываетъ послѣднее начало непосредственно Гюйгенсу, какъ истинному его виновнику, никоимъ образомъ не признавая, чтобы нарицаніе имени и мнимое притязаніе на провозглашеніе новаго можно было признать рѣшительнымъ основаніемъ въ пользу позднѣйшей даты ¹. Въ самомъ дѣлѣ, у Гюйгенса было уже въ наличности все матеріально существенное для спеціально динамическаго представленія о сохраненіи силы. Декартъ разсматривалъ количество движенія какъ настоящий предметъ сохраненія, и понятіе о количествѣ движенія технически фиксировалъ такъ, чтобы мыслить не пространства, на которыя поднимается тѣло, но скорости и ихъ произведеніе на массу. Итакъ, въ этомъ отношеніи Картезіева еще смутная идея нуждалась не только въ статическомъ, но и въ динамическомъ упорядоченіи, а таковое, очевидно, заключалось въ употребленіи, какое Гюйгенсъ сдѣлалъ изъ вышеупомянутаго предположенія въ Галилеевскомъ смыслѣ. Именно, примѣняя упомянутое начало поднятія центра тяжести какъ къ отдѣльнымъ тѣламъ, такъ и къ ихъ совокупности, онъ нашелъ соотношеніе, въ которомъ предложеніе о сохраненіи живыхъ силъ содержится въ достаточно общей формѣ. Но прежде нежели касаться этого главнаго пункта съ подобающею обстоятельностью, мы должны разсмотрѣть хотя и менѣе значитель-

¹ Lagrange, Мѣс. anal. Т. I. 1811, Второй отд., секція I, чл 6.

ные, но болѣе простые и въ ходѣ развитія предшествовавшіе успѣхи, и при этомъ дать общую характеристику работъ по механикѣ ихъ виновника.

Христіанъ Гюйгенсъ (1629 — 1695) — Нидерландецъ, впрочемъ, прожившій первую половину своего ученаго поприща въ Парижѣ, сосредоточилъ важнѣйшія механическія теоріи свои въ главномъ своемъ произведеніи, изданномъ въ 1673 г., въ *Horologium oscillatorium*. Это заглавіе, равно и прибавленіе: «Геометрическія доказательства, касающіяся примѣненія маятника къ часамъ», уже указываетъ на тотъ пунктъ, около котораго вращались на практикѣ стремленія великаго геометра. Всѣмъ извѣстное примѣненіе маятника къ регулированію часовъ, и изящныя, но чисто математическія теоріи его, конечно, не подлежатъ здѣсь непосредственно нашему разсмотрѣнію; но указаніе на нихъ объясняетъ намъ двоякую виртуозность, съ какою онъ въ совершенствѣ выполнялъ какъ то, что относилось къ механической практикѣ, такъ и то, что имѣло отношеніе къ тончайшему геометрическому синтезу. Едва ли кому изъ позднѣйшихъ математиковъ удалось превзойти его въ формальной изящности и внутренней ясности его геометрическихъ дедукцій. Такимъ образомъ то, что характеризуетъ его главное произведеніе какъ послѣдній величественный и совершенный памятникъ исключительнаго, непримѣснаго, еще не сопровождаемаго аналитическими исходными пунктами, употребленія геометріи древнихъ, — это не просто матеріальное значеніе теоріи эволютъ, но вообще вся манера, съ какою онъ употреблялъ геометрію на службу механикѣ. Чистотою этихъ качествъ и однородностью своихъ непринужденныхъ методовъ отличается оно отъ того великаго произведенія, изложеніе котораго облечено также въ геометрическую форму, — произведенія, въ которомъ Ньютонъ начерталъ свою механику и систему тяготѣнія.

Важнѣйшую для нашей цѣли часть Гюйгенсова главнаго произведенія составляетъ ученіе о центрѣ колебанія или о центрѣ ажитаціи. Не такъ многообъемлющи, но въ ходѣ развитія также вліятельны — ученіе о простомъ маятникѣ, равно какъ и таутохроническое движеніе по обращенной циклоидѣ, а сверхъ того особенно теорія центробѣжной силы. Напротивъ того, честь первой правильной постановки теоріи удара Гюйгенсъ раздѣляетъ вмѣстѣ съ Реномъ и Валлисомъ, а потому, несмотря на ея большое значеніе, она лежитъ внѣ круга работъ и ученыхъ трудовъ, образующихъ упомянутую сродную группу.

54. Въ концѣ упомянутаго главнаго произведенія о примѣненіи маятника къ часамъ впервые выставленъ рядъ теоремъ, содержа-

шихъ теорію центробѣжной силы ¹. Впрочемъ, доказательства прямо отложены до позднѣйшихъ изданій и появились только въ его посмертныхъ сочиненіяхъ, въ *Opuscula posthuma* (1703 г.) подъ соответственнымъ заглавіемъ. Единственное затрудненіе, съ которымъ связано было открытіе и доказательство этихъ теоремъ, могло заключаться только въ измѣреніи чисто статическаго напряженія посредствомъ возможнаго движенія.

Послѣ попытокъ примѣненія принциповъ къ наклонной плоскости, проблема опредѣленія центробѣжной силы является ближайшею простѣйшею задачею, въ которой предписанный путь комбинируется съ дѣйствіемъ разъ на всегда сообщенной тѣлу и равномерно коснѣющей скорости. Изслѣдованіе движенія конечной точки простаго маятника уже не такъ просто, — если отвѣчать на всѣ представляющіеся вопросы; ибо на маятникъ дѣйствуетъ не простой ударъ, а непрерывная и слѣдовательно ускоряющая сила. Заданный же путь въ обоихъ случаяхъ одинаковъ. Сочетаніе данной прямолинейной скорости съ закономъ, что обладающее ею тѣло должно оставаться на окружности круга, — вотъ тѣ два существенныя условія, которыя предполагаются при опредѣленіи центробѣжной силы. Каковъ будетъ способъ удержанія тѣла постоянно въ равномъ разстояніи отъ центра, — это безразлично, и заданіе его служить только для того, чтобы сдѣлать нагляднѣе самый процессъ и чтобы физически пояснить его возможность. Итакъ, если мы вообразимъ себѣ матеріальный, нерастяжимый радіусъ или нить, какъ средство для прикрѣпленія тѣла, то центробѣжная сила будетъ ничто иное, какъ натяженіе этой нити. Но это натяженіе есть нѣчто чисто статическое, такъ какъ тѣло постоянно имѣетъ только стремленіе удалиться отъ центра, въ дѣйствительности же никогда не въ состояніи даже хоть сколько-нибудь измѣнить свое разстояніе отъ него. Итакъ, задача сводится къ опредѣленію, какимъ образомъ движеніе, долженствовавшее быть прямолинейнымъ въ силу удара или простой скорости по инерціи, превращается въ круговое, и именно какимъ образомъ при этомъ возникаетъ опредѣленная величина статическаго напряженія.

Интересно теперь посмотрѣть, какимъ образомъ эта послѣдняя главнѣйшая часть задачи разрѣшается при помощи средства, основывающагося на сие болѣе общей мысли, чѣмъ виртуальное начало. Статическія отношенія можно изслѣдовать съ одной стороны непосредственно, а съ другой посредственно помощію возможныхъ движеній, находящихся къ нимъ въ нѣкоторомъ возможномъ от-

¹ Horol. oscill., pars V de vi centrifuga etc.

ношеніи. Первое выполнимо лишь весьма рѣдко, между тѣмъ какъ послѣднее составляетъ общее правило и въ историческомъ развитіи все яснѣе и яснѣе уразумѣваемое. Хотя по отношенію къ Гюйгенсу мы и не можемъ предполагать, чтобы у него имѣлись совершенно общія соображенія въ этомъ родѣ, но самая необходимость дѣла заставила его на дѣлѣ ¹ выбрать указанный путь.

Чтобы разъ навсегда и въ совершенствѣ понять этотъ путь, имѣющій въ послѣдствіи снова появиться въ разнообразнѣйшихъ формахъ, нужно прежде всего отрѣшиться отъ смѣшенія того, что просто возможно и случайно, а слѣдовательно, что *могло бы* имѣть мѣсто, съ тѣмъ, что фактически имѣетъ мѣсто. Не слѣдуетъ также злоупотреблять и понятіемъ о неограниченно маломъ, изъ желанія перешагнуть пропасть, отдѣляющую просто гипотетическое отъ категорически фактическаго, или, лучше сказать, изъ желанія ее замаскировать. Имѣя это въ виду, мы можемъ слѣдующимъ образомъ охарактеризовать Гюйгеновъ пріемъ.

Касательная въ той точкѣ, въ которой тѣло находится въ нѣкоторое мгновеніе, т.-е. въ нѣкоторый строго математическій моментъ времени, изображаетъ направленіе движенія, какъ это и было, напримѣръ, допущенно Робервалемъ въ видѣ аксіомы. Это направленіе никоимъ образомъ не сливается съ линіей движенія, и только тогда можетъ явно обнаружиться, когда связь тѣла съ центромъ внезапно прекращается. Въ такомъ случаѣ движущійся предметъ сталъ бы продолжать свой путь по касательной, и слѣдовательно удаляться отъ круговаго пути. Фактически же существуетъ только стремленіе къ этому, ибо удержаніе тѣла въ опредѣленномъ разстояніи отъ центра на-дѣлѣ не прекращается. Это стремленіе является въ формѣ статическаго напряженія и подобно тягѣ, какую производитъ тяжесть на нѣкоторое тѣло, висящее на нити. Это чисто статическое задерживаніе можно измѣрять величиною тѣхъ разстояній, на какія удаляться оно этому тѣлу не позволяетъ. Если бы статическая сила не дѣйствовала, то отсутствіе этой причины имѣло бы слѣдствіемъ то явленіе, что тѣло начало бы занимать въ послѣдовательныхъ точкахъ касательной положенія, все далѣе и далѣе отстоящія отъ центра. Возникновеніе этихъ разностей разстояній и есть, слѣдовательно, то явленіе, которое какъ бы побѣждается направленною къ центру тягою. Но мы можемъ измѣрять силу не только по тѣмъ дѣйствіямъ, которыя она вызываетъ въ формѣ фактическихъ явленій и перемѣнъ мѣста, но также и тѣми дѣйствіями, посредствомъ которыхъ она дѣлаетъ невозможными

¹ Сравни *Opuscula posthuma*, 1703, стр. 401—408.

другіе эффекты, которые безъ нея имѣли бы мѣсто. Въ этой отрицательной роли — она дѣйствуетъ на столько же какъ сила, на сколько и въ положительныхъ своихъ проявленіяхъ. Въ этомъ и заключается главное различіе, какое должно дѣлать, если хотимъ съ одной и той же точки зрѣнія трактовать покой и движеніе, какъ результаты силовыхъ дѣйствій.

Существующее въ направленіи радіуса напряженіе, все равно — разсматривать ли его какъ натяженіе или какъ силу противоположную, измѣряется, слѣдовательно, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ направленіи силою, дѣйствіемъ которой было бы появленіе упомянутыхъ разностей разстояній. Поэтому, рядъ тѣхъ уклоненій, которые возникли бы, служить не самъ по себѣ, но лишь какъ производящая его причина, мѣрою центробѣжной силы. Эта-то причина и подлежитъ опредѣленію, какъ величина силы, имѣющей мѣсто въ данной математической точкѣ, и ее не слѣдуетъ смѣшивать съ возникающими уклоненіями. Такимъ образомъ рѣчь идетъ о математическомъ опредѣленіи строгаго предѣла, къ которому возникающія уклоненія относятся, какъ приближающіяся и даже неограниченно приближающіяся выраженія искомага количественнаго отношенія. Все остальное — уже просто дѣло математики. Разстоянія послѣдовательныхъ, но бесконечно, т.-е. неограниченно близкихъ точекъ касательной отъ соотвѣтствующихъ точекъ элемента окружности, которая лежатъ на томъ же радіусѣ и могутъ быть разсматриваемы, съ неограниченнымъ приближеніемъ, какъ начальные точки ортогональных прожекцій, разстоянія эти, какъ извѣстно, возрастаютъ какъ квадраты ¹, а абсолютная ихъ величина тѣмъ больше, чѣмъ радіусъ меньше, т.-е. чѣмъ больше кривизна круга. Уже первое отношеніе показываетъ, что центробѣжная сила пропорціональна квадрату скорости. Второе даетъ теорему, что она сверхъ того обратно пропорціональна радіусу. Эти чисто математическія соображенія мы не станемъ разсматривать подробно. Замѣтимъ только, что Гюйгенсъ отмѣчаетъ на частичкѣ дуги равные или, лучше, на равные элементы возрастающіе отрѣзки, считая отъ точки касанія, и показываетъ, что этимъ представителямъ равномѣрнаго движенія и постоянной скорости на окружности, соотвѣтствуютъ (какъ и въ случаѣ паденія) отклоненія, возрастающія пропорціонально квадратамъ дугъ. Значитъ, эти отклоненія возрастаютъ какъ квадраты скоростей.

Здѣсь главное наше вниманіе обращено было на то, чтобы представить нынѣ столь элементарную теорію въ свѣтѣ ея принципиаль-

¹ Дугъ, считая отъ точки касанія.

нихъ трудностей, и разсмотрѣть ее съ той стороны, которая при первоначальной разработкѣ должна была требовать глубокихъ размышленій. Въ заключеніе же, эту теорему, которую въ вышеуказанномъ мѣстѣ главнаго своего произведенія Гюйгенсъ выставляетъ какъ главнѣйшее предложеніе теоріи центробѣжной силы (третья теорема), можно привести здѣсь и буквально: «Когда два равныя тѣла движутся по равнымъ окружностямъ съ неравною скоростью, но оба равномерно, какъ и всегда здѣсь предполагается, то центробѣжная сила быстрѣйшаго относится къ центробѣжной силѣ тѣла, движущагося медленнѣе, какъ квадраты ихъ скоростей». Въ нашемъ изложеніи мы для краткости не сопоставляли двухъ скоростей, но прямо показали, что въ предположеніи какой угодно скорости уклоненія касательной возрастаютъ пропорціоально квадрату этой скорости. За исключеніемъ рѣшающаго средства—разсматривать статическое отношеніе какъ препятствіе возможному движенію и такимъ образомъ сдѣлать доступнымъ измѣренію, вся теорія центробѣжной силы основывается на чисто математическихъ, даже въ сущности только геометрическихъ отношеніяхъ, и даже соображенія о вліяніи неодинаковой величины движущихся массъ, соображенія второстепеннаго значенія и нетрудныя, ничего при этомъ не измѣняютъ. Это и естественно, если принять въ расчетъ, что ничто другое, какъ вѣданный круговой путь есть то, что какъ бы рождаетъ эту форму силы, ибо безъ него имѣла бы мѣсто только сохраняющаяся по инерціи скорость и ничего болѣе. Путь и есть то, что, сохраняя безъ измѣненія величину скорости, измѣняетъ только ее направленіе и такимъ образомъ порождаетъ центробѣжное стремленіе, какъ противодѣйствіе своему дѣйствию.

§5. Къ разработкѣ теоріи центробѣжной силы Гюйгенсъ былъ приведенъ своими изслѣдованіями о маятникѣ и о качательныхъ движеніяхъ тѣлъ. Сначала онъ выбралъ простѣйшій случай; но достаточно было сдѣлать еще только шагъ, чтобы усмотрѣть, что предположеніе равномернаго движенія и круга на дѣлѣ простирается значительно дальше, если его взять въ смыслѣ лишь неограниченнаго приближенія. Въ такомъ случаѣ всякую частицу кривой можно разсматривать какъ элементъ дуги соотвѣтствующаго ей круга кривизны, а всякое измѣненіе, происходящее въ величинѣ скорости, существующей въ нѣкоторой математической точкѣ, совершается непрерывно, такъ что приращенія этой величины въ отношеніи къ ней самой можно сдѣлать произвольно малыми, если только неограниченно уменьшать частицу времени, а съ нею и элементъ дуги. Отсюда слѣдуетъ, что всякое движеніе по бесконечно малой частицѣ кривой можно разсматривать какъ равномерное, ибо оно дѣй-

ствительно таково и есть съ неограниченнымъ приближеніемъ. А потому и найденные результаты относительно центробѣжной силы тотчасъ же могутъ быть примѣнены и къ криволинейнымъ движеніямъ вообще, а также и къ случаямъ, въ которыхъ на мѣсто простой и неизмѣнной скорости приходится разсматривать и дѣйствительную, т.-е. ускорительную силу, измѣняющую скорости. Но такимъ образомъ обобщенный результатъ не менѣе строгъ и въ общемъ случаѣ, чѣмъ въ частномъ случаѣ круга и равномернаго движенія. Именно, такъ какъ онъ имѣетъ мѣсто для математической точки какъ таковой, то неограниченныя приближенія, которыми приходится пользоваться, суть только средства для достиженія строгаго предѣла. Кругъ кривизны представляетъ измѣненіе направленія въ нѣкоторой точкѣ настолько же строго, какъ касательная изображаетъ самое направленіе, а равномерная скорость, предполагаемая постоянною для элемента дуги, есть механическое понятіе, совершенно аналогическое геометрическому представленію касательной. Въ каждой математической точкѣ какого бы то ни было перемѣннаго движенія всегда существуетъ доступная точному опредѣленію не содержащая никакого перемѣннаго элемента, величина скорости. Эта послѣдняя, конечно, не выступаетъ ясно ни въ какомъ явленіи движенія; но нѣчто подобное имѣетъ мѣсто и въ отношеніи касательной, изображающей направленіе, которое не существуетъ ни въ какой какъ угодно малой частичкѣ кривой и которое слѣдуетъ отличать отъ безчисленнаго множества направленій, какіе по произволу можно различать въ каждой частичкѣ кривой линіи. Въ силу этого, для всякой точки какого угодно криволинейнаго движенія, для которой даны кривизна и скорость, возможно въ точности опредѣлить центробѣжную силу приемомъ Гюйгенса и съ совершенно тѣмъ же результатомъ. Только, естественно, самое понятіе центробѣжной силы должно быть расширено: подъ нею слѣдуетъ разумѣть стремленіе къ центру, не неизмѣнное, но существующее именно для разсматриваемаго момента времени, что впрочемъ вполне понятно и само собою и не требуетъ дальнѣйшаго разъясненія. Сверхъ того, творцу теоріи эволютъ весьма былъ свойственъ приемъ замѣны неподвижнаго центра, производящаго натяженіе посредствомъ нити, эволютою, представляющею при своемъ развертываніи безчисленное множество такихъ центровъ, изъ которыхъ каждый дѣйствителенъ для нѣкотораго непротяженнаго момента времени.

56. Въ теоріи маятника, относительно которой у Галилея находимъ только первые, хотя и рѣшительные, начатки, въ числѣ другихъ важныхъ приемовъ, при посредствѣ которыхъ это ученіе въ существѣ дѣла было завершено Гюйгенсомъ, онъ сдѣлалъ и тако-

шагъ, которымъ механика вообще подвинута была впередъ въ такой мѣрѣ, въ какой въ слѣдующую эпоху этого повториться не могло. Его работы касательно маятника, помимо практическаго примѣненія къ часамъ, распадаются на два отдѣла, изъ которыхъ первый, относящійся къ простому маятнику, хотя и имѣетъ значеніе для дальнѣйшаго развитія механики, по не непосредственно для ея общихъ принциповъ. Математическій, или какъ Гюйгенсъ технически называлъ его, простой маятникъ былъ уже предметомъ изслѣдованій Галилея, и со времени работъ основателя динамики о немъ извѣстна уже была теорема объ отношеніи между длинами и соответствующими числами качаній или временами качаній. Дѣйствительный маятникъ есть маятникъ простой, по скольку масса нити сравнительно съ массою, прикрѣпленною къ свободному концу ея, (относительно) незначительна и потому, не имѣя замѣтнаго вліянія на окончательныя заключенія, не принимается въ расчетъ; а также по скольку тѣло, прикрѣпленное къ свободному концу нити, по малости своихъ размѣровъ, можетъ быть принято не иначе какъ за тяжелую точку. Въ фороніи, или, если угодно, въ совершенно абстрактной и чистой механикѣ это приблизительное понятіе экспериментальной физики превращается тотчасъ же въ совершенно опредѣленное представленіе, подчиненной дѣйствию тяжести, математической точки, привѣшенной къ неподвижной точкѣ посредствомъ невѣсомой нити, или, какъ иногда говорятъ, посредствомъ нерастяжимой и неимѣющей массы линіи. Еще математичѣе выражаются, совсѣмъ откидывая нить или линію, и задавая только точку, которая, находясь подъ вліяніемъ ускорительной движущей причины опредѣленной величины, оставалась бы постоянно въ данномъ разстояніи отъ данной неподвижной точки. Другой оборотъ, но уже включающій простое слѣдствіе, именно пребываніе въ одной и той же плоскости, состоитъ въ томъ, что тяжелую точку подчиняють необходимости оставаться на окружности круга, лежащаго въ вертикальной плоскости. Эти различныя представленія лежатъ въ основаніи и Гюйгенсовыхъ изысканій; впрочемъ, слѣдуетъ замѣтить, что то новое понятіе о матеріальной точкѣ, по которому она разсматривается какъ частица массы безконечно-малыхъ размѣровъ, натурально, не было еще технически выработано.

Чтобы получить мѣру времени, нужно было знать длину секунднаго маятника, т.-е. вообще отношеніе продолжительности одного колебанія къ соответствующей длинѣ маятника. Гюйгенсъ и расширилъ теорію простаго маятника одною теоремою, которая давала выраженіе сказанному отношенію для малыхъ колебаній. Но такъ какъ при опредѣленіи этого выраженія не потребовалось никакого

новаго принципа, то мы можемъ здѣсь ограничиться только указаніемъ приѣма, какъ были употреблены въ дѣло старые принципы. По отношенію къ искомому соотношенію легче было обратиться къ циклоидальному маятнику, нежели къ простому круговому. Безконечно малыя колебанія послѣдняго можно было принять за циклоидальныя на томъ же основаніи, на какомъ элементъ кривой замѣняется соотвѣтствующимъ элементомъ дуги круга кривизны.

Гюйгенсъ пришелъ къ теоріи движенія по обращенной циклоидѣ, т.-е. по циклоидѣ, касающейся своею обращенною внизъ вершиною горизонтальной плоскости, выходя изъ установленнаго Галилеемъ движенія по наклонной плоскости. Вообще, онъ показываетъ, что движеніе по кривой линіи можно разсматривать какъ движеніе, происходящее по неограниченному числу прямыхъ линій, т.-е. наклонныхъ плоскостей ¹. Такимъ путемъ онъ легко получаетъ въ совершенно общемъ видѣ теорему, что паденіе съ равныхъ высотъ до одного и того же уровня всегда рождаетъ одинаковыя конечныя скорости, каковы бы ни были пути. Въ самомъ дѣлѣ, если вообразить себѣ надлежащее, ограниченное, или — въ случаѣ кривыхъ поверхностей — неограниченное число горизонтальныхъ плоскостей, то теорема о приобрѣтеніи равныхъ скоростей, очевидно, имѣетъ мѣсто между каждыми двумя такими смежными плоскостями уровня, и тѣло, переходя съ одной изъ нихъ на другую, сохраняетъ уже приобрѣтенную скорость, какъ составную часть своего дальнѣйшаго движенія. Отсюда очевидно, что на всякомъ произвольномъ уровнѣ конечныя скорости, при разнообразнѣйшихъ путяхъ, должны быть равны, если только начало паденія считать съ той же высоты или, что то же, если исходную точку паденія брать на одной и той же параллельной горизонту плоскости. Такимъ же образомъ доказываетъ Гюйгенсъ теорему о поднятіи до первоначальнаго уровня съ такою же общностью ². Пути, какъ въ случаѣ маятника, могутъ быть симметричны или же какъ угодно отличаться другъ отъ друга по обѣимъ сторонамъ, но изъ теоремы, что не только при свободномъ восхожденіи, но и по наклонной плоскости, достигается первоначальная высота паденія, выводится простымъ соединеніемъ наклонныхъ плоскостей совершенно общая необходимость, что восхожденіе, даже когда оно совершается по произвольнымъ кривымъ линіямъ, всегда должно простирается до первоначальнаго уровня.

Чтобы дать болѣе широкое понятіе о дальнѣйшемъ употребленіи

¹ Horol. oscill. pars II. prop. 8.

² Ibid. prop. 9 и 10.

принциповъ движенія на наклонной плоскости, рассмотримъ еще 21 предложеніе той же второй части цитированнаго главнаго произведенія. Въ силу этого предложенія, паденіе по ряду наклонныхъ плоскостей, содержащихся между одними и тѣми же параллелями, совершается быстрѣе или медленнѣе, смотря по тому, больше или меньше наклоненія плоскостей. Заключающееся въ этомъ предложеніи начало служитъ какъ бы мостомъ для перехода къ изслѣдованію паденія по различнымъ частямъ циклоиды. Вкратцѣ его можно выразить такъ: прямолинейное паденіе между двумя параллельными горизонту плоскостями совершается тѣмъ быстрѣе, чѣмъ путь его круче. Но это предложеніе—то же самое, что и Галилеево положеніе, по которому времена паденія при равной разности высотъ пропорціональны длинамъ наклонныхъ плоскостей. Итакъ, въ сущности здѣсь Гюйгенсъ занимается ни чѣмъ инымъ, какъ приготовленіемъ потребной математической оснастки, чтобы изъ принципа движенія по наклонной плоскости вывести движеніе по циклоидѣ. Рѣшеніе этой задачи было довольно трудно; но затрудненія были не механическаго, а математическаго свойства. Въ виду этого, мы ограничимся сообщеніемъ главнаго результата ¹, состоящаго въ томъ, что паденіе и восхожденіе по циклоидѣ требуетъ времени, относящагося къ времени вертикальнаго паденія по ея оси какъ окружность круга относится къ діаметру, и что высота начальной точки качанія не измѣняетъ этого времени. Въ этомъ послѣднемъ и состоитъ таутохронизмъ. Гюйгенсъ, формулируя свою теорему не для полнаго колебанія, но только для движенія внизъ, имѣетъ право весьма характерно выразиться, что самая низшая точка достигается всегда въ одно и то же время, совершается ли движеніе вдоль всей циклоиды, или начиная съ какой угодно ея точки. Свойство это, въ силу котораго какъ самая малая, такъ и самая большія колебанія всегда требуютъ одинаковаго времени, принадлежить, какъ извѣстно, только циклоидѣ, откуда она и ведетъ свое наименованіе таутохроны.

Изъ отношенія таутохронической продолжительности колебанія къ продолжительности свободнаго паденія по оси можно было опредѣлить соотвѣтствующее отношеніе и для бесконечно малыхъ колебаній круговаго маятника съ неограниченнымъ приближеніемъ, и слѣд. для малыхъ колебаній съ достаточно большимъ приближеніемъ. Именно, помощію весьма нетруднаго перехода, можно показать, что время одного малаго колебанія круговаго маятника относится къ времени паденія по двойной длинѣ маятника, какъ окруж-

¹ Ibid. prop. 25.

ность круга относится къ діаметру. Это предложеніе¹ тотчасъ же послужило къ болѣе точному опредѣленію пространства, проходящаго падающимъ тѣломъ въ первую секунду.

57. Все, что объ ученыхъ трудахъ Гюйгенса доселѣ было нами сказано, никоимъ образомъ не относится къ важнымъ изысканіямъ второго класса касательно маятника. Въ самомъ дѣлѣ, какъ скоро мы имѣемъ дѣло не съ простымъ маятникомъ, т.-е. какъ скоро требуется разсмотрѣніе различныхъ массовыхъ частей, изъ которыхъ онъ составленъ, то возникаетъ вопросъ о томъ, какимъ образомъ различныя движенія этихъ частей, не приуроченныхъ къ одинаковымъ путямъ, взаимно измѣняютъ другъ друга. Отвѣтъ на это предполагаетъ знаніе принциповъ, необходимыхъ для опредѣленія взаимнаго дѣйствія массъ, взаимно связанныхъ статически и соотвѣственно этой неизмѣнной связи совершенно различно побуждаемыхъ ускорительною силою тяжести. Если вообразимъ сложный маятникъ въ простѣйшемъ видѣ, предположивъ, напр., какъ въ послѣдствіи дѣйствительно и предполагалъ Яковъ Бернулли, что на линіи маятника находится всего только двѣ тяжелыхъ точки, то ясно, что эта вторая точка, лежащая ближе къ центру, побуждается тяжестью такъ, что если бы она была одна и если бы не было тяжелой точки на концѣ маятника, то дѣлала бы болѣе быстрыя качанія, чѣмъ какія она можетъ производить при данномъ неизмѣнномъ статическомъ сочетаніи. Съ другой стороны, качанія одной конечной точки самой по себѣ были бы медленнѣе, нежели они совершаются на самомъ дѣлѣ при сочетаніи съ быстрѣе движущеюся сосѣднею точкою. Слѣдовательно, побужденія тяжести дѣйствующія въ обѣихъ точкахъ, въ своихъ фактическихъ двигательныхъ результатахъ зависятъ другъ отъ друга и приходятъ въ нѣкотораго рода равновѣсіе. Мы еще лучше выразимся, если скажемъ, что они взаимно слагаются; ибо, какъ уже замѣчено въ § 28, не существуетъ такого сложенія или вообще такой комбинаціи силъ при которой не было бы частію и равновѣсія. Поэтому, при опредѣленіи продолжительности колебанія какого угодно сложнаго маятника, т.-е. вообще произвольнаго, колеблющагося около горизонтальной оси, тѣла, рѣчь идетъ не о чемъ иномъ, какъ о правилѣ сложенія динамическихъ силъ. Съ помощію сравненія чисто статическихъ моментовъ, слѣдовательно, съ помощію простой оцѣнки массъ и скоростей, т.-е. количествъ движенія, этой проблемы разрѣшить невозможно. Кромѣ того, ожидать, что будетъ открытъ вполнѣ общій принципъ сложенія динамическихъ силъ, находящихся въ

¹ Ibid, pars IV, prop. 26.

произвольномъ статическомъ сочетаніи—значить требовать слишкомъ многого, такъ какъ не было еще и рѣчи о примѣненіи параллелограмма силъ къ статическимъ соотношеніямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, и у Гюйгенса подобное общее правило еще не сформулировано, но принципъ его безмолвно введенъ въ употребленіе, и какъ въ этомъ, такъ и въ указаніи на сохраненіе силы и состоитъ главная заслуга того изящнаго рѣшенія вопроса, которое изложено въ четвертой части сочиненія о маятниковыхъ часахъ со многими примѣненіями къ различнымъ математическимъ конфигураціямъ. Самая проблема называется обыкновенно задачею о центрѣ качанія, ибо рѣчь идетъ о нахожденіи такой точки на маятникѣ или вообще въ качающемся тѣлѣ, которая, еслибъ она одна опредѣляла качанія своимъ положеніемъ, и слѣд. составляла простой маятникъ, то качанія совершала бы совершенно такъ же, т.-е. въ то же самое время, какъ и сложный маятникъ. Этотъ центръ колебанія есть такая точка, въ которой можно представить себѣ различныя силы какъ бы соединенными въ нѣкотораго рода среднюю силу, или къ которой онѣ относятся подобнымъ же образомъ, какъ параллельныя силы тяжести къ центру тяжести. Этого рода аналогія, хотя и отдаленно и въ весьма еще смутномъ видѣ, была указана впервые Декартомъ, когда Мерсеннъ предложилъ математикамъ вопросъ о законахъ качанія какого угодно тѣла. Этотъ вопросъ, который легче было предложить, чѣмъ на него отвѣтить, и кромѣ того еще сразу же взятый въ слишкомъ сложной формѣ, занималъ Декарта, Роберваля, а вначалѣ и Гюйгенса, не приводя къ удовлетворительному результату. Тѣмъ не менѣе, возникновеніе идеи о центрѣ колебанія или ажитаціи у Декарта не безъинтересно, и можетъ быть разсматриваемо, какъ первая, хотя еще и весьма шаткая попытка въ направленіи къ разрѣшенію вопроса.

Эту идею, какъ правило рѣшенія задачи, Картезіи высказываетъ въ письмѣ къ Мерсенну отъ марта 1646 г., говоря¹: „Подобно тому какъ во всѣхъ свободно падающихъ тѣлахъ существуетъ центръ тяжести, такъ всѣ тѣла, которыя подъ вліяніемъ тяжести движутся около какой-нибудь точки, имѣютъ центръ ажитаціи (*centre de leur agitation*), и всѣ тѣла, у которыхъ этотъ центръ ажитаціи отстоитъ одинаково отъ точки привѣса, совершаютъ свои качанія въ равныя времена.“ Сверхъ этого, онъ пишетъ напр. и Кавендишу²: „То, что я называю центромъ ажитаціи подвѣшеннаго тѣла, есть такая точка, къ которой различныя коле-

¹ Descartes, *Lettres*, T. III, Paris 1667, письмо 85 стр. 488.

² Ibid. Письмо 86, стр. 493.

банія всѣхъ другихъ частей этого тѣла относятся (rapportent) такъ, что сила, которую каждая часть можетъ имѣть въ отношеніи къ болѣе быстрому или болѣе медленному движенію, чѣмъ дѣйствительное движеніе, всегда встрѣчаетъ сопротивленіе со стороны противоположной силы.“

И изъ этого представленія видно, что Картезіій всегда раньше другихъ приходилъ къ вѣрнымъ взглядамъ тамъ, гдѣ рѣчь шла о чисто статическихъ составныхъ частяхъ механическихъ идей. Но его попытки рѣшить вопросъ динамически, благодаря которымъ онъ вошелъ по этому предмету въ пререканія съ Робервалемъ, были еще менѣе удовлетворительны, чѣмъ чисто фактическіе и безъ методическихъ разъясненій оставленные намеки его противника. Поэтому ближайшее разсмотрѣніе препирательствъ съ Робервалемъ, содержащихся въ дальнѣйшихъ Картезіанскихъ письмахъ, ничуть не помогло бы намъ точнѣе понять эти, дѣлавшіяся ошупью, попытки. Въ самомъ дѣлѣ, Гюйгенсъ, если не говоритъ о вышеуказанной общей идеѣ, долженъ былъ приняться за всю задачу какъ за совершенно новую, и при ея общемъ разрѣшеніи онъ воспользовался началомъ, о которомъ до тѣхъ поръ не имѣли еще никакого понятія.

58. Теорія центра качанія или ажитаціи въ 4 части главнаго произведенія Гюйгенса открывается предположеніемъ, что „когда произвольные грузы приходятъ въ движеніе подъ вліяніемъ тяжести, ихъ общій центръ тяжести не можетъ подняться выше, чѣмъ онъ находился при началѣ движенія.“ Это допущеніе, слѣдующее непосредственно за необходимыми опредѣленіями, выставляется какъ самопонятное, впрочемъ поясняется нѣкоторыми примѣчаніями. Въ числѣ ихъ особенно важно поясненіе, что этимъ положеніемъ утверждается только то, что тяжелое тѣло не можетъ падать вверхъ (*gravia sursum non ferri*). Положеніе это совершенно очевидно для случая одного тѣла; оно очевидно также и для нѣсколькихъ тѣлъ, соединенныхъ негибкими линіями, ибо такія тѣла составляютъ одно тѣло. Но свободныя тѣла можно бы было представить себѣ связанными посредствомъ негибкихъ линій съ ихъ центромъ тяжести такъ, чтобы въ силу этого измѣненія не приходила въ дѣйствіе никакая сила опредѣленной величины, и такимъ образомъ можно бы было сказанное предположеніе считать законнымъ и понятнымъ и для случая несвязанныхъ тѣлъ. Затѣмъ, это начало было бы примѣнимо и къ жидкостямъ и позволяло бы доказать гидростатическія теоремы Архимеда, равно какъ и весьма многія другія механическія воззрѣнія. Оно устраняло бы и химеру возможности вѣчнаго движенія.

Послѣднее указаніе очень важно; ибо оно намекаетъ на связь этого начала съ тою общею идеею, что сила, потребная для поднятія вверхъ, не можетъ возникнуть изъ ничего, но должна быть въ наличности, стало-быть должна быть уже произведена соотвѣтствующимъ паденіемъ. Если-бы было возможно, чтобы массы поднимались выше, чѣмъ на сколько онѣ опустились, то добавка силы, къ которой нужно бы было свести этотъ излишекъ поднятія, была бы необъяснима и нужно бы было допустить, что она возникла изъ ничего.

Второе предположеніе, основывающееся на опытѣ, содержитъ положеніе, что и сложный маятникъ, какъ таковой, долженъ подниматься на ту же высоту, съ которой началось его паденіе. То обстоятельство, что здѣсь паденіе тѣла опредѣляется неподвижною осью, натурально, не позволяло перенести сюда принципъ перваго предположенія, а отсюда и объясняется ссылка на опытъ.

Съ помощію этихъ двухъ предположеній, изъ которыхъ принципиально важно только первое, Гюйгенсъ и рѣшилъ вполнѣ точно задачу, о которой идетъ рѣчь, опредѣливши центръ качанія и его разстояніе отъ оси вращенія, въ сущности, слѣдующими соображеніями. Послѣ нѣкоторыхъ геометрическихъ подготовительныхъ замѣчаній о центрѣ тяжести, онъ, во-первыхъ, устанавливаетъ въ III предложеніи, что произведеніе суммы всѣхъ тѣлъ на высоту, до которой поднялся центръ тяжести, должно равняться суммѣ произведеній изъ отдѣльныхъ тѣлъ на соотвѣтствующія высоты. Затѣмъ, въ предложеніи IV доказывается, что высота поднятія должна оставаться безъ перемѣны, если вообразимъ себѣ, что вначалѣ связанія тѣла, падавшія съ этой высоты, внезапно разъединяются, и будучи разъединены, поднимаются вверхъ въ силу пріобрѣтенной скорости. Соотношеніе, необходимое для опредѣленія центра качанія, выводится въ предложеніи V, и именно на основаніи равенства, которое должно имѣть мѣсто между взаимно сравниваемыми поднятіями и паденіями центра качанія, какъ такового. Едва ли нужно прибавлять, что рассматриваемыя высоты, въ силу Галилеевскаго закона паденія представляются квадратами скоростей, и что эти скорости пропорціональны разстояніямъ отъ оси вращенія. Отсюда объясняется форма конечнаго результата, выраженнаго въ этомъ V предложеніи въ такомъ видѣ: разстояніе центра качанія отъ оси будетъ найдено, если сумму произведеній массъ на квадраты скоростей раздѣлить на произведеніе изъ полной массы на разстояніе *ея* центра тяжести отъ оси. Весь выводъ этого результата, какъ видно, основанъ на примѣненіи того начала, что высота, до которой поднимается центръ тяжести, должна оставаться и послѣ разъединенія такую же, какъ бы еще имѣло мѣсто соединеніе.

Нельзя отрицать, что Гюйгенсовское общее рѣшеніе задачи и помимо свойства его принципиальнаго исходнаго пункта налагаетъ нѣкоторое принужденіе на ходъ мышленія, а рѣшающіе дѣло обороты разсужденій нѣсколько затемняетъ необходимыми окольными путями. Такой характеръ изложенія есть слѣдствіе самаго первоначальнаго принципа рѣшенія задачи, требующаго, не смотря на свою правильность и широту, все-таки разложенія на простѣйшія представленія. Фактъ, что споръ относительно правильности Гюйгенсовской теоріи начался лишь почти черезъ десятилѣтній промежутокъ времени, и что затѣмъ должно было пройти еще болѣе десятилѣтія, прежде чѣмъ могли сколько-нибудь удовлетворительно оріентироваться и при посредствѣ другихъ методовъ успокоиться насчетъ совершенной надежности первоначальнаго рѣшенія,—этотъ фактъ служитъ вѣрнымъ признакомъ того, что вновь проложенный путь очень не легко было контролировать. Иначе, по крайней мѣрѣ, такая даровитая голова, какъ Яковъ Бернулли, не слѣлалъ бы, при первой самостоятельной попыткѣ рѣшенія задачи, ошибки въ важномъ пунктѣ и не пошелъ бы ложнымъ путемъ, когда уже имѣлось Гюйгенсово рѣшеніе. Именно, Яковъ Бернулли разсматривалъ, — какъ мы позднѣе изслѣдуемъ это подробнѣе, — тотальныя скорости тамъ, гдѣ слѣдовало принимать въ расчетъ ихъ элементы. Хотя позднѣе онъ и увидалъ этотъ промахъ, и довелъ рѣшеніе задачи до конца, исходя изъ простыхъ началъ, но сказаннымъ фактомъ онъ тѣмъ не менѣе доказалъ, что Гюйгенсово изложеніе казалось ему первоначально не вполне убѣдительнымъ. Очень неважныя возраженія, выставленныя противъ Гюйгенсова рѣшенія въ *Journal des Savants* 1682 г. одною теперь совершенно неизвѣстною личностью, и поведшія за собою позднѣе вмѣшательство Якова Бернулли, хотя и были совершенно ошибочны, но вниманіе, какое имъ было оказано, все же доказываетъ, что вообще не считали себя удовлетворенными. Поводъ къ недоразумѣніямъ подавалъ принципиальный исходный пунктъ, который, частію самъ по себѣ, частію же при употребленіи его, долженъ былъ вести къ сомнѣніямъ, и могъ вовлечь въ преждевременныя пререканія.

Здѣсь, гдѣ мы имѣли въ виду выставить только то принципиальное направленіе, которое было свойственно Гюйгенсу, мы не можемъ еще предпринять общихъ розысканій, необходимыхъ для всесторонняго разсмотрѣнія—какъ вырабатывалось начало сохраненія живыхъ силъ. Но взвѣсивая безпристрастно Гюйгенсово начало, и способъ, какимъ онъ приводитъ во взаимную связь произведенія изъ массъ на квадраты скоростей, слѣдуетъ признать, что знаменитая идея о сохраненіи живыхъ силъ впервые у него получила опредѣленное,

хотя и не вполне обще формулированное выражение. Основание, благодаря которому Гюйгенсъ долженъ былъ придти къ такому пониманію своего принципа, слѣдуетъ искать, очевидно, въ его наклонности къ Галилеевскому способу представленія.

Но дабы о таковомъ происхожденіи Гюйгенсова принципа, а вмѣстѣ съ тѣмъ и о самомъ ядрѣ теоремы о сохраненіи живыхъ силъ не было никакого сомнѣнія, нужно изслѣдовать въ развитіи ихъ одно промежуточное звено, которое, не смотря на свою невидность, въ высшей степени характеристично для хода этихъ идей.

59. Какъ ни странно это покажется, но Гюйгенсъ смотрѣлъ на теорему, что тяжелое тѣло подъ вліяніемъ извѣстной скорости поднимается по наклонной плоскости до той высоты, падая съ которой оно могло бы приобрести эту скорость, какъ на истину, которая въ ряду дедукцій должна предшествовать сдѣланному Галилеемъ и лишь позднѣе доказанному предположенію о равенствѣ скоростей, приобретаемыхъ при паденіи съ равныхъ высотъ. Во второй части трактата *Horologium oscillatorium* шестое предложеніе, въ которомъ авторъ формулируетъ знаменитое Галилеевское предположеніе о приобретеніи равныхъ скоростей при паденіи съ равныхъ высотъ по различнымъ наклоннымъ плоскостямъ, стараясь совершенно строго доказать это предложеніе, оно сводится на четвертое, въ которомъ была высказана и доказана теорема, что поднятіе до высоты паденія и имѣющая при этомъ мѣсто потеря равныхъ «моментовъ скорости» совершаются въ равныя времена. Гюйгенсъ замѣчаетъ даже по поводу этого шестаго предложенія, что онъ желалъ замѣнить здѣсь посмертную Галилеевскую попытку доказательства лучшимъ выводомъ. Приведенное нами въ § 26 доказательство онъ называетъ не достаточно строгимъ (*ragum ligata*), между тѣмъ какъ и самъ, нисколько не изслѣдуя и не пополняя истиннаго основанія Галилеевской дедукціи, вовсе не удовлетворяетъ требованіямъ, которыя должно предъявить въ отношеніи къ наиболѣе сомнительному пункту. Этимъ основаніемъ, какъ мы нашли въ цитированномъ мѣстѣ, было въ сущности недоказанное предположеніе о статической редукціи силы на наклонной плоскости. Вмѣсто того чтобы выставить этотъ главный сомнительный пунктъ, Гюйгенсъ напротивъ того обращается къ разсмотрѣнію, какъ болѣе простой истины, теоремы о восхожденіи до одинаковой высоты на наклонныхъ плоскостяхъ и изъ нея косвенно выводитъ приобретеніе равныхъ скоростей при паденіи съ равныхъ высотъ. Если бы, такъ заключаетъ онъ, приобретенныя скорости были бы неравны, то отсюда должно бы было вытекать поднятіе, несоотвѣтствующее первоначальнымъ высотамъ, что невозможно. Но эта невозможность зависитъ отъ предложенія, которое само содер-

жить не обоснованное перенесеніе отношеній свободного поднятія на отношенія на наклонной плоскости. Если мы имѣемъ право восхожденіе на равныя высоты принять безъ доказательства для наклонныхъ плоскостей, то имѣемъ право и приобрѣтеніе равныхъ скоростей при свободномъ паденіи съ одинаковыхъ высотъ тотчасъ же перенести на наклонныя плоскости. Скачекъ въ одномъ случаѣ былъ бы не больше чѣмъ въ другомъ. Поэтому, Гюйгенсову дедукцію, которая должна была замѣнять Галилеевскую, слѣдуетъ считать не восполненіемъ пробѣла, но основаніемъ для объясненія того, что въ данную минуту болѣе всего подлежитъ нашему разсмотрѣнію.

Въ самомъ дѣлѣ, мы уже видѣли, что Гюйгенсъ при своемъ доказательствѣ простѣйшихъ законовъ паденія и движенія вверхъ уже съ самаго начала обратилъ вниманіе на невозможность поднятія выше начальной точки, съ которой началось паденіе, какъ на своего рода принципъ. Если бы начало это было уже доказано для свободного паденія, то не было бы надобности въ особомъ доказательствѣ его для наклонной плоскости¹. Поэтому, едва ли можно избѣжать допущенія, что рассматриваемое положеніе было для Гюйгенса уже ранѣе не столько специальнымъ закономъ, сколько необходимою, вслѣдствіе которой силу, необходимую для восхожденія тѣла, слѣдовало бы рассматривать какъ величину, какъ бы накопившуюся при соотвѣтствующемъ паденіи. Позднѣйшее, вышеприведенное примѣчаніе о невозможности вѣчнаго движенія, т.-е. движенія изъ ничего, дѣлаетъ означенную форму мысленія почти совершенною достовѣрностію. Все равно, заключается или нѣтъ источникъ силы, необходимой для движенія вверхъ, дѣйствительно въ предварительномъ паденіи тѣла, все-таки можно вообразить, что равная ей величина возникла именно этимъ способомъ, а въ виду этого, если бы предложеніе о поднятіи до предполагаемой высоты не было бы вѣрно, то придерживаясь простыхъ Галилеевскихъ фундаментальныхъ соображеній о производеніи и о потерѣ скоростей, можно бы было показать избытокъ или оставшуюся безъ употребленія составную часть силы, и этотъ избытокъ или происходилъ бы безъ причины, или оставался бы безъ дѣйствія. Но оба допущенія противорѣчатъ тѣмъ основнымъ предположеніямъ, вслѣдствіе которыхъ гдѣ-либо доказуемое дѣйствіе только и даетъ право говорить о существованіи соотвѣтствующей ему силы. Но разъ эта идея вошла въ сознаніе въ виду нѣсколькихъ частныхъ случаевъ, она должна была вести къ болѣе и болѣе широкимъ обобщеніямъ, какъ скоро представлялись новыя аналогичныя отношенія. Какъ скоро она была признана,

¹ Сравни. предварительное примѣчаніе къ предл. VI, часть II, Horol. oscill.

какъ мы уже указали, говоря о циклоидальномъ движеніи,— для какихъ угодно формъ поднятія по разнообразнѣйшимъ путямъ на какой угодно поверхности, то въ отношеніи къ проблемѣ сложнаго маятника требовался уже только одинъ шагъ, но онъ, конечно, былъ важнѣе, чѣмъ это. могло казаться на первый взглядъ. Этотъ шагъ состоялъ въ томъ, чтобы на мѣсто одного тяжелаго тѣла разсматривать ихъ нѣсколько, или, что для главнаго пункта имѣетъ рѣшающее значеніе, по крайней мѣрѣ, два тѣла и ихъ взаимное отношеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, если идею о поднятіи на одинаковую высоту перенести на двѣ несвязанныя между собою массы, то принципъ нужно будетъ примѣнять какъ къ каждой массѣ въ отдѣльности, такъ и къ обѣимъ. Въ послѣднемъ случаѣ, въ которомъ однакоже вся связь мыслилась какъ связь просто идеальная, натурально, вопросъ относился къ высотѣ центра тяжести. Но разъ предметомъ, къ которому относился бы принципъ о поднятіи, взяли центръ тяжести, то далѣе спрашивалось, не имѣетъ-ли силу этотъ принципъ и тогда, когда сочетаніе двухъ или нѣсколькихъ массъ съ нѣкоторымъ статическимъ препятствіемъ предписываетъ ихъ движенію опредѣленный путь. Сомнѣнія въ утвердительномъ отвѣтѣ не могло быть; ибо основное положеніе, о болѣе широкомъ примѣненіи котораго здѣсь шла рѣчь, было уже принято и испытано для отдѣльнаго тѣла, котораго движеніе статически опредѣлялось наклонною плоскостью. Но всякое относительное фиксированіе можно было разсматривать какъ предначертаніе пути по принципу наклонной плоскости и въ дѣйствительности такъ и разсматривалось Гюйгенсомъ во всѣхъ случаяхъ, въ какихъ мы имѣемъ его спеціальныя о томъ свидѣтельства. Итакъ, уму изслѣдователя, пролагающаго новые пути,—уму, перескакивающему черезъ промежуточные звенья составныхъ частей доказательства, конечно, не казалось смѣлою антиципаціей принятіе этого начала поднятія какъ такой необходимости, въ которой статическая детерминація, т.-е. предписанный заранѣе путь, ничего не могъ бы измѣнить. Но самое соединеніе массъ прежде всего только благодаря тому имѣло значеніе, что связь эта служила средствомъ фиксированія каждой массы или, лучше, каждой массовой части. Иначе, дѣло шло бы только объ одномъ свободномъ тѣлѣ. Единственное обстоятельство, которое во всемъ этомъ могло наводить на сомнѣнія, было взаимодействіе такого рода, которое имѣло мѣсто между массами, и содержало въ себѣ нѣчто большее простаго предначертанія пути. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ каждая масса была связана не только сама по себѣ съ путемъ, но и съ нѣкоторою искусственною скоростью, то для примѣненія основнаго прин-

ципа должно было прежде дать мѣсто нѣкоторому обезпечивающему соображенію, которое впрочемъ также не могло представлять большой трудности. Это взаимное уравниваніе болѣе быстрыхъ или болѣе медленныхъ импульсовъ тяжести, побуждающихъ неодинаково лежащія частицы массы, можно было даже разсматривать какъ статическое ограниченіе, которое, какъ слѣдовало допустить, подобно тому какъ и на наклонной плоскости, не могло произвести въ сущности никакого измѣненія въ величинѣ полного поднятія. Въ самомъ дѣлѣ, хотя отдѣльныя части, подъ вліяніемъ скоростей, принадлежавшихъ ихъ частнымъ путямъ, и должны бы были достигать нѣкоторыхъ высотъ, какъ во взаимно связанномъ состояніи, тѣмъ не менѣе изъ движущей силы тяжести ничего не можетъ быть потеряно для цѣлаго вслѣдствіе того только, что эта сила оказываетъ и распредѣляетъ часть своего дѣйствія не непосредственно, но лишь въ силу статическаго отношенія между различными массами. Этимъ ей предписывается способъ дѣйствія на цѣлое лишь аналогичный способу ея дѣйствія на наклонной плоскости. Правда, то обстоятельство, что горизонтальная ось принуждаетъ всѣ части подниматься по опредѣленнымъ путямъ и при томъ въ неизмѣнномъ взаимномъ положеніи, обуславливаетъ не только редуцированіе силы тяжести по даннымъ направленіямъ, но и проявленіе ея дѣйствія съ относительно предписанными скоростями. Однако, эти отношенія скоростей не представляютъ, по отношенію къ полному проявленію дѣйствія тяжести на все тѣло, никакого препятствія полному дѣйствію, а представляютъ лишь основаніе ея распредѣленію. Поэтому центр тяжести, какъ замѣститель всего тѣла, можно также вообразить подчиненнымъ этому закону восхожденія, и хотя при этомъ первоначальная аналогія болѣе не явствуетъ непосредственно, но указанныя соображенія все же могли быть достаточны для признанія принципа пока мотивированнымъ. Тотъ фактъ, что Гюйгенсъ ввелъ это начало съ такою широтою не какъ аксіому, но по крайней мѣрѣ формально сдѣлалъ его зависимымъ отъ одной изъ простѣйшихъ составныхъ частей его, достаточно доказываетъ, что онъ даже и не ждалъ, чтобы та степень очевидности, какой было достаточно для собственнаго его метода изслѣдованія, имѣла и для кого угодно значеніе окончательнаго доказательства. Только въ отношеніи хода идей не можетъ быть никакого сомнѣнія, что простое предложеніе Галилея дало типъ, по которому Гюйгенсъ болѣе и болѣе отчеканивалъ свои представленія въ общій принципъ, и это весьма натуральное отношеніе необыкновенно важно для упорядоченія дальнѣйшаго хода развитія механики. Безъ указанія на это отношеніе въ развитіи предмета непрерывность была бы какъ бы нарушена, а

впослѣдствіи дѣлающееся все важнѣе и важнѣе основоположеніе о сохраненіи живыхъ силъ казалось бы какъ бы внезапнымъ открытіемъ, между тѣмъ какъ на дѣлѣ зачатокъ его въ сущности встрѣчаемъ уже у Гюйгенса, гдѣ оно тѣсно примыкаетъ къ Галилеевскимъ фундаментальнымъ теоремамъ.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Сложеніе силъ и законы удара.

60. Относительное несовершенство въ дѣлѣ приведенія болѣе сложныхъ теоремъ къ простѣйшимъ истинамъ въ эпоху, когда Гюйгенсъ обнародовалъ лучшіе результаты своихъ изслѣдованій, имѣло главнымъ основаніемъ то обстоятельство, что въ статикѣ, не говоря уже о динамикѣ, еще не овладѣли общимъ принципомъ сложения и разложенія силъ. Впрочемъ, поскольку сложеніе движеній непосредственно было и сложеніемъ силъ, постольку уже Галилей примѣнялъ въ дѣло это начало при изслѣдованіи параболическаго движенія. Равнымъ образомъ и Гюйгенсъ далъ важной съ этой точки зрѣнія идеѣ опредѣленное выраженіе, выставивъ въ качествѣ фундаментальнаго предположенія ¹, что при сочетаніи нѣкотораго равномернаго движенія съ дѣйствіемъ тяжести—и то и другая дѣйствовали независимо другъ отъ друга, т. е. «не мѣшали» другъ другу и дѣйствовали такъ, какъ бы они были раздѣльны. Этимъ самымъ онъ въ сущности выразилъ ту аксіому, пріобрѣтавшую позднѣе все большее и большее значеніе, что при нѣкоторой комбинаціи движущихъ причинъ отдѣльные элементы участвуютъ такъ, какъ бы остальные составныя части не существовали. Но это, конечно, еще не было шагомъ, который бы велъ дальше односторонняго представленія о сложеніи простыхъ явленій движенія. Напротивъ того, эта идея удаляла отъ желаемой цѣли постольку, по скольку она кореннымъ образомъ заставляла пренебрегать взаимными статическими отношеніями комбинируемыхъ силъ и заботилась только о свободномъ эффектѣ движенія. Но дѣйствительное сложеніе силъ должно было касаться прежде всего статическихъ отношеній, и въ этой формѣ принципъ сложения впервые выступаетъ у Вариньона въ его *Projet d'une nouvelle mécanique* (Paris 1687), какъ руководящая точка зрѣнія новаго способа разработки статики и въ посмертномъ, весьма объемистомъ сочиненіи того же автора ², онъ былъ обстоятельнѣйшимъ образомъ примѣненъ къ простымъ машинамъ.

¹ Horol. oscill. pars II, hypothesis III.

² Varignon, *Nouvelle mécanique etc.* 2 тома, Paris 1725.

Въ томъ же самомъ году, въ которомъ Вариньонъ обнародовалъ свой Проектъ новой механики, появилось и въ знаменитыхъ Ньютоновыхъ Началахъ начертаніе способа, какимъ образомъ сложение силъ можно примѣнять къ машинамъ, т.-е. статически ко всевозможнымъ отношеніямъ. Впрочемъ, Ньютонъ не останавливался особенно на этомъ принципѣ и выставилъ его почти какъ самопонятную вещь. Такъ, хотя во второмъ королларіѣ къ третьему закону движенія на сложение и разложеніе силъ и указано какъ на основаніе всей механики; но нигдѣ не встрѣчается намека, чтобы Ньютонъ смотрѣлъ на это универсальное примѣненіе начала какъ на нѣчто исходящее отъ него. Сверхъ того, если припомнимъ, что и Стэвиновское представленіе о равновѣсіи трехъ силъ, соотвѣтствующихъ по величинѣ и направленію тремъ сторонамъ треугольника, близко походило къ статическому принципу сложения, то мы будемъ склонны смотрѣть на все развитіе начала какъ на процессъ, который отнюдь не имѣетъ характера настоящихъ открытій, а потому и не можетъ быть приписанъ исключительно одной личности.

Въ самомъ дѣлѣ, и Вариньонъ заявляетъ съ своей стороны притязаніе не на иное что, какъ только на новую, универсальную форму примѣненій этого принципа. Онъ даже указываетъ на то ¹⁾, что физики уже пользовались этимъ принципомъ при изслѣдованіи косяго удара, и что самъ онъ предпринялъ только объясненіе машинъ при помощи этого принципа какъ нѣчто доселѣ не случавшееся. Интересно его сообщеніе о томъ, что побудило его къ этому предпріятію. Въ предисловіи, написанномъ для его перваго краткаго сочиненія, вышпеоименованнаго *Projet*, онъ рассказываетъ, что его впервые фраппировало сужденіе Картезія, что смѣшно было бы стремленіе свести полиспасть къ рычагу, и побудило къ самостоятельнымъ изслѣдованіямъ. Стремясь къ тому, чтобы распознать происхожденіе (*génération*) равновѣсія, онъ впервые на наклонной плоскости позналъ сложение силъ и понятіе равнодѣйствующей. Но это — источникъ самый натуральный, какой только можно вообразить себѣ. На наклонной плоскости — разложеніе или, другими словами, редуція силы напрашивается всего непосредственнѣе, и этакое отношеніе силы къ заданному направленію есть представленіе еще болѣе простое, чѣмъ сложение двухъ свободныхъ силъ. И нами такое представленіе выставлялось до сихъ поръ какъ первоначальный типъ всякихъ статическихъ отношеній, и мы видѣли что и Галилеево доказательство законовъ паденія по наклонной плоскости и даже его попытка доказательства статическаго отно-

¹ Ibid. Т. I, стр. 8.

шенія на оной, въ сущности, лишь потому вышла недостаточною, что основная и принципиальная природа силовой редукціи не была еще раскрыта.

61. Упомянутый посмертный трактатъ Вариньона излагаетъ, въ двухъ томахъ in—4⁰, объясненіе простыхъ машинъ параллелограммомъ силъ. Первый отдѣлъ содержитъ принципиальное введеніе; остальные посвящены различнымъ простымъ силамъ. Прежде всего принципъ сложенія поясняется ¹ наглядно, и для этого воображаютъ точку, самостоятельно движущуюся по линіи, перемѣщающейся параллельно себѣ самой. Прямое распространеніе этой, еще неопредѣленной и относимой только къ форономическимъ движеніямъ, идеи—на дѣйствительныя силы впервые встрѣчается въ посмертномъ сочиненіи, и авторъ сообщаетъ даже, что этимъ поворотомъ своихъ мыслей ² онъ обязанъ возраженіямъ физиковъ. Но въ сущности онъ даетъ здѣсь не больше того, что и прежде, ибо все его доказательство въ указанномъ мѣстѣ основано на ссылкѣ на то обстоятельство, что движущаяся линія и точка имѣли цѣлью только наглядное уясненіе предмета, и что силы, въ своихъ отношеніяхъ, были независимы отъ этого вспомогательнаго средства воображенія. Тѣмъ не менѣе, это указаніе на самостоятельныя отношенія статическихъ силъ весьма цѣнно, ибо оно ведетъ къ познанію различія между форономическими явленіями движенія и предварительными силовыми комбинаціями.

Какъ ненадежно еще было дѣло во времена Вариньона съ общимъ признаніемъ параллелограмма силъ, показываетъ самый характеръ возраженій, какія пришлось встрѣтить автору новой механики. Такъ, напримѣръ, со стороны Картезіанцевъ было заявлено, что сказанный принципъ нельзя сочетать съ закономъ сохраненія движенія. На это Вариньонъ ³ возражаетъ, что движеніе не только теряется при сложеніи, но что при разложеніи можетъ появляться движеніе, которое прежде не было дано, и такимъ образомъ имѣемъ мѣсто компенсаціи. Эта увертка тѣмъ замѣчательнѣе, что она показываетъ, что Вариньонъ не смогъ усмотрѣть частнаго равновѣсія, въ какое приходятъ движущія причины. Еще и въ наше время этотъ Картезіанскій вопросъ, въ отношеніи къ совершенно новой формѣ вновь ожившихъ и получившихъ широкое развитіе идей о сохраненіи силъ, еще подлежитъ разрѣшенію. Не предвѣряя здѣсь дальнѣйшихъ изслѣдованій, замѣтимъ, что превращеніе возможнаго движенія частію въ статически дѣйствующую силу

¹ Ibid. Т. I, стр. 13, въ леммѣ I.

² Ibid. Стр. 14, въ леммѣ II.

³ Ibid. въ схолиі къ леммѣ II, 1-го отдѣла, стр. 24.

есть такая точка зрѣнія, исходя изъ которой можно сформировать высшій способъ воззрѣнія, во всѣхъ направленіяхъ удобосчитаеый съ принципомъ сохраненія силъ.

Здѣсь нельзя пройти молчаніемъ одного особеннаго геометрическаго перехода, при помощи котораго Вариньонъ успѣлъ придти отъ сложенія силъ къ ученію о моментахъ въ новомъ смыслѣ этого слова, хотя, конечно, и здѣсь не можетъ быть рѣчи о дѣйствительномъ открытіи механическаго характера. Но этотъ переходъ представляетъ особый принципиальный интересъ, такъ какъ онъ вмѣстѣ съ тѣмъ служитъ подготовкою къ той уловкѣ, при посредствѣ которой принципъ рычага можно свести къ параллелограмму силъ. А именно ¹ прежде всего устанавливается геометрическая теорема, что произвольная, внутри или внѣ параллелограмма взятая точка, соединенная съ діагональю и двумя смежными сторонами, какъ основаніями, составляетъ такіе треугольники, что сумма или разность треугольниковъ на сторонахъ равна треугольнику на діагонали. Это соотношеніе, очевидно, имѣетъ мѣсто и тогда, если сказанныя три линіи какъ угодно перемѣщать, сохраняя ихъ направленія. Поэтому, нѣтъ необходимости, чтобы онѣ въ самомъ дѣлѣ сходились въ вершинѣ параллелограмма, но достаточно, чтобы сходились въ ней ихъ направленія. Наконецъ, и въ этомъ нѣтъ надобности, если предположить параллельныя линіи. Слѣдовательно, имѣемъ совершенно общую теорему, что три произвольно расположенныя на плоскости линіи, направленія которыхъ сходятся въ одной точкѣ или же одинаковы, имѣютъ вышеупомянутое свойство по отношенію къ какой угодно точкѣ, предполагая, что величины этихъ линій имѣютъ такое отношеніе, какое существуетъ въ параллелограммѣ при сохраненіи тѣхъ же наклоненій между діагональю и сторонами. Такое соотношеніе между треугольниками есть ничто иное, какъ соотношеніе между произведеніями изъ величинъ линій и ихъ разстояній отъ произвольной точки. Поэтому, если точка находится внѣ линій, заступающихъ боковыя силы того же направленія, то сказанныя произведенія нужно складывать, въ противномъ же случаѣ вычитать, дабы получить величины, равныя произведенію на діагональ. Какъ видно, эта геометрическая подготовка есть ничто иное, какъ построеніе математической формы моментовъ трехъ сходящихся или же параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости. Предположеніе, что точку приложенія силъ можно переносить куда угодно по ихъ направленіямъ, не измѣняя этимъ дѣйствія, — нельзя обойти при подобномъ переходѣ отъ об-

¹ Ibid. Lemma XVI, стр. 84.

щей соединительной точки къ системѣ точекъ приложенія, и однако именно подобный скачекъ отъ общей точки приложенія къ сочетанію трехъ точекъ приложенія всего болѣе нуждается въ оправданіи. Безъ нѣкотораго принципиальнаго толкованія, касающагося именно этого пункта, совершенно невозможно придти къ сложению силъ, точки приложенія которыхъ находятся на линіи, т. е. къ объясненію рычага.

Въ пятомъ отдѣлѣ новой механики Вариньонъ занимается изученіемъ рычага и выпутывается изъ затрудненія тѣмъ, что тотчасъ же устанавливаетъ для сходящихся силъ положеніе, что ихъ равнодѣйствующая проходитъ черезъ точку опоры. Такимъ образомъ, силы разсматриваются такъ, какъ бы онѣ были приложены въ точкѣ пересѣченія ихъ направленій и такимъ образомъ давали нѣкоторую среднюю силу. Но для параллельныхъ силъ, составляющихъ настоящій и первоначальнѣйшій случай проблемы рычага, такой точки пересѣченія повсе не существуетъ. Здѣсь Вариньонъ выпутывается изъ затрудненія, взявъ въ помощь приближеніе къ параллельности, откуда и дѣлаетъ затѣмъ заключеніе къ случаю строго параллельныхъ силъ. Въ этомъ, натурально, кроется подразумеваемое обращеніе къ заключенію отъ непрерывности перехода или, какъ еще можно выразиться, отъ неограниченнаго приближенія къ предѣльному случаю строгой параллельности. Но какъ бы подобные способы заключенія, нынѣ особенно употребительные въ проективной геометріи, ни были плодотворны, но сами по себѣ они никоимъ образомъ не могутъ считаться вполне удовлетворительными, и какъ бы мы ни были къ нимъ расположены, всегда должно требовать общаго и строгаго доказательства надежности этихъ методовъ. Скачекъ въ такихъ пріемахъ неизбеженъ, ибо хотя непрерывность отношеній въ извѣстномъ смыслѣ и сохраняется, но въ нѣкоторомъ особомъ смыслѣ она испытываетъ здѣсь разрывъ или, по меньшей мѣрѣ, употребляя болѣе подходящее выраженіе, нѣкоторое измѣненіе формы. Предположеніе, что параллельныя силы можно разсматривать такъ, какъ бы онѣ пересѣкались на бесконечно большомъ разстояніи, требуетъ не только поясненія, но и доказательства. Его можемъ допустить лишь по стольку, по скольку серьезно откажемся держаться этой противорѣчивой фикціи ради простаго удобства языка, прямо признавъ, что неограниченно малое уклоненіе направленія не есть параллельность, но лишь отношеніе неограниченно близкое къ параллельности. Но тогда понадобится перекинуть мостъ черезъ пропасть, какая, слѣдуя строгому понятію, существуетъ между тождествомъ направленій и разницею въ нихъ, между пересѣченіемъ и непересѣченіемъ. Непрерывность количественнаго пе-

рехода, конечно, должна оставаться вспомогательнымъ средствомъ; но переходъ къ нулю, при болѣе глубокомъ размысленіи, есть такой же скачекъ, какъ и предположеніе нѣкотораго содержанія или нѣкотораго отношенія въ безконечно большемъ. Но распространяться объ этомъ болѣе здѣсь мы не будемъ, такъ какъ приличествующее для общаго разрѣшенія этого и подобныхъ сомнѣній мѣсто найдется лишь тогда, когда пойдетъ рѣчь объ анализѣ безконечно малыхъ и о свойственныхъ ему понятіяхъ, имѣющихъ приложеніе въ механикѣ.

62. Теорія моментовъ въ современномъ значеніи этого слова есть не болѣе какъ расширенное ученіе о рычагѣ. Поэтому, если взять исходнымъ пунктомъ вышеприведенную геометрическую теорему объ отношеніи произвольной точки къ указаннымъ тремъ линіямъ параллелограмма и, удерживая приличествующія отношенія величинъ, перейти къ предѣльному случаю параллелизма съ неограниченнымъ приближеніемъ, то можно выбрать эту произвольную точку на линіи средней силы, и такимъ образомъ, сообразно и этому способу возвращенія, получится теорема о рычагѣ, т. е. о равенствѣ статическихъ моментовъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ разность вышеозначенныхъ произведеній (т. е. произведеній изъ разстояній на линіи боковыхъ силъ) должна быть равна нулю, такъ какъ разстояніе взятой точки отъ линіи средней силы есть нуль. Въ сущности, этотъ способъ возвращенія ничѣмъ не отличается отъ уже приведеннаго; въ самомъ дѣлѣ, когда Вариньонъ беретъ исходнымъ пунктомъ рычагъ и подъ прямымъ угломъ приложенныя параллельныя силы разсматриваетъ лишь при безконечно маломъ уклоненіи отъ этого положенія, — онъ дѣлаетъ при этомъ совершенно то же самое, какъ если бы для вывода теоремы о равенствѣ моментовъ онъ взялъ за основаніе оба разстоянія сказанной произвольной точки въ ихъ неограниченномъ приближеніи къ образованію уже не ломанной, а строго прямой линіи. Въ томъ и другомъ случаѣ точка пересѣченія трехъ силъ должна неограниченно удаляться, и при этомъ неизбѣжно перемѣщеніе первоначальнаго мѣста приложенія силъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ параллелограммѣ при помощи непрерывнаго перехода можно получить тождество направленій только какъ совпаденіе въ одну линію, но не какъ параллельность силовыхъ направленій внѣ другъ друга лежащихъ. Только когда позволимъ себѣ изъ одной точки приложенія сдѣлать три, можно будетъ исполнить этотъ переходъ.

Только что сдѣланныя замѣчанія показываютъ, что приведеніе начала рычага къ началу сложенія силъ при всѣхъ обстоятельствахъ требуетъ отчета о томъ, какъ посредствуется силовое отношеніе

между различными точками приложения. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы пожелали сдѣлать примѣненіе и изъ перенесенія силы по ея направленію, какъ изъ вспомогательнаго средства, то должны бы были какимъ бы то ни было образомъ высказаться и о томъ, какъ можно бы было воображать новую точку приложения связанною съ первоначальною и какъ такимъ образомъ было бы достигнуто въ точности то же самое дѣйствіе, какъ будто бы приложение не было бы измѣнено. Въ смыслѣ иномъ, чѣмъ сохраненіе совершеннаго тождества первоначально имѣвшагося въ виду эффекта, принципъ перенесенія силъ, строго говоря, даже совсѣмъ не могъ бы быть и допущенъ. Поэтому если принять, наприм., что между данною и новою точкою приложения находится негибкая и несжимаемая линія, такъ что тяга или давленіе силы по направленію этой линіи не можетъ дѣйствовать на новую точку или двигать ее безъ того, чтобы не возбуждать такимъ же точно образомъ и первоначальную точку приложения, то возможность переноса этой, прежде всего подлежащей изслѣдованію, силы, конечно, будетъ приведена въ полную ясность. Но одна изъ двухъ другихъ силъ, дѣйствующая не по направленію этой неизмѣняемой линіи, должна чрезъ посредство этой послѣдней совершенно иначе возбуждать первоначальную точку приложения. Итакъ, если вообще хотимъ привести въ связь эти три силы, то должны сдѣлать нѣкоторый скачекъ, и заставить слѣдующую силу непосредственно дѣйствовать на новую точку приложения, представляющую точку пересѣченія, и вмѣстѣ съ этимъ бездоказательно предположить, что новая точка приложения можетъ замѣнять старую въ каждомъ отношеніи и въполнѣ, въ отношеніи ко всевозможнымъ силамъ. Но послѣднее, очевидно, есть представленіе, не обладающее ясностью самопонятной аксіомы. Въ виду этого, весь этотъ пріемъ оказывается сомнительнымъ, даже недозволительнымъ, и слѣдовательно попрежнему принципиально предлежитъ вопросъ объ уясненіи, въ строжайшей формѣ, взаимныхъ дѣйствій силъ на систему, представляющую не одну точку, но прежде всего, по крайней мѣрѣ, двѣ точки, соединенныя неизмѣняемою линіею. По поводу Пуансотова введенія новаго понятія о силовой парѣ мы увидимъ, что рѣшеніе означенной задачи имѣетъ не малое значеніе и для въполнѣ яснаго формированія системы механики, и здѣсь же умѣстно замѣтить, что особенность сочетанія двухъ параллельныхъ, равныхъ, но противоположныхъ силъ, была бы познана гораздо раньше, если бы основныя отношенія на рычагѣ были бы изслѣдованы глубже и если бы проблему сложения параллельныхъ силъ въ ея наиболѣе общей и простѣйшей формѣ разсматривали бы какъ самостоятельную задачу. Но какъ, напро-

тивъ того, частію оставались при архимедовскомъ приѣмѣ, гдѣ съ самаго начала предполагается рычагъ, а не изслѣдовали систему двухъ точекъ, какъ простѣйшую послѣ отдѣльной точки, частію же сложение силъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку, переносили почти непосредственно на нѣсколько точекъ приложенія, то и теряли болѣе и болѣе изъ виду необходимость другихъ оправдательныхъ приѣмовъ. Именно, упустили изъ виду необходимость болѣе широкой абстракціи. Полагали, что въ принципѣ сложения для обыкновеннаго способа примѣненія обрѣли уже послѣднее воззрѣніе, между тѣмъ какъ на дѣлѣ именно сложение силъ, приложенныхъ не къ одной и той же точкѣ, въ отношеніи строгости доказательствъ, оставляло желать еще весьма многого.

Этимъ-то, а не просто необходимостью переходить къ предѣльному случаю параллельности при помощи неограниченнаго приближенія, весьма легко объясняется тотъ старый фактъ, имѣющій силу еще и въ настоящее время, что во взаимныхъ отношеніяхъ началъ рычага и сложения, какъ разъ то, что всего проще формулируется съ точки зрѣнія одного начала, представляетъ величайшія трудности съ точки зрѣнія другаго. На рычагѣ мы имѣемъ различныя точки приложенія, и сложение параллельныхъ силъ есть простѣйшій случай. Въ свободномъ же представленіи сложения силъ по образу параллелограмма легчайшій случай тотъ, когда силы приложены къ одной общей точкѣ, и слѣдовательно не могутъ быть параллельными. Правда, при болѣе глубокомъ разсмотрѣніи оказывается, что отнюдь нельзя дать двухъ исходныхъ пунктовъ, какъ средствъ къ строгому уразумѣнію дѣла, и что хотя намъ и кажется, что мы имѣемъ въ виду только одинъ изъ этихъ принциповъ, къ нему примѣшивается само собою, безъ нашего вѣдома, нѣчто изъ другаго начала. Впрочемъ, потребнаго въ этомъ отношеніи расчлененія казаться здѣсь пока мы не можемъ.

63. Вообще начало сложения и разложенія силъ должно было представляться весьма удобнымъ исходнымъ пунктомъ статическихъ и динамическихъ изысканій. То обстоятельство, что оно нашло себѣ толкованіе въ принципиальномъ введеніи составившаго эпоху Ньютона творенія, безъ сомнѣнія, еще болѣе, чѣмъ усилія Вариньона, способствовало тому, что отнынѣ оно болѣе и болѣе дѣлалось научною основою систематическаго изложенія. Оно было не только въ достаточной мѣрѣ подготовлено, но соотвѣтствовало и наиболѣе естественной потребности, поскольку оно учило, не только величину силъ представлять какъ результатъ сложений и вычитаній, но и направленіе ихъ понимать, какъ совокупленіе различныхъ побудовъ направленія. При одинаковомъ направленіи силъ, вели-

чины ихъ, не колеблясь, складывали или вычитали одну изъ другой уже ранѣе; такъ поступалъ, напримѣръ, Валлисъ въ 1668 году, въ одномъ даже не простомъ случаѣ при установленіи законовъ неупругаго удара. Этотъ же авторъ уже тогда упоминалъ, что и косоу ударъ слѣдовало бы трактовать аналогичнымъ образомъ. Самъ Вариньонъ указывалъ на то, что физики трактовали косоу ударъ по принципу сложенія движеній. Поэтому—какъ новый шагъ—требовалось собственно только болѣе общее формулированіе и болѣе широкое примѣненіе къ простымъ машинамъ. Болѣе абстрактное пониманіе механическаго начала сложенія прокладывало себѣ дорогу, какъ необходимость, отправляясь изъ трехъ исходныхъ пунктовъ, а именно изъ Галилеевскаго сложенія силъ въ параболическомъ движеніи, затѣмъ изъ Стэвиновскаго треугольника силъ, и, наконецъ, изъ вопросовъ о комбинаціи силъ при ударѣ, а потому на завершеніе этого обобщенія слѣдуетъ смотрѣть скорѣе какъ на плодъ времени, нежели какъ на продуктъ творческой производительности одной личности. Потому вопросы о первенствѣ или о первоначальномъ виновникѣ этого начала не имѣютъ здѣсь почти никакого интереса. Впрочемъ, у Лагранжа ¹ находимъ указаніе, что Вариньонъ не обладалъ еще этимъ началомъ въ 1685 году, какъ ошибочно значится въ началѣ его посмертнаго произведенія, но что онъ даже и тогда примѣнялъ къ полиспаду еще начало рычага. Но именно примѣненіе начала рычага къ объясненію полиспаста, даже по собственному замѣчанію Вариньона, должно было стать тѣмъ пунктомъ, который онъ покинулъ благодаря замѣчанію Декарта, послѣ чего и обратился къ началу сложенія. Итакъ, временемъ опубликованія Проекта новой механики слѣдуетъ считать 1687 годъ. Замѣчательно, что въ томъ же году появляется не только главное твореніе Ньютона, но и небольшое сочиненіе Lami, котораго весьма рациональное заглавіе *Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments des mécaniques* соотвѣтствуетъ его содержанію. Достойно оцѣненный Лагранжемъ, въ цитированномъ мѣстѣ, ходъ мыслей свидѣтельствуетъ именно о натуральности развитія. За исходный пунктъ принимается, что соединеніе двухъ движеній въ одно среднее встрѣчаетъ препятствіе. Тогда силы, которыя произвели бы эти движенія, или скорѣе среднее между ними движеніе, будутъ относиться именно такъ, какъ если бы движеніе въ первое мгновеніе дѣйствительно имѣло мѣсто. Этотъ виртуальный пріемъ, при помощи нѣкотораго рода непрерывности связывающій статическое, покоющееся отношеніе съ первымъ какъ бы со-

¹ Мéc. anal. т. I, 2 изд. 1811, первое отд., секція I, членъ 13.

сѣднимъ состояніемъ движенія, свидѣтельствуешь о томъ, что виновникъ его натолкнулся на главный пунктъ, о которомъ всегда и будетъ идти рѣчь въ вопросѣ о параллелограммѣ силъ. Едва ли когда-либо удастся инымъ способомъ связать явленіе движенія съ строго статическимъ состояніемъ. Это средство тотчасъ же и дало равновѣсіе трехъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, или, если угодно, статическій эквивалентъ двухъ силъ, совмѣстному дѣйствію которыхъ противопоставлено препятствіе. Хорошо было выбрано и формулированіе, что эти силы по закону простой комбинаціи движеній должны относиться обратно пропорціонально синусамъ угловъ, которые они составляли съ направлениемъ средняго движенія. Равнымъ образомъ и примѣненіе сдѣлано было къ наклонной плоскости и къ рычагу. Эта всеобщность примѣненій начала служить, по меньшей мѣрѣ, свидѣтельствомъ сродства его съ закономъ наклонной плоскости. А затѣмъ она подтверждаетъ также и наше общее мнѣніе, что не требовалось какой-либо необыкновенной виртуозности, не говоря уже — гениальнаго полета мысли, чтобы совершить тотъ шагъ, который привелъ къ теоремѣ о статическомъ сложении силъ. Уже простое понятіе о равновѣсіи трехъ или нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, могло бы навести на мысль о статической эквивалентности. Тѣмъ не менѣе, фактически исходнымъ пунктомъ было разсмотрѣніе движеній со стороны форономической, а насколько основательно эта сторона дѣла была уже обследована, мы ясно видѣли на Робервалевской гениальной разработкѣ этого предмета.

64. Подъ вліяніемъ Архимедовскихъ традицій начало рычага и въ новое время рассматривалось какъ основаніе всей механики. Галилей слѣдовалъ этому же воззрѣнію, хотя на ряду съ этимъ онъ выставилъ свои болѣе естественные способы представленія. Гюйгенсъ, особенно высоко цѣнившій античныя традиціи, своей попыткою улучшить архимедовское доказательство теоремы о рычагѣ, достаточно ясно доказалъ, что законъ этотъ онъ еще считалъ краеугольнымъ камнемъ механики. Впрочемъ, его приведенное нами въ § 36 *Demonstratio aequilibrīi bilancis* отличается всецѣло неподвижнымъ характеромъ античныхъ способовъ доказательства. Исходнымъ пунктомъ служитъ у него равновѣсіе плоскости, которая должна находиться въ равновѣсіи около лежащей на ней оси, если грузы по обѣимъ сторонамъ этой оси расположены симметрично. Натурально, что въ основаніе положено и здѣсь Архимедово допущеніе о равновѣсіи равнообремененнаго равноплечаго рычага, какъ это ясно и выражено. Эта ось есть линія рычага, и должно быть доказано ея равновѣсіе около нѣкоторой, находящейся на ней, но еще подле-

жащей опредѣленію, точки. Эта точка опредѣляется какъ пересѣченіе первой оси со второю, около которой плоскость также должна быть въ равновѣсіи въ силу извѣстнаго распредѣленія грузовъ. Но это распредѣленіе—Архимедовское, только съ тѣмъ существеннымъ отъ него отличіемъ, что оно имѣетъ мѣсто не на линіи рычага, по отношенію къ которой идетъ доказательство, но на двухъ линіяхъ, перпендикулярныхъ въ двухъ точкахъ приложенія и лежащихъ въ разсматриваемой горизонтальной плоскости. Такъ какъ такимъ образомъ въ отношеніи къ линіи рычага какъ къ оси имѣетъ мѣсто совершеннѣйшая симметрія и каждая изъ обѣихъ перпендикулярно проведенныхъ линій, въ силу основнаго предположенія, должна быть въ равновѣсіи, то въ равновѣсіи должна находиться и сама плоскость, а именно по отношенію къ разсматриваемой оси. Доказательство, какъ устанавливается равновѣсіе около второй оси и слѣдовательно около самой точки опоры, предполагаетъ уже нѣчто большее простыхъ слѣдствій симметріи и основнаго допущенія, ибо непосредственно не очевидно, чтобы равное разстояніе отъ оси при несимметричномъ положеніи должно было опредѣлять равновѣсіе плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, если вообразить, что проведена косвенно пересѣкающая соединительная линія такихъ двухъ грузовъ, то они во всякомъ случаѣ будутъ въ равновѣсіи на этой линіи, разсѣкаемой осью пополамъ; но непосредственно не ясно, чтобы они приводили и плоскость въ равновѣсіе около этой косвенно лежащей оси. И Лагранжъ ¹ не удовлетворяется этимъ Гюйгеновымъ опытомъ доказательства. Но даже если бы такой способъ доказательства и можно было считать строгимъ, онъ никоимъ образомъ не соотвѣтствовалъ бы натуральному переходу отъ простѣйшаго къ болѣе сложному. Линія и имѣющія мѣсто на ней отношенія—предметъ болѣе простой, чѣмъ плоскость съ большимъ на ней просторомъ для разныхъ возможностей. Тѣмъ не менѣе, опредѣленіе равновѣсія около нѣкоторой точки при посредствѣ доказательства равновѣсія около двухъ въ этой точкѣ пересѣкающихся осей само по себѣ имѣетъ большой интересъ, если обратить вниманіе на опредѣленные математическіе методы, которые во всѣхъ заключеніяхъ разсматриваютъ точку не какъ первое и простѣйшее, но какъ слѣдствіе комбинаціи болѣе неопредѣленныхъ мѣстъ. Подобный способъ воззрѣнія находитъ себѣ оправданіе и въ механикѣ; но этотъ путь, который учить разсматривать точку въ извѣстномъ смыслѣ какъ нѣчто наиболѣе конкретное, соединяющее въ себѣ наибольшее число опредѣленій, а прямую линію и плоскость какъ болѣе отвлеченные образы,

¹ Мѣс. anal. т. I, первое отд., секція I, чл. 1.

можетъ быть только тогда надежнымъ, когда мы уже освоились съ необходимыми принципами противоположнымъ приѣмомъ. Иначе въ механикѣ было бы предпринято нѣчто подобное тому, какъ если бы принципы геометріи захотѣли сдѣлать болѣе надежными, съ самаго начала разсматривая прямую какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, а точку какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ линій.

Въ вышеприведенныхъ изслѣдованіяхъ заключается уже рѣшеніе вопроса о принципиальномъ порядковомъ отношеніи между сложениемъ силъ и закономъ рычага. Первое — есть шагъ къ простѣйшему и ведетъ къ познанію машиномѣрной комбинаціи. Но самый рычагъ есть уже машина, между тѣмъ какъ простое сложение двухъ силъ, дѣйствующихъ на точку, или совсѣмъ не можетъ быть разсматриваемо какъ таковая, или, въ крайнемъ случаѣ, его можно разсматривать какъ наипростѣйшій типъ цѣлаго рода. Впрочемъ и точка, при посредствѣ которой двѣ силы соединяются, есть уже родъ системы и, такъ сказать, механическое орудіе. Она служитъ причиною того, что обѣ силы могутъ вступить во взаимное отношеніе, и что онѣ могутъ дѣйствовать частію противоположно другъ другу, частію въ одинаковомъ смыслѣ. Между тѣмъ, уже двѣ силы, вступающія во взаимное отношеніе чрезъ посредство твердой линіи, образуютъ менѣе простую систему, и такимъ образомъ, конечно, рычагъ, который, какъ бы на него ни смотрѣть, представляетъ ничто иное, какъ подобную же систему, опредѣляемую линіей, въ силу своей болѣе сложной природы, ни въ какомъ случаѣ не можетъ претендовать на роль послѣдняго принципа. Очевидно, равновѣсіе равноплечаго рычага не есть столь же простое представленіе, какъ равновѣсіе равныхъ и противоположныхъ силъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку. Представленіе о процессѣ на равноплечемъ равнообремененномъ рычагѣ и въ самомъ дѣлѣ можетъ быть разложено на частныя представленія, въ которыхъ нельзя обойти равновѣсія противоположныхъ побудовъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку приложенія. Это обстоятельство указываетъ на сложную природу лишь относительно простой аксіомы, которая, слѣдовательно, по своему свойству, не можетъ быть принята за дѣйствительную, въ строгомъ смыслѣ слова, аксіому. Галилей, прибѣгая и въ этомъ случаѣ почти произвольно къ виртуальному началу, достаточно ясно указалъ этимъ истинное направленіе, въ которомъ движется натуральный способъ представленія, хотя лично и не извлекъ изъ него болѣе отдаленныхъ послѣдствій и не разорвалъ вполне съ чисто относительными принципами.

65. Можно бы было спросить, учить-ли начало сложения и тому, какъ опредѣляютъ другъ друга силы, дѣйствующія не на одну, а на различныя массы. Въ случаѣ отдѣльнаго тѣла или матеріальной

точки, которую надлежит имѣть въ виду, когда рѣчь идетъ о параллелограммѣ силъ, нѣтъ рѣчи о двойственности побуждаемой массы, хотя могущія имѣть мѣсто силы тяги или давленія, дѣйствующія на точку, и могутъ сами быть представляемы различными грузами. Напротивъ, сложение силъ на рычагѣ является намъ двойственностью или множественностью массъ, на которыя силы дѣйствуютъ, какъ обыкновеннѣйшій случай, между тѣмъ какъ болѣе абстрактное представленіе о приложенныхъ силахъ, которыя могутъ быть даже представлены пружинами, отходитъ уже на задній планъ. Поэтому не линія рычага разсматривается, подобно точкѣ или отдѣльному тѣлу, какъ система, но непосредственно представляютъ себѣ оба груза или вообще обѣ массы какъ настоящій предметъ приложенія силъ. Съ этой точки зрѣнія, различія массъ разсматриваются какъ нѣчто посредствующее, при помощи чего равныя или же неравныя силы вступаютъ во взаимныя отношенія. Соотвѣтствующимъ образомъ и для параллелограмма силъ можно бы было вмѣсто одного тѣла ввести два, соединенныя между собою непосредственно и нераздѣльно, и можно бы было при всякой разницѣ массовыхъ отношеній принимать размѣры и массы неограниченно малыми. Тогда можно бы было вообразить себѣ, что каждая часть подобной системы побуждается различною скоростью, и чтобы избѣгнуть того возраженія, что эта система въ сущности все же есть единая масса, можно бы было допустить, что обѣ различныя массовыя частицы побуждаются отдѣльно. Такъ какъ переносъ движенія отъ одной частицы къ другой, будучи процессомъ во времени, необходимо требуетъ нѣкоторой, хотя и весьма малой продолжительности, то оба тѣльца могутъ быть возбуждены, каждое особымъ образомъ, прежде чѣмъ наступитъ компенсація; и разложеніе массовой частицы, служащей, впрочемъ, общею матеріей для дѣйствія двухъ силъ, въ нѣкоторую, такъ сказать, дуалистическую систему дѣлается постижимымъ. Но если перенестись въ область чистѣйшей механической абстракціи и оперировать надъ простыми точками приложенія, то всякую точку, служащую объектомъ двухъ силъ, можно равнымъ образомъ разложить на двѣ точки, лежащія неограниченно близко другъ къ другу, и изъ коихъ каждая побуждается одною изъ силъ. Неизмѣняемое соединеніе, въ которомъ представляютъ себѣ эти неограниченно близкія точки, образуетъ систему, и давленіе или тяга, которая должна имѣть мѣсто между обѣими точками, прямо дѣлается очевиднымъ то частное равновѣсіе двухъ не совпадающихъ или же вполне взаимно уничтожающихся силъ, которое можетъ подлежать разсмотрѣнію кромѣ свободного эффекта движенія. Пока имѣется въ виду только какъ бы недѣлимый

предметъ совокупнаго силоваго дѣйствія, до тѣхъ поръ не имѣется подобнаго повода мыслить о внутреннихъ напряженіяхъ и о превращеніи эффекта движенія въ статическій эффектъ.

Но эта новѣйшая точка зрѣнія должна служить здѣсь только къ уясненію силоваго дѣйствія, опредѣляемаго двойными массами, какъ такой схемы, которая подъ разными видами представляетъ новую и существенную основную форму механическаго знанія. Въ статикѣ такое взаимное отношеніе различныхъ массъ въ формѣ посредства, связывающаго чисто-статическія силы, уже давно имѣло своего представителя, и рычагъ можно разсматривать какъ простѣйшій типъ этого рода соотношеній. Тѣмъ не менѣе, только установленіе законовъ удара неупругихъ тѣлъ дало еще простѣйшій путь для опредѣленія роли количества матеріи въ силовомъ сочетаніи. Только эти законы сдѣлали непосредственно понятнымъ и доказуемымъ техническое понятіе количества движенія, т. е. суммарнаго эффекта, опредѣляемаго количествомъ движимыхъ частицъ и скоростью. Хотя это понятіе было статическою отвлеченностью и появилось уже вмѣстѣ съ виртуальнымъ принципомъ, но самое общее оправданіе могло найти себѣ лишь въ теоріи соединеннаго движенія почти неупругихъ тѣлъ. Въ случаѣ удара такихъ тѣлъ имѣются два вначалѣ совершенно изолированныя количества движенія, производящія третье эквивалентное количество движенія, т. е., другими словами, существуютъ два количества движенія, слагающіяся въ третье, слѣдуя приэтомъ, какъ извѣстно, общему принципу сложенія, выражающемуся параллелограммомъ силъ для всякаго дѣйствія подъ косымъ угломъ. Впрочемъ, при ударѣ имѣютъ обыкновеніе прежде всего разсматривать центральную встрѣчу, т. е. тождество или совершенную противоположность направленій. Но это не мѣшаетъ выражаться общѣе и какъ въ отношеніи прямого, такъ и въ отношеніи косаго удара, говорить о сложеніи силъ или количествъ движенія совершенно аналогично общему принципу сложенія. И этотъ послѣдній даже можно понимать такъ, чтобы онъ включалъ и частные случаи, когда уголъ равенъ нулю или двумъ прямымъ.

Изъ этого изслѣдованія можно усмотрѣть, что задачу о сложеніи силъ можно понимать въ весьма общемъ смыслѣ, который ведетъ далѣе представленій, обыкновенно связываемыхъ съ параллелограммомъ. Но важнѣйшій шагъ долженъ хватать еще дальше, позволяя даже сложеніе живыхъ силъ представлять какъ основную форму, аналогичную соединенію динамическихъ дѣйствій. Черезъ это ученіе объ ударѣ упругихъ тѣлъ становится мостомъ къ принципиальнымъ воззрѣніямъ и вся теорія удара являетъ свой фундаментальный характеръ и свое значеніе для всей совокупности механическаго мыш-

ленія. Вмѣстѣ съ тѣмъ историческое развитіе ея находитъ настоящее себѣ мѣсто, уясняя намъ прогрессъ самонужнѣйшихъ началъ. Вся динамика Галилея основывалась на предположеніи, что прежде всего дѣло лишь въ томъ, чтобы изяснить силовыя дѣйствія только на одну единичную массу. Введеніе двойственности массъ, чрезъ посредство коихъ силы дѣйствуютъ другъ на друга, должно было породить представленія и задачи втораго и высшаго порядка.

66. Задача объ опредѣленіи законовъ удара совпадаетъ съ болѣе общею проблемой объ установленіи наиважнѣйшихъ законовъ движенія двухъ взаимодействующихъ массъ. Отскакиваніе упругихъ тѣлъ и кратковременность взаимнаго дѣйствія суть характеристическія обстоятельства такого удара, при которомъ упругость играетъ рѣшительную роль. Если же этотъ послѣдній родъ разсматривать не какъ ударъ въ настоящемъ смыслѣ, какъ и сдѣлалъ Гюйгенсъ, то и другой родъ удара, при которомъ массы остаются вмѣстѣ, очевидно, дастъ право равнымъ образомъ разсматривать такое соединеніе силъ такъ, какъ бы оно имѣло нѣкоторую иную причину, а не предварительное столкновеніе. Два неравные груза, соединенные нитью, перекинутою чрезъ блокъ, и находящіеся подъ вліяніемъ вертикальнаго дѣйствія тяжести, изображаютъ также основную схему силовой передачи посредствомъ двухъ массъ. Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ мы имѣемъ передъ собою тотъ общій типъ, который подлежитъ разсмотрѣнію и при ударѣ, если только послѣдній представить себѣ въ надлежащей общности и независимо отъ разнообразныхъ, посредственныхъ или непосредственныхъ отношеній, въ силу которыхъ массы могутъ дѣйствовать другъ на друга. Сравненіе ударнаго соотношенія съ колебаніемъ грузовъ на рычагѣ,—сравненіе, данное Реномъ въ его изложеніи законовъ удара (1668), достаточно ясно показываетъ, о какомъ общемъ понятіи въ сущности шла рѣчь. И тѣмъ не менѣе—цѣлесообразно имѣть въ виду настоящій ударъ прежде всего въ его спеціальной формѣ, помня, что о немъ можно вести рѣчь лишь тогда, когда подлежитъ разсмотрѣнію лишь кратковременный уравнивающий переносъ движеній какъ преходящій процессъ. Но если предлежитъ такое отношеніе, въ которомъ сообщеніе движущихъ силъ происходитъ непрерывно и поддерживается какъ бы въ непрерывномъ теченіи, тогда уже имѣется на-лицо болѣе общая аналогичная схема, но не спеціальныи случай настоящаго удара.

Что же касается собственно удара какъ мгновеннаго и по своей природѣ преходящаго дѣйствія, то уже Галилей положилъ не мало труда на изслѣдованіе внутренней его сущности. Затѣмъ и Декартъ сдѣлалъ неудачную попытку и установилъ рядъ законовъ

удара, въ которыхъ ничто важное не согласно съ истиной. Наконецъ, истинные законы удара были сообщены тремя изслѣдователями, когда задача эта была предложена на состязаніе Англійскимъ Королевскимъ Обществомъ (1668), и затѣмъ были обнародованы въ органѣ этого Общества, въ Философскихъ Транзакціяхъ. Хотя Гюйгенсъ прислалъ свое рѣшеніе и позднѣе нѣсколькими недѣлями, чѣмъ два другіе автора, Валлисъ и Рень, а именно лишь въ началѣ января 1669 г., такъ что вещественно первенство принадлежитъ не ему, однако же это еще не большая бѣда и не мѣшаетъ считать его работу главною представительницею предмета. По внутреннимъ основаніямъ это окажется необходимо доказаннымъ. Тѣмъ не менѣе, прежде всего мы должны нѣсколько ближе рассмотреть не безъинтересныя попытки Галилея и коснуться и Картезіанскихъ точекъ зрѣнія, прежде чѣмъ возможно будетъ объяснить, какимъ образомъ и въ этомъ трудномъ вопросѣ шагъ, всего дальнѣе хватающій съ самаго основанія динамики, сдѣланъ былъ также Гюйгенсомъ.

67. Хотя Галилей, не смотря на всѣ усилія, и не могъ найти самыхъ законовъ удара, тѣмъ не менѣе нѣкоторыя изъ его идей правильны, а многія изъ нихъ, не смотря на отсутствіе прямого результата, имѣютъ высокій интересъ для дальнѣйшихъ судьбъ динамическихъ способовъ представленія.

Всего обстоятельнѣе трактуетъ Галилей о природѣ ударнаго дѣйствія въ посмертномъ шестомъ днѣ *Discorsi*, копію съ котораго, по смерти автора, получилъ Вивіани отъ его сына. Впрочемъ, нѣсколько страницъ объ ударѣ находится и въ концѣ также посмертнаго трактата *Della scienza messapica*. Но самое важное, хотя и не обстоятельно, указано вскользь уже въ четвертомъ, слѣдовательно не посмертномъ днѣ *Discorsi*. Тамъ ¹ высказано представленіе, что энергія удара, произведеннаго тѣломъ, опредѣляется и другимъ тѣломъ. Она соотвѣтствуетъ разности скоростей. Поэтому, сила удара будетъ равна 6, если скорости въ одну сторону равны 10 и 4. Положенныя здѣсь въ основаніе идеи будутъ яснѣе, если мы ихъ изслѣдуемъ, пользуясь посмертными замѣчаніями.

Въ шестомъ днѣ вопросъ приводится въ связь съ виртуальнымъ началомъ въ широкомъ значеніи этого понятія ². Вездѣ скорость какъ бы замѣняетъ собою тяжесть (т.-е. массу) груза. Вездѣ причиною движенія большихъ массъ малыми служить большая скорость

¹ *Discorsi e dimostrazioni etc.*, Т. XIII указаннаго выше изданія сочиненій, стр. 246.

² *Ibid.* Стр. 315 и слѣд.

и ея отношеніе къ меньшей скорости или приблизительному покою. Энергія слагается изъ двухъ вещей, именно изъ скорости и вѣса. Эта послѣдняя мысль, которая, какъ мы уже знаемъ изъ предыдущаго, господствуетъ во всей механикѣ Галилея, получаетъ особое значеніе въ разсматриваемой связи ея съ ударомъ. Въ самомъ дѣлѣ, ея появленіе показываетъ, что ударъ разсматривается не какъ нѣчто особенное, а какъ нѣчто такое, что также должно подпадать обыкновеннымъ, доселѣ извѣстнымъ законамъ измѣренія силъ другъ другомъ ¹. Мысль, что измѣряемая въ томъ же направленіи разность скоростей опредѣляетъ энергію удара, имѣетъ основаніе, которое стоитъ отмѣтить. Именно, какъ вообще, такъ и въ этомъ случаѣ, Галилей исходитъ изъ ощущенія или субъективнаго представленія мускульнаго чувства,—чувства, которое должно бы было соответствовать механическому процессу. Руководясь такимъ представленіемъ, какое доставляетъ предполагаемое субъективное ощущеніе сопротивленія, въ случаѣ проблемы удара онъ не замѣчаетъ какъ разъ того эффекта, какой позднѣйшіе изслѣдователи съ успѣхомъ приняли въ соображеніе. Именно, рядомъ съ динамическимъ дѣйствіемъ, какъ и во всѣхъ механическихъ задачахъ, можетъ еще подлежать изслѣдованію внутреннее статическое отношеніе, или другими словами, давленіе, которымъ тѣла сжимаютъ другъ друга. Это взаимное давленіе, представляемое какъ объективный процессъ, съ помощію понятія, доставляемаго намъ, при подобныхъ обстоятельствахъ, собственнымъ ощущеніемъ,—есть галилеевское напряженіе удара. По его мнѣнію, оно имѣетъ наибольшую величину при совершенно противоположномъ направленіи равныхъ скоростей, ибо въ этомъ случаѣ алгебраическая разность даетъ двойную скорость. Но такая мѣра разности относится, какъ видно, отнюдь не къ динамическому результату удара, каковой при неупругихъ тѣлахъ равенъ нулю, но къ внутреннему процессу, каковой долженъ имѣть мѣсто при внезапномъ соудареніи. Такъ какъ въ разсматриваемомъ примѣрѣ не остается вовсе свободного, по крайней мѣрѣ, замѣтнаго въ цѣлыхъ массахъ, переноснаго двигательнаго эффекта и такъ какъ притомъ послѣ удара уже нѣтъ никакого давленія, то обѣ силы, вслѣдствіе происшедшаго давленія и отпора ему, должны взаимно уничтожаться. Новѣйшія представленія, во всякомъ случаѣ, допускаютъ здѣсь нѣкоторое превращеніе, или другими словами, переносъ силъ на объекты инаго рода, а именно допускаютъ, что этимъ путемъ не производится никакого

¹ Ср. Della scienza meccanica, заключеніе, принадлежавшее, впрочемъ, первоначально не самому Галилею, но имъ усвоенное.

массоваго дѣйствія, но лишь болѣе тонкое молекулярное дѣйствіе. Но, по галилеевскимъ воззрѣніямъ, здѣсь еще не могло быть и рѣчи о производженіи теплоты и о подобныхъ дѣйствіяхъ, но должно было изслѣдовать одно изъ двухъ, а именно — или внутреннее статическое отношеніе или освобождающійся двигательный эффектъ: третьяго ничего не допускалось. Основатель же динамики остановился на томъ, что, въ виду субъективныхъ представлений, произвольнѣйшимъ образомъ напрашивалось какъ мѣра напряженія удара. Это то и помѣшало ему попасть на тотъ путь, на которомъ позднѣе былъ счастливѣе его величайшій преемникъ; тѣмъ не менѣе, онъ сдѣлалъ важный шагъ, принявъ въ соображеніе одну сторону удара, которая впослѣдствіи была забыта. Въ виду этого, его простой примѣръ можетъ уже здѣсь найти себѣ мѣсто. Подхватываніе шара ¹ доставляетъ схему для различныхъ отношеній напряженія. Въ самомъ дѣлѣ, если рука отступаетъ съ тою же скоростью, съ которою тѣло за нею слѣдуетъ, непосредственно ея касаясь, то не существуетъ никакого удара, ибо тутъ нѣтъ разности скоростей. Но если она двигается въ томъ же направленіи медленнѣе, или находится въ покоѣ, или даже идетъ съ нѣкоторою скоростью навстрѣчу тѣлу, то разница въ обоюдномъ движеніи, которая есть ничто иное какъ вышеозначенная алгебраическая разность скоростей, отнесенныхъ къ одинаковому направленію, обусловитъ большую или меньшую напряженность удара. Если бы пожелали приложить эту точку зрѣнія къ двумъ равнымъ тѣламъ, побуждаемымъ равными, но противоположными скоростями, то очутились бы въ такой области, какою теорія неупругаго удара, данная впервые Валлисомъ, еще не занималась. Эти движенія взаимно уничтожаются; наступаетъ покой, и этимъ, въ предположеніи неупругихъ тѣлъ, кончается все, что въ сущности смогла сказать теорія, начиная съ Валлиса. Но какое значеніе имѣетъ взаимное статическое уравновѣшеніе силъ, осталось не выясненнымъ. Галилей, съ своей совершенно отличной точки зрѣнія, если бы только достигъ правильной теоріи, не могъ бы остановиться на одной этой сторонѣ дѣла.

Такъ какъ способъ, какимъ основатель динамики представлялъ себѣ внутреннее напряженіе удара, не привелъ къ точно доказуемымъ результатамъ, то онъ развилъ еще многія другія представленія, очевидно послужившія позднѣйшимъ изслѣдователямъ основаніями, хотя они и объяснили только отдѣльныя части въ процессѣ удара и въ существѣ этого способа дѣйствія. Сюда въ особенности от-

¹ Discorsi, т. XIII сочиненій, стр. 318.

носится съ особенною любовью взлелѣянная идея ¹, что сила удара какъ бы безконечно велика въ отношеніи къ покоющемуся грузу, потому что послѣдній совсѣмъ не имѣетъ никакой скорости. Это должно было служить отвѣтомъ на античный вопросъ о томъ, почему это слабый ударъ о клинъ производитъ такое значительное дѣйствіе, какого не можетъ произвести просто статическое обремененіе клина.

Еще важнѣе—разложеніе удара на сумму элементарныхъ импульсовъ. «Моментъ тяжелаго тѣла въ актѣ удара» прямо ² разсматривается какъ «агрегатъ безчисленныхъ моментовъ», въ которыхъ проявляется собственно тяжесть. Такіе моменты скопляются и сохраняются на подобіе того, какъ и толчки тяжести при свободномъ паденіи тѣлъ. Это представленіе, изъ котораго позднѣе сдѣлано было употребленіе для упругаго удара, имѣетъ, кромѣ того, историческое значеніе, благодаря контрасту, который непосредственно рядомъ съ нимъ выступаетъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ области приведенныхъ мѣстъ не только постоянно указывается на простое давленіе и на воображаемый безъ скорости грузъ какъ на нѣкоторую противоположность дѣйствию скоростей, но даже оба эти рода дѣйствій характеризуются тѣмъ, что ихъ взаимное отношеніе изображается какъ отношеніе, такъ сказать, не конечное. Если прибавить къ этому еще то обстоятельство, что въ разсматриваемыхъ изслѣдованіяхъ кромѣ этого многократно встрѣчается и въ высшей степени характеристичное выраженіе *peso morto*, то мы неминуемо должны признать во всемъ этомъ уже понятіе различія между мертвою и живою силою. Что касается идеи въ самой себѣ, то для перехода отъ «мертваго груза», какъ противоположности накопившимся элементарнымъ импульсамъ, къ представленію мертвыхъ силъ требовалось ничто иное, какъ въ высшей степени метафизическое движеніе вспять. Объ этомъ мы припомнимъ при изслѣдованіи постепенной математической разработки и примѣненія въ дѣло понятія о живыхъ силахъ и при разсмотрѣніи у Лейбница и Ивана Бернулли метафизическаго формулированія и утвержденія этого способа представленія.

68. Декартовы положенія объ ударѣ постольку исторически интересны, по скольку они свидѣтельствуютъ объ отличіи его метода и показываютъ, какъ исключительно метафизическіе способы разсмотрѣнія приводятъ къ легкомысленнымъ антиципаціямъ. Мнимыя правила удара выставлены въ его «Началахъ философіи» (Часть II,

¹ Ibid., стр. 332.

² Ibid., стр. 330.

§ 46 и слѣд.) какъ законы природы. Достойная замѣчанія руководящая точка зрѣнія Декартова мышленія есть сохраненіе одинаковаго количества движенія. Но насколько общая мысль, лежащая въ основаніи представленій о сохраненіи, правильна, настолько примѣненіе этого принципа къ удару ошибочно. Сила только благодаря своему направленію является тѣмъ, чтѣ она представляетъ въ сочетаніяхъ, но у Картезія это-то направленіе и разсматривается какъ нѣчто относительно безразличное. Отраженное тѣло, по его мнѣнію, должно уже имѣть въ себѣ способность, и помимо преграды, продолжать свой путь по другому направленію. Такой способъ представленія есть способъ шаткій и даже неправильный. Лишь комбинація силъ и направленій опредѣляетъ новое направленіе. Декартъ совѣмъ не дѣлалъ различія между упругимъ и неупругимъ ударомъ, ибо онъ всегда имѣлъ въ виду только противоположеніе жидкимъ тѣламъ. Только если ввести это различіе, два изъ Декартовскихъ законовъ получаютъ удовлетворительный смыслъ. Равныя тѣла, сталкивающіяся съ равными противоположными скоростями (центрально), возвращаются назадъ съ прежнею скоростью, предполагая, что они совершенно упруги. Позднѣе это положеніе поставлено было Гюйгенсомъ, какъ недоказуемая аксіома, во главѣ его теоріи, занимающейся на самомъ дѣлѣ лишь упругимъ ударомъ. Другое Картезіево положеніе, которое можно исправить прибавленіемъ необходимаго предположенія, относится къ удару неупругихъ тѣлъ. Когда бѣльшая масса налетаетъ на покоящуюся меньшую, то онѣ обѣ должны совмѣстно продолжать путь со скоростью, соотвѣтствующею опредѣленному ея распредѣленію. Конечно, это — только частный случай того общаго закона, по которому произведеніе соединенныхъ массъ на новую скорость должно равняться суммѣ произведеній отдѣльныхъ массъ на соотвѣтствующія имъ скорости. Такъ какъ Декартъ не достигъ этого обобщенія, то онъ былъ еще далекъ отъ того, чтобы даже свое собственное начало сохраненія количества движенія съ успѣхомъ ввести въ кругъ примѣненій. Всѣ же остальные его предложенія ложны, и по отношенію къ нимъ не помогутъ даже вставки надлежащихъ различеній, какъ въ двухъ приведенныхъ случаяхъ.

69. Указаніе тѣхъ шаговъ, посредствомъ которыхъ найдены были Гюйгенсомъ законы удара, положительно невозможно въ виду того, что посмертныя доказательства его по этому предмету темны, и самое большее — даютъ мѣсто только нѣкоторымъ догадкамъ. Первоначально законы удара явились совѣмъ безъ доказательства. Въ этой сжатой формѣ они были представлены Англійскому Обществу, когда задача эта была имъ поставлена на очередь, въ концѣ

1668 и въ началѣ 1669 г. Секретарь этого Общества, Ольденбургъ, въ примѣчаніи ко всѣмъ тремъ работамъ высказался въ смыслѣ совершенной ихъ независимости другъ отъ друга. Какъ выше замѣчено, Валлисъ первый представилъ свои положенія. Они были примѣнны только къ неупругому удару, но вмѣстѣ съ этимъ сопровождались изложеніемъ принципиальныхъ исходныхъ пунктовъ. Въ виду этого, настоящій предметъ ихъ не соприкасался съ положеніями Гюйгенса, и изъ обоихъ англичанъ только Рень можетъ считаться конкуррентомъ Гюйгенса. Гюйгеново же изложеніе отличается наибольшею ясностью и полнотою, а потому рѣшительнаго шага въ принципиальномъ отношеніи и нужно искать именно у него. Въ немъ отчетливо выражено сохраненіе живой силы при ударѣ, хотя и нѣтъ еще позднѣйшаго техническаго наименованія, введеннаго Лейбницемъ. Эти чисто принципиальные элементы тѣмъ въ большей мѣрѣ имѣютъ значеніе, что уже судя по принятому способу выраженія и представленія, въ разсматриваемыхъ рѣшеніяхъ должна была идти рѣчь вообще о «законахъ движенія». Въ самомъ дѣлѣ, это усматривается также и изъ того, какъ Валлисъ приступилъ къ своему предмету, ибо самыя формулированія, поставленныя въ началѣ его статьи, не позволяютъ тотчасъ же заключить, что въ концѣ концовъ настоящую цѣль должны составлять правила удара.

Такъ какъ мы имѣемъ въ виду разсмотрѣніе всего ученія объ ударѣ въ только что намѣченномъ смыслѣ, а не какъ совокупности частныхъ теоремъ, то прежде чѣмъ приступить къ въ высшей степени своеобразному методу Гюйгенса, предположимъ два—три замѣчанія о ходѣ мыслей у Валлиса. Въ самомъ началѣ своей статьи онъ устанавливаетъ пропорціональность между дѣйствіемъ и силою. Затѣмъ, принявши исходнымъ пунктомъ для сравненія дѣйствій произведеніе массы на скорость, онъ замѣчаетъ, что на этомъ отношеніи силъ основывается равновѣсіе во всѣхъ машинахъ и тѣмъ самымъ указываетъ ядро виртуальнаго принципа. Подобно Галилею, онъ представлялъ себѣ это начало просто какъ слѣдствіе силоваго понятія. Въ виду такого вступленія, разработка неупругаго удара явилась у него какъ простое приложеніе обоюднаго измѣренія силъ. Покоющееся тѣло разсматривается какъ нѣкоторая масса, которая только еще должна придти въ движеніе подъ вліяніемъ скорости или силы другого, набѣгающаго, тѣла, а потому эта скорость должна въ обоихъ массахъ распредѣлиться такъ, чтобы сила въ смыслѣ Валлиса или, другими словами, количество движенія оставалось то же самое. Очевидно, что здѣсь, какъ это совершенно въ порядкѣ вещей, матерія мыслится просто какъ предметъ силовой

аффекціи. Если обратить вниманіе на внутреннія силы тѣла, то указанный способъ представленія окажется уже непригоднымъ, и не только въ отношеніи упругаго, но уже и въ отношеніи неупругаго удара, для котораго Валлисъ строить свою теорію, возникають основательныя сомнѣнія касательно слишкомъ поспѣшной непосредственности этого способа заключенія. Поэтому, дабы для точныхъ результатовъ имѣть и точный способъ представленія ихъ основаній, необходимо еще присовокупить, что Валлисовы абстрактныя разсужденія имѣютъ значеніе для дѣйствительныхъ физическихъ тѣлъ лишь постольку, поскольку послѣднія приблизительно соответствуютъ идеальнымъ, или, если угодно, схематическимъ предположеніямъ. Но эти предположенія заключаются въ допущеніи, что матерія воспринимаетъ скорость какъ бы пассивно, и что, совершенно какъ въ тѣхъ случаяхъ, когда переносъ движенія совершается безъ удара, дѣло только въ томъ, чтобы аффицирующую скорость или вообще причину движенія перенести на безусловно косный объектъ и распределить ее въ немъ. Всякое тѣло, принимающее участіе въ движеніи другого тѣла, будучи съ нимъ какимъ бы то ни было образомъ связано, даетъ этому примѣръ. Предметъ на кораблѣ не испытываетъ собственно удара въ обыкновенномъ смыслѣ этого понятія. Въ самомъ дѣлѣ, при спокойномъ развитіи движенія сообщеніе его произведетъ только такіе внутренніе процессы, которые по отношенію къ главному эффекту играютъ второстепенную роль. Во всякомъ случаѣ, строго статическое отношеніе только тогда въ этомъ примѣрѣ имѣетъ мѣсто, когда не возникаетъ никакого измѣненія движенія и въ силу закона косности даже нѣтъ необходимости ни въ какомъ новомъ сообщеніи. Впрочемъ, и случай дѣйствительнаго сообщенія можно понимать такъ, что внутреннія силы тѣла приходятъ въ дѣйствіе лишь какъ нѣчто придаточное. Въ такомъ случаѣ вполне пригоденъ такой способъ представленія, который разсматриваетъ соединенныя массы какъ объектъ такой силы, которая прежде всего мыслилась принадлежащею только одной массѣ. Слѣдуя этому способу представленія, внутренніе процессы не считаются за ничто, но за количественно незначительные въ отношеніи къ главному результату, т.-е. къ видимому движенію массъ.

70. Совершенно противоположную форму получаетъ это отношеніе, когда внутреннія силы въ формѣ упругости образуютъ рѣшительную главную причину образа движенія. Здѣсь поражаетъ насъ то, что въ главномъ рѣшеніи проблемы удары, какъ оно предложено у Гюйгенса въ посмертной статьѣ, избранъ самый непрямой путь, какой только можно представить себѣ. Именно, въ

то время какъ изъ вышеупомянутой работы, присланной Королевскому Обществу, никоимъ образомъ нельзя было отгадать метода рѣшенія, въ приведенной посмертной статьѣ ¹ выступаетъ методъ кажущихся движеній какъ вездѣ руководящій принципъ.

Сама по себѣ эта метода имѣетъ высокій интересъ по отношенію къ принципамъ, хотя для удара она и является такою, примѣненія которой къ подобной проблемѣ всего менѣе можно было ожидать. Лишь большія трудности, съ которыми могло связываться именно у Гюйгенса болѣе натуральное и прямое рѣшеніе задачи, должны были дать поводъ къ установленію законовъ движенія методомъ, который можно бы было назвать методомъ вариаций форономическихъ явленій, для объективнаго и реальнаго процесса безразличной. Сужденія и положенія о реальномъ явленіи не могутъ измѣниться, если имѣтъ въ виду двѣ различныя формы проявленія этого самаго быванія. Въ этомъ — основное положеніе, которое хотя у Гюйгенса и не высказано, но служить основаніемъ его приѣма. Натурально, подразумеваемое предположеніе при примѣненіи подобнаго принципа состоитъ въ томъ, что рѣчь идетъ не о форономическихъ явленіяхъ какъ таковыхъ, но о силахъ или причинахъ, выраженіемъ которыхъ эти явленія служатъ. Причина скорости не всегда ведетъ къ проявленію движенія, но можетъ служить также и къ уравниванію причины и некоторой другой скорости. Тогда передъ нами — чисто статическій эффектъ. Но можно вмѣстѣ съ Гюйгенсомъ сдѣлать шагъ еще дальше и двѣ несомнѣнно дѣйствующія движущія силы, изъ которыхъ каждая явно обнаруживаетъ свое дѣйствіе, можно заставить взаимодействовать такъ, что онѣ произведутъ абсолютный покой.

Если кто-либо движется на кораблѣ благодаря собственной мускульной силѣ такъ, что его движеніе при каждомъ шагѣ въ точности уничтожается противоположнымъ движеніемъ корабля, и если вообразить, что такое уничтоженіе, по крайней мѣрѣ идеально, имѣетъ мѣсто и для малыхъ частей движенія, и слѣдовательно въ строжайшемъ смыслѣ сплошь, то въ силу этихъ обѣихъ движущихъ причинъ не произойдетъ никакой перемѣны мѣста. Относительно воды или берега имѣетъ мѣсто покой, и этотъ покой былъ бы во всѣхъ отношеніяхъ абсолютнымъ, если бы вода и берегъ не имѣли еще другихъ движеній и если бы разсмотрѣнію подлежали только сказанныя двѣ дѣйствующія причины. На этомъ основаніи, для подлежащаго случая все равно, каковы будутъ тѣ представленія, которыя можно бы было имѣть о возможности или

¹ De motu corporum ex percussione, въ Opuscula posthuma, 1703.

о дѣйствительности абсолютнаго покоя относительно всей совокупности всѣхъ механическихъ процессовъ въ мірѣ. Достаточно усмотрѣнія, что движущія силы могутъ на самомъ дѣлѣ производить относительныя перемѣны мѣста и, несмотря на это, въ сочетаніи другъ съ другомъ, позволяютъ замѣчать—какъ настоящий результатъ — только покой относительно третьяго предмета. На этомъ, для болѣе глубокаго размысленія крайне важномъ фактѣ, и основывается безразличіе точки зрѣнія, съ какой можно разсматривать одинъ и тотъ же реальный процессъ, въ данномъ случаѣ—ударъ тѣлъ. Одинъ и тотъ же идентичный объектъ, именно комбинація силъ, изслѣдуется то въ одной, то въ другой формѣ проявленія. А какъ явленія движенія представляютъ единственную форму, въ которой дѣйствіе силъ становится видимымъ, то и здѣсь уловка метода основывается на замѣнѣ, по произволу, какъ того потребуютъ обстоятельства,—случая ощутимаго явленія движенія эквивалентнымъ случаемъ его статическаго подавленія. Такимъ образомъ, въ послѣднемъ основаніи, и здѣсь употребляется пріемъ подобный тому, какой впервые привелъ къ постановкѣ на мѣсто чисто статическихъ силъ возможныхъ движеній. Только въ этомъ случаѣ эквивалентность тѣхъ и другихъ получаетъ еще болѣе рѣшительное подкрѣпленіе. Въ самомъ дѣлѣ, эти движенія не просто гипотетичны, но въ силу реальной аффекціи имѣются на лицо и, какъ таковыя, доступны познанію. Если я двигаюсь благодаря своей силѣ, то никто не можетъ оспаривать реальности этого движенія какъ дѣйствія движущей силы, хотя бы она и не производила никакого перемѣненія по отношенію къ третьему объекту. Скорѣе, должно бы было сказать, что двѣ силы, притомъ не просто какъ статическія силы, пришли въ дѣйствіе, но что онѣ, что касается перемѣны мѣста, измѣряемой по отношенію къ третьему объекту, взаимно уничтожаются. Кромѣ того, это взаимное упраздненіе отличается отъ того, которое имѣетъ мѣсто при настоящемъ равновѣсіи, ибо въ предположеніи послѣдняго не должно обнаруживаться никакого явленія движенія, какую бы точку зрѣнія ни избрали.

Такъ какъ нынѣ имѣется общій методъ для измѣненія наружнаго вида механическихъ процессовъ при помощи введенія кажущихся движеній и для разработки проблемъ этимъ путемъ, то, понятно, что старѣйшій и плодотворнѣйшій продуктъ въ этомъ родѣ, какъ первоначальный типъ цѣлаго рода, имѣетъ право на тщательное разсмотрѣніе и расчлененіе, а потому мы, не входя подробно въ спеціальнѣйшія примѣненія, изложимъ Гюйгенсовъ пріемъ въ болѣе общемъ видѣ, т.-е. не исключительно въ интересахъ проблемы удара.

71. Гюйгенсъ нигдѣ не пренебрегаетъ средствами нагляднаго уясненія дѣла, и подобно тому какъ при разработкѣ вопроса о центробѣжной силѣ воображаетъ себѣ человѣка, стоящаго на вертящемся колесѣ и держащаго въ рукѣ веревку съ грузомъ, такъ и при разъясненіи проблемы удара прибѣгаетъ къ примѣру корабельщика и наблюдателя, стоящаго на берегу. Предполагается даже, что послѣдній можетъ ухватить перваго за руки, чтобы покой или измѣненіе движенія, имѣющее мѣсто при наблюденіи съ берега, были бы вполне наглядны. Мы не обращаемся къ подобнымъ пріемамъ истолкованія, имѣвшимъ свою хорошую сторону при первомъ изложеніи предмета, ибо нынѣ, когда вполне освоились съ отвлеченностями даннаго рода, подобныя околичности только вредили-бы строгости и общности хода мыслей.

Ядро Гюйгенсовскаго метода для случая соударенія равныхъ тѣлъ можно выразить въ видѣ легко понятнаго правила. Прежде всего принимается аксіома, что равныя тѣла, бѣгушія навстрѣчу одно другому центрально съ равными скоростями, подобнымъ же симметричнымъ образомъ и отскакиваютъ другъ отъ друга, такъ что скорости возвратнаго движенія остаются тѣ же. Если теперь корабль имѣетъ движеніе, вполне уничтожающее скорость одного изъ этихъ тѣлъ, такъ что съ берега оно кажется въ покой, то другое тѣло, при наблюденіи также съ берега, имѣетъ движеніе на столько же большее. Слѣдовательно, имѣется такой случай, что одно тѣло находится въ покой, между тѣмъ какъ другое набѣгаетъ на него съ нѣкоторою опредѣленною скоростью. Итакъ, для наблюдателя на берегу какъ предположеніе, такъ и аксіоматическое заключеніе должны представляться въ иной формѣ. Каждое изъ обоихъ тѣлъ удаляется на кораблѣ отъ мѣста столкновенія съ равною скоростью. Скорость эта та же какъ и прежде; но движеніе происходитъ въ прямо противоположномъ смыслѣ. Такимъ образомъ, при наблюденіи съ берега, будетъ уничтожаться движеніемъ корабля движеніе того тѣла, которое прежде, когда оно двигалось въ противоположномъ направленіи, должно было получать приращеніе, а съ другой стороны то тѣло будетъ слагать свое движеніе съ движеніемъ корабля, которое передъ ударомъ производило уничтожающее дѣйствіе, или, если угодно, его испытывало. Такимъ образомъ, для наблюдателя съ берега изъ сказанной аксіомы получается извѣстное положеніе, что тѣло, набѣгающее на покоящееся тѣло и ему равное, передаетъ свое движеніе покоящемуся и послѣ удара само приходитъ въ покой. Впрочемъ, Гюйгенсъ и прямо постулировалъ, что ударъ двухъ тѣлъ отстаетъ тотъ же и въ томъ случаѣ, когда оба тѣла участвуютъ въ нѣкоторомъ общемъ движе-

ній ¹. Но этимъ онъ хотѣлъ сказать только то, что это взаимное отношеніе не зависитъ отъ нѣкоторой общей, какъ бы внѣшней и какъ нѣчто третье разсматриваемой, аффекціи. Онъ желалъ устранить возраженія, какія иначе можно бы было сдѣлать ему именно съ точки зрѣнія его метода.

Дальнѣйшая разработка упомянутой аксіомы даетъ общій случай для удара равныхъ тѣлъ, которыя, имѣя неравныя скорости, мѣшають одно другому при движеніи въ центральномъ направленіи. Будутъ ли они двигаться въ противоположномъ направленіи навстрѣчу другъ другу, или одно настигать другое;—всѣ эти формы можно произвести, наблюдая съ берега, если сообщить кораблю приличную скорость. Последняя, если съ самаго начала объ скорости отнести къ общей начальной точкѣ ихъ направленія, прибавляется и вычитается, или соединяется, смотря потому, будетъ ли она положительна или отрицательна, съ тѣми первоначальными скоростями въ двѣ алгебраическія суммы. Если подобную алгебраическую сумму составить для каждаго тѣла, принявъ также въ расчетъ его состояніе послѣ удара, опредѣляемое аксіомою, то получимъ также соотвѣтственное явленіе для наблюденія съ берега, или вообще тотъ фактъ, что равныя тѣла обмѣниваются своими скоростями. Это отношеніе можно, слѣдуя Гюйгенсу, весьма кратко пояснить, отправляясь отъ неравныхъ скоростей на берегу, и уравнивая ихъ разность соотвѣтствующею скоростью корабля. Тѣмъ не менѣе, смыслъ метода яснѣе выступаетъ, если во всѣхъ случаяхъ выставить эту аксіому какъ истинный исходный пунктъ и слѣдовательно вмѣстѣ съ этимъ показать, что каждая изъ полученныхъ теоремъ основывается только на примѣненіи сказаннаго основоположенія. Для разработки вопроса объ ударѣ неравныхъ тѣлъ Гюйгенсу потребовалось ввести дальнѣйшее недоказанное допущеніе ², именно, что большее тѣло сообщаетъ меньшему покоящемуся тѣлу часть своего движенія.

Изъ полученныхъ при этомъ результатовъ слѣдуетъ указать въ особенности слѣдующіе. Въ четвертомъ предложеніи цитированной статьи прямо формулировано равенство относительныхъ скоростей, имѣющее мѣсто, каково бы ни было направленіе передъ ударомъ и послѣ него. Въ особенности же слѣдуетъ указать на то, что количества движенія передъ ударомъ и послѣ онаго не совпадаютъ. Въ предложеніи XI высказана знаменитая истина, что суммы произведеній массъ на квадраты соотвѣтствующихъ скоростей до удара

¹ Тамъ же, допущеніе третье.

² Тамъ же, допущеніе четвертое.

и послѣ него равны между собою. Въ виду того, что подобныя произведенія по почину Лейбница начали называть живыми силами, и такъ какъ еще и нынѣ о живыхъ силахъ обыкновенно дается не иное какое, а это самое аналитическое, содержащееся въ сказанной формулѣ, опредѣленіе, то позволительно утверждать, что Гюйгенсовъ способъ выраженія содержитъ именно то предложеніе, которое мы обыкновенно называемъ теоремою сохраненія живыхъ силъ при совершенно упругомъ ударѣ. Хотя Гюйгенсъ нигдѣ не говоритъ о совершенной упругости, тѣмъ не менѣе его аксіома о взаимномъ отскакиваніи равныхъ и съ равными скоростями набѣгающихъ другъ на друга тѣлъ свидѣтельствуетъ о томъ, какое свойство всегда у него предполагалось. Обрѣтается ли это свойство въ природѣ во всей чистотѣ или лишь приблизительно, это не имѣетъ вліянія на правильность выводовъ. Подобныя слѣдствія лишь тогда могутъ быть дѣйствительны въ примѣненіи къ случаямъ опыта, когда предположенія, изъ коихъ они вытекаютъ, даны въ дѣйствительности. Но если допущенія случая могутъ быть даны только приблизительно или даже лишь въ извѣстной количественной мѣрѣ, то и дедуктивно установленныя слѣдствія, при такихъ измѣненныхъ предположеніяхъ, дѣйствительны также лишь приблизительно или въ соотвѣтствующей мѣрѣ или въ нѣкотораго рода смѣшеніи съ дѣйствіями измѣненныхъ свойствъ этого случая. Лишь имѣя въ виду этотъ способъ оцѣнки общихъ законовъ, мы съ одной стороны не нарушимъ ни строгости, ни точности слѣдствій, выводимыхъ изъ сказанныхъ чистыхъ, безпримѣсныхъ предположеній, а съ другой стороны не нарушимъ и требованій эмпирическаго изслѣдованія сложныхъ физическихъ процессовъ. Это замѣчаніе прямо было почти неизбѣжно въ теоріи удара, ибо иначе могло бы показаться, что механика въ этомъ случаѣ была неспособна выставить исполнѣ строгія предположенія.

72. Важно обратить вниманіе на то, что всѣ свои главныя предположенія Гюйгенсъ представилъ Англійскому Обществу уже въ началѣ 1669 года; ибо позднѣе въ различныхъ изслѣдованіяхъ, которыя появились о законахъ удара, едва уже можно различить то, что принадлежитъ первымъ ихъ виновникамъ, отъ того, что, хотя и въ измѣненной формѣ, но все же являетъ собою лишь воспроизведеніе или примѣсъ прежнихъ способовъ воззрѣнія. Въ этомъ отношеніи даже собственныя работы тѣхъ, которые ранѣе всѣхъ сообщили законы удара, нельзя прямо считать чисто ихъ личнымъ дѣломъ, ибо эти обстоятельнѣйшія изслѣдованія предмета появились лишь значительно позже. Такъ напр. позднѣе и Валлисъ обстоятельно изложилъ теорію упругаго удара; но разъ правила онаго были уже обнародованы Ре-

номъ и въ болѣе совершенномъ видѣ Гюйгенсомъ, рѣчь могла быть только о большей или меньшей цѣлесообразности методовъ доказательства. Но трудность заключалась здѣсь не столько въ вопросѣ о комбинаціи силъ, сколько въ тѣхъ представленіяхъ, которыя надлежало составить себѣ о сообщеніи движенія и особенно о элементарныхъ импульсахъ. Обыкновенно принимаютъ, что законы сообщенія движенія были подвергнуты болѣе глубокому изслѣдованію впервые въ работѣ на премію Ивана Бернулли (1723 г). Но какъ бы ни смотрѣть на отношеніе этой работы къ прежнимъ, должно во всякомъ случаѣ признать, что разсмотрѣніе малыхъ частичныхъ процессовъ, изъ коихъ слагается ударъ, какъ и всякая передача движенія, только тогда могло получить въ самомъ дѣлѣ господствующее значеніе, когда введены были флюкціонные и дифференціальные методы. Поднимать споръ о томъ, кто первый разсматривалъ ударъ въ его элементарныхъ процессахъ, не имѣетъ болѣе никакого интереса, поскольку онъ въ сущности уже упраздненъ указаніемъ на Галилеевскій способъ представленія. Подобно тому какъ основатель динамики предвкушалъ столь многое иное, что нашло удобный для себя органъ лишь на языкѣ анализа безконечно-малыхъ, такъ онъ училъ, какъ мы уже видѣли, разсматривать и ударъ какъ скопленіе толчковъ, мыслимыхъ въ неограниченномъ числѣ. Поэтому, гдѣ бы мы ни натолкнулись на такой или подобный способъ представленія, на него нельзя смотрѣть какъ на новшество.

Кромѣ сохраненія относительнаго движенія до и послѣ удара, въ замѣчаніяхъ Гюйгенса было выставлено и сохраненіе движенія центра тяжести. Это предложеніе, равно какъ и то, посредствомъ котораго исправлены были Декартовы представленія о сохраненіи количества движенія, должны быть признаны исходными пунктами на пути къ совершенно общимъ истинамъ. Именно, особенно важно было то, что Гюйгенсъ не ограничился замѣчаніемъ, что количества движенія не остаются равными, но что онъ прибавилъ къ этому и положительное предложеніе, что алгебраическая сумма количествъ движенія во всякомъ случаѣ не измѣняется. Эта важная истина раскрываетъ недостатки Картезиевской идеи во всемъ ихъ объемѣ. Количество движенія, подобно силѣ, которой представителемъ оно должно быть согласно съ сказанною идеей, никоимъ образомъ не мыслимо въ отвлеченіи отъ нѣкотораго направленія. Безъ направленія оно настолько же не имѣетъ реального смысла, насколько не можетъ его имѣть и какая угодно тяга или давленіе, если при разсмотрѣніи ихъ мы захотѣли бы совершенно отвлечься отъ наличности направленія, въ которомъ они дѣйствуютъ. Правда,

можно всякую величину брать въ абсолютномъ смыслѣ; но вопросъ въ томъ, существуетъ ли она въ такомъ родѣ въ природѣ. Но этого нельзя сказать ни о какой силѣ, мыслимой дѣйствующею въ отношеніи къ нѣкоторой другой силы. Одностороннее же и абсолютно свободное силовое дѣйствіе, которое не стояло бы ни въ какомъ отношеніи къ противодѣйствующей силѣ, имѣетъ мѣсто развѣ лишь постольку, поскольку разсматривается простое коснѣніе одной и той же скорости само по себѣ. Слѣдовательно, для всѣхъ силовыхъ комбинацій подлежитъ разсмотрѣнію отношеніе направленій не только какъ существенный элементъ, но оно даже и есть то обстоятельство, посредствомъ котораго только и мыслимо настоящее силовое дѣйствіе.

Это послѣднее соображеніе позволяетъ въ то же время замѣтить, какимъ образомъ предложеніе о равенствѣ живыхъ силъ до и послѣ удара, предложеніе, которымъ мы обязаны также Гюйгенсу, равно какъ и вообще дальнѣйшее обобщеніе, каковое позднѣе испытало это предложеніе въ сочетаніи съ однороднымъ ему принципомъ, примѣненнымъ къ проблемѣ о центрѣ качанія, — какимъ образомъ оно, что весьма любопытно, должно бы быть независимымъ отъ знаковъ скоростей. То, что тотчасъ же познается изъ аналитическаго выраженія, т.-е. изъ того обстоятельства, что въ него входятъ квадраты скоростей, не очевидно непосредственно, какъ скоро это же отношеніе захотимъ установить другимъ путемъ. Отрицательныя скорости въ квадратѣ могутъ давать всегда только положительныя или лучше абсолютныя живыя силы. Это — аналитическая необходимость. Если теперь всѣ силы въ своихъ дѣйствіяхъ представлены такимъ образомъ, то противоположность направленія скоростей никоимъ образомъ не можетъ касаться этихъ выраженій. Отсюда, повидимому, непосредственно слѣдуетъ, что по отношенію къ живымъ силамъ долженъ имѣть мѣсто законъ сохраненія, каковой не имѣетъ мѣста по отношенію къ скоростямъ, находящимся въ статическомъ соотношеніи. На самомъ дѣлѣ объ этихъ квадратичныхъ величинахъ рѣчь идетъ лишь тогда, когда разсматривается, такъ сказать, свободное силовое дѣйствіе, выступающее надъ статически упраздненной частью. Но, какъ скоро дѣйствіе подобнаго рода имѣется налицо, противоположная часть противодѣйствующей силы уже какимъ бы то ни было образомъ испытала статическое упраздненіе и какъ бы скована, такъ что при каждомъ противоборствѣ силовыхъ элементовъ — дѣйствительный двигательный эффектъ всегда происходитъ только отъ избытка, который какъ бы освобождается въ каждое мгновеніе. Какъ скоро силы для нѣкотораго, въ строгомъ смыслѣ слова, момента времени въ точности

равны, не может возникнуть никакого движения. Таким образом, всякое движение существует лишь постольку, по сколько въ какой-либо мѣрѣ уничтожается статическое состояніе, а съ нимъ и существованіе противоположности направленій, имѣющей мѣсто внутри данной комбинаціи. Впрочемъ, эти соображенія, лишь отчасти касающіяся Декартовскаго заблужденія, могутъ найти полное себѣ оправданіе лишь въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи вполне обобщеннаго принципа сохраненія силы.

То, что выяснилось изъ законовъ удара, включая сюда и предложенія Валлиса о неупругомъ ударѣ, по отношенію къ Картезіеву принципу, можно вкратцѣ и вообще выразить, сказавъ, что уяснилось, какимъ образомъ отношеніе силъ можетъ дѣлаться статическимъ и такимъ образомъ часть количества движения не только можетъ, но и должна исчезать. А именно, оно исчезаетъ въ формѣ актуальнаго, т. - е. дѣйствительно существующаго движения, между тѣмъ какъ въ формѣ возможной силы, ведущей къ движенію, оно продолжаетъ существовать даже въ статическомъ соединеніи. Итакъ, въ этомъ отношеніи общая основная идея была правильна; только примѣняема была она съ одной стороны неопредѣленно, а съ другой — ошибочно. Лишь новѣйшія мысли дали возможность подвергнуть вопросъ истинно - исторической критикѣ и показать, гдѣ слѣдуетъ искать прочныя составныя части общаго представленія о сохраненіи одинаковой суммы силъ. Кое что, на что предшествующее поколѣніе еще не обращало должнаго вниманія, въ настоящее время составляетъ для насъ предметъ высочайшаго интереса.

Вообще, розысканіе законовъ удара является обстоятельствомъ, въ которомъ размышленіе играло болѣе рѣшительную роль, нежели опытъ. Впрочемъ, уже Мерсеннъ производилъ родъ грубыхъ опытовъ, заставляя тѣло падать на чашку вѣсовъ. Равнымъ образомъ и при окончательномъ установленіи законовъ удара, какъ отчасти это положительно извѣстно, также прибѣгали къ экспериментамъ. Однако, отношеніе, въ какомъ находится незначительный объемъ опытовъ къ математической широтѣ теоріи, убѣждаетъ въ томъ, что уже научились цѣнить по достоинству чисто раціональный элементъ механики. Болѣе обстоятельное изложеніе у Гюйгенса вышло особенно удачнымъ и въ томъ отношеніи, что рельефнымъ выдѣленіемъ аксіомы о взаимномъ отскакиваніи оно даетъ замѣтить въ нѣкоторомъ родѣ основное явленіе и, въ противоположность ему, чисто раціональную производность остальныхъ процессовъ. Но мы зашли бы слишкомъ далеко, если бы захотѣли смотрѣть на эту аксіому, какъ на простой фактъ опыта, подобный

всякому другому. Симметрия отношеній, въ ней усматриваемая, указываетъ на то, что при представленіи ея долженъ былъ участвовать также и элементъ чистой мыслительной необходимости.

Обширные и систематичные опыты объ ударѣ были произведены Маріоттомъ и изложены въ обширной статьѣ, помѣщенной въ началѣ перваго тома его произведеній¹. Тѣмъ не менѣе, они имѣютъ выдающееся значеніе не столько для успѣховъ фундаментальныхъ теорій, сколько для специальныхъ примѣненій и для экспериментальнаго искусства.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Ньютонова механика тяготѣнія.

73. Какъ уже замѣчено было при указаніи общаго хода развитія (§ 52), значительность новой области приложенія не можетъ сама по себѣ замѣнить измѣненія въ принципахъ, и потому слѣдуетъ быть осторожнымъ, дабы не смѣшать космическаго величія предмета съ значеніемъ дѣйствительно новыхъ элементовъ механической науки. Работы Ньютона въ нашей области весьма часто оцѣнивались подъ впечатлѣніемъ примѣненій механики къ планетной системѣ и такимъ образомъ, и именно англичанами, превозносимы были относительно слишкомъ высоко. Этимъ самымъ не только учиняли несправедливость въ отношеніи къ Галилею и Гюйгенсу, но и вообще отдавались тому вульгарному способу критики, который мѣриломъ оцѣнки дѣлаетъ не взвѣшиваніе принципиальныхъ успѣховъ, а совершившійся фактъ величественнаго приложенія и удивленіе передъ исполинскими размѣрами и передъ поразительными по своей немотивированности заключеніями. Что же касается насъ, то уже самый предметъ нашихъ изслѣдованій предписываетъ намъ иную точку зрѣнія. Наша цѣль—изслѣдованіе общихъ принциповъ и принципиальныхъ обогащеній механики. Съ этой точки зрѣнія результаты планетной механики касаются насъ постольку, поскольку они дѣйствительно зиждутся на новыхъ основныхъ воззрѣніяхъ или на рѣшительныхъ поворотахъ въ разработкѣ стараго научнаго матеріала. Приэтомъ познанія взвѣшиваются сами по себѣ, и совершенно безразлично, служатъ ли предметомъ изслѣдованія маятниковые часы или солнечная система. Напротивъ того, принципъ въ родѣ того, какой былъ установленъ въ случаѣ Гюйгеновскаго центра колебанія при изученіи сложнаго маятника, можетъ имѣть гораздо

¹ Mariotte, Oeuvres, Leiden 1717, подъ заглавіемъ: *Traité de la percussion etc.*

большее значеніе для успѣховъ механики, чѣмъ совокупность такихъ основоположеній, которыя должны были войти въ науку какъ специфическія особенности небесной механики.

Самъ Ньютонъ смотрѣлъ на примѣненіе своихъ механическихъ познаній къ системѣ міра какъ на нѣчто особенное, и даже въ главномъ своемъ произведеніи сдѣлалъ главнымъ предметомъ отдѣльное, болѣе отвлеченное начертаніе общаго ученія о движеніи, включая сюда и притяженіе. Примѣненіе механики притяженія къ солнечной системѣ онъ начерталъ въ концѣ своего труда, такъ что ранговое различіе между чисто механическими воззрѣніями и спеціальнымъ приложеніемъ ихъ выступило достаточно явственно.

74. Въ виду нашей цѣли слѣдуетъ обратить вниманіе на три главные пункта въ сферѣ Ньютоновыхъ мыслей, а именно: на идею тяготѣнія, на механическую конституцію и объясненіе криволинейныхъ движеній и на формированіе нѣкоторыхъ простыхъ фундаментальныхъ принциповъ и понятій динамическаго содержанія. Мы увидимъ, что хотя въ этомъ послѣднемъ отношеніи и имѣется много новыхъ формулированій старыхъ основныхъ законовъ, зато мало рѣшительнаго прогресса. Поэтому, обозрѣвая чисто механическое содержаніе, находимъ, что на первомъ планѣ безспорно стоитъ теорія криволинейныхъ движеній, происходящихъ отъ сочетанія центростремительной силы съ нѣкоторою тангенціальной скоростью по инерціи, и что сюда же относится специальное представленіе о квадратичномъ уменьшеніи тяготѣнія, равно и доказательство тождества послѣдняго съ осязателюю на землѣ тяжестью лишь какъ физическій фактъ, хотя какъ фактъ въ сущности универсальнаго значенія.

Засимъ, имѣя въ виду непрерывность историческаго развитія мыслей, мы должны различать два ствола научнаго наслѣдія, изъ которыхъ выросли Ньютоновы идеи. Представительницею одного изъ нихъ является собственно астрономія, и то былъ нѣмецъ Кеплеръ, кто настолько подвинулъ впередъ установленіе фактическихъ законовъ, что расчлененіе ихъ по принципамъ механики и должно было породить ученіе о тяготѣніи. Другой стволъ представляетъ собственно механика, и здѣсь кромѣ положительныхъ Галилеевскихъ основъ прежде всего является Гюйгенсова теорія центрального движенія тѣмъ, къ чему Ньютонъ могъ привязать свое объясненіе механическихъ причинъ происхожденія криволинейныхъ движеній. Но первообразомъ мысли о комбинаціи скорости по инерціи съ свободнымъ паденіемъ была уже Галилеева парабола брошеннаго тѣла и потому вопросъ сводился лишь къ тому, чтобы идею подобнаго соединенія довершить математически сообразно съ новымъ пред-

ставленіємъ о центральному тяготѣніи и такимъ образомъ доказать необходимость путей по коническимъ сѣченіямъ и, въ частности, указать внутреннія основанія фактически уже установленнаго эллиптического движенія. Кромѣ собственно механическихъ главныхъ задачъ у Ньютона слѣдуетъ обратить вниманіе, какъ на пунктъ въ высшей степени важный, и на ту знаменитую форму математическаго мышленія, которая подъ именемъ метода флюкцій является положительною основою высшаго анализа, значеніе котораго для механики съ тѣхъ поръ становилось все больше и больше. Она тѣмъ важнѣе, что является не просто внѣшнимъ вспомогательнымъ средствомъ для рѣшенія различнаго рода реальныхъ задачъ, въ которыхъ главнымъ образомъ рассматривается непрерывное измѣненіе величинъ, но у самого Ньютона приведена въ тѣснѣйшую связь съ требованіями механическаго мышленія и соотвѣтствующихъ ему формъ представленія. А именно, измѣненіе величинъ рассматривается въ этомъ исчисленіи какъ результатъ движенія, а разности возрастанія представляются какъ скорости. Этою то тѣсною связью вспомогательнаго средства съ его ближайшею главною цѣлью и отличается Ньютонова концепція отъ того болѣе абстрактнаго воззрѣнія, которое скрыто въ лейбницевоу обозначеніи дифференціального алгоріема и которое послужило исходнымъ пунктомъ для развитія чистаго исчисленія на континентѣ. Что же касается собственно Нютоновой механики, то не слѣдуетъ упускать изъ виду, что при примѣненіи этого новаго математическаго вспомогательнаго средства рѣчь шла не просто о теоріи криволинейнаго движенія, но о тѣхъ болѣе сложныхъ задачахъ, которыя группируются около вопросовъ о движеніи въ сопротивляющихся средахъ и выступаютъ лишь во второй книгѣ Нютонова главнаго произведенія. Въ этихъ проблемахъ беретъ перевѣсъ математическая оснастка, между тѣмъ какъ новыми матеріальными принципами онѣ не богаты. Вслѣдствіе этого, намъ не придется, въ виду нашей цѣли, далеко идти въ этомъ направленіи. Напротивъ, нужно будетъ предпринять болѣе тщательное изслѣдованіе общихъ отношеній математико-аналитическихъ способовъ представленія къ механическимъ фундаментальнымъ процессамъ не просто по отношенію къ Нютонову методу флюкцій, но позднѣе и по отношенію къ чисто аналитическому формированію механики даже и во внѣшнемъ видѣ.

75. Исааку Ньютону (1642—1727) удалось лишь въ зрѣломъ возрастѣ, около 1684 г., окончательнo выработать свои представленія о тяготѣніи, зародившіяся значительно ранѣе, можетъ быть, уже въ 1665 году. Главное свое произведеніе «Математическіе принципы натурфилософіи» (*Philosophiae naturalis principia mathematica*) писалъ

онъ въ 1685 и 1686 годахъ. Оно появилось въ свѣтъ въ 1687 г. на счетъ Галлея, и при жизни автора достигло еще двухъ изданій, которыхъ измѣненія, впрочемъ, незначительны. Этому произведенію предшествовала небольшая статья о движеніи, написанная для англійскаго ученаго общества въ видахъ констатированія новыхъ воззрѣній, да и само главное произведеніе можно бы было назвать трактатомъ о движеніи тѣлъ. Такъ или иначе, три четверти его подходятъ подъ эту рубрику, такъ какъ первая книга, равно какъ и вторая носятъ заглавіе «О движеніи тѣлъ», и только третья является подъ заголовкомъ: «О системѣ міра». Такъ какъ послѣднюю, по расположенію всего произведенія, а также и по ея незначительному объему, можно разсматривать какъ родъ прибавленія, посвященнаго специальному примѣненію болѣе абстрактныхъ теорій, то стволу всей работы является ученіе о движеніи тѣлъ, или, другими словами, рациональная механика, которая помимо новаго, въ ней содержащагося, излагаетъ также и существенные принципы прежнихъ пріобрѣтеній. Она начинается введеніемъ, въ которомъ устанавливаются опредѣленія основныхъ механическихъ понятій и разсматриваются самыя общіе законы движенія. Это принципиальное введеніе, предшествующее первой книгѣ, не менѣе важно для насъ, ибо оно даетъ не только новыя формулированія, но и показываетъ, какую форму приняло старое наслѣдіе въ Ньютоновскомъ способѣ мышленія. Однако, мы не будемъ слѣдовать внѣшнему ходу Ньютонова изложенія, но будемъ брать собственно принципиальное тамъ, гдѣ его найдемъ, въ какой бы то ни было формѣ, все равно, будетъ ли оно выдѣлено и особенно подчеркнуто или нѣтъ. Слѣдуя тому порядку, какой указанъ въ предыдущемъ §, мы будемъ, смотря по надобности, приводить мѣста, взятые изъ положительно разработанныхъ ученій, не обращая вниманія на Ньютоновское распредѣленіе матеріала и послѣдовательность изложенія. При этомъ главнѣйшее наше вниманіе обращено будетъ на генетическую связь. Поэтому мы начинаемъ съ идеи тяготѣнія и съ тѣхъ различныхъ степеней общности или спеціализации, къ какимъ способна эта мысль вплоть до послѣдняго индивидуализированія.

76. Представленіе объ удержаніи небесныхъ тѣлъ около нѣкотораго центра, объ ихъ притяженіи или стремленіи къ центру, является въ себѣ нѣчто настолько общее и естественно навязывающееся уму, что въ своемъ неопредѣленномъ видѣ кажется какъ бы непосредственно связаннымъ съ мыслью о круговомъ обращеніи или полетѣ. Какъ скоро мы представимъ себѣ путь движенія около центра, тотчасъ же произвольно является представленіе, что именно этотъ-то центръ и образуетъ тотъ пунктъ, которымъ опредѣляются повороты

въ каждой части пути, и требуется лишь весьма незначительный шагъ, являющійся почти самъ собою, чтобы предположить, что и основаніе, т.-е. реальная причина, и, выражаясь спеціально, сила дѣйствуетъ въ направленіи къ центру. Такъ какъ понятія о причинахъ или силахъ суть ничто иное какъ коррелаты явленій движенія, то типъ самого движенія уже содержитъ указаніе на направленіе и происхожденіе своей особой формы. Посему, мыслить движеніе около центра—тоже самое, что съ этимъ вмѣстѣ представлять себѣ и стремленіе къ центру. И то, что мы встрѣчаемъ уже въ древнѣйшихъ идеяхъ и въ умозрѣніяхъ древняго міра въ сущности есть ничто иное какъ мысль о такомъ неопредѣленномъ стремленіи. Но отъ этого смутнаго, и почти вполнѣ еще лишеннаго всякаго значенія, способа представленія до совершенной, всесторонней опредѣленности спеціально Ньютоновской идеи тяготѣнія—еще далеко: здѣсь слѣдуетъ различать нѣсколько промежуточныхъ ступеней. Такимъ образомъ, говоря о предшественникахъ Ньютона, должно тщательно различать различныя стадіи въ развитіи понятія объ аттракціи. Слѣлавъ это, мы наряду съ усмотрѣніемъ ступеней развитія мысли приобретаемъ убѣжденіе и въ томъ, что исторія идей развивается непрерывно, и что заключительные оригинальные поворотные пункты, благодаря которымъ истины получаютъ опредѣленную и рѣзкую фізіономію, являютъ собою какъ бы разрывъ этой непрерывности.

Послѣ этихъ соображеній намъ не покажется особенно удивительнымъ, что уже въ Плутарховыхъ *Moralia*¹, въ бесѣдѣ о лунѣ находятся воззрѣнія, нѣсколько напоминающія наши представленія о комбинаціи двухъ стремленій луннаго движенія и во всякомъ случаѣ имѣющія значеніе неопредѣленнаго и случайнаго предвкушенія позднѣйшихъ концепцій о паденіи луны. А именно, здѣсь приводится сравненіе съ пращею и говорится, что нечего удивляться тому, что луна, которая вѣдь уносится впередъ своимъ движеніемъ, не падаетъ, но что напротивъ слѣдовало бы удивляться тому, если бы будучи неподвижною, она не упала бы на землю. Изъ этихъ и подобныхъ слѣдовъ и извѣстій объ античныхъ представленіяхъ не слѣдуетъ, конечно, заключать, чтобы тогда уже имѣлись опредѣленные воззрѣнія, но слѣдуетъ принять, что идеи древнихъ о вихревыхъ движеніяхъ, объ уклоненіяхъ въ сторону и т. п. могли и не быть столь немотивированными и нераціональными, какъ склонны объ этомъ думать еще и теперь. Эти античныя идеи имѣли свои причины, психологическія и объективныя, какъ и новѣйшія концепціи, а потому онѣ неминуемо должны были въ нѣкоторой мѣрѣ соответ-

¹ De facie quae in orbe lunae apparet Изд. Didot, т. II, стр. 1130.

ствовать явленіямъ и познавательнымъ стремленіямъ. Такъ какъ мысль о притяженіи есть почти произвольная принадлежность представленія о движеніи обращенія, и такъ какъ даже весьма естественный антропоморфизмъ могъ привести къ тому, что объ этомъ естественномъ процессѣ стали мыслить какъ о самостоятельномъ, но тормозимомъ изъ нѣкотораго центра дѣйствія, стремленіи переноснаго поступательнаго движенія, то мы имѣемъ еще мало причинъ слишкомъ высоко цѣнить эти античныя мнѣнія. Съ точки зрѣнія нынѣ привычныхъ намъ понятій эти разрозненныя мѣста выглядятъ опредѣленнѣе, чѣмъ они могли быть первоначально мыслимы, а потому мы хорошо сдѣлаемъ, если разъ навсегда откажемся отъ подобной склонности сравнивать античныя мнѣнія съ нашимъ новымъ знаніемъ, какъ такія стремленія натуральнаго, но смутнаго мышленія, которыя прежде всего остаются безъ дальнѣйшаго вліянія.

77. Понятіе объ уклоненіи къ землѣ или вообще понятіе о приближеніи къ нѣкоторому центру можетъ быть еще весьма далекимъ отъ опредѣленной идеи о дѣйствительномъ паденіи. Что такое паденіе на землю и что такое означаетъ при этомъ, такъ сказать, сила паденія, идеи, какія имѣлъ объ этомъ Галилей, были, конечно, совсѣмъ иного рода, чѣмъ смутныя представленія предшествующихъ временъ и древняго міра. Сравненіе космическихъ движеній съ паденіемъ могло получить болѣе строгій смыслъ не раньше, чѣмъ то явленіе, съ которымъ сравнивали неизвѣстное, само было глубже постигнуто и форма его дѣйствія изслѣдована. Отсюда понятно, что только тѣ представленія о притяженіи могли имѣть смыслъ настоящаго тяготѣнія, которыя слѣдовали за Галилеевскими завоеваніями. Примѣромъ ранняго, еще весьма смутнаго представленія о функціяхъ тяжести можетъ служить идея великаго основателя новой астрономіи. Коперникъ представлялъ себѣ, что тяжесть состоитъ въ нѣкоторомъ стремленіи (*appetentia*) къ центру, въ силу чего массы и получили шарообразную форму, и что существованіе такой формы и есть свидѣтельство о всеобщемъ распространеніи такого рода тяжести. Онъ говоритъ буквально¹: «Я того мнѣнія, что тяжесть есть ничто иное какъ родъ присущаго частицамъ естественнаго стремленія (*appetentiam quandam naturalem partibus inditam*) соединяться въ единое цѣлое шарообразной формы; позволительно думать, что эта аффекція свойственна также солнцу, лунѣ и другимъ планетамъ, и что они въ силу этого и сохраняютъ шарообразный видъ».

Что касается Кеплера, установившаго именно тѣ астрономическіе

¹ *Astronomia instaurata*, книга I, глава 9.

факты, благодаря которымъ и сдѣлалась возможна теорія тяготѣнія, то онъ имѣлъ уже весьма опредѣленные представленія о космической тяжести. Знаменито его воззрѣніе, что при взаимномъ сближеніи луны и земли, первая прошла бы $\frac{88}{84}$ пути, между тѣмъ какъ земля, вслѣдствіе своей болѣе значительной массы, прошла бы навстрѣчу лунѣ лишь сравнительно небольшую остальную часть пути ¹. Впрочемъ, Кеплеръ, стремясь въ своихъ всеобъемлющихъ умозрительныхъ опытахъ объяснить и самую причину обращеній планетъ, сводя ее къ солнцу какъ средоточію дѣятельности, подпалъ между прочимъ влиянію идей о нѣкоторомъ магнитномъ отталкиваніи, которыя и исказили его болѣе вѣрные взгляды ². Разницы въ скоростяхъ обращенія планетъ приписывалъ онъ влиянію неодинаковой инерціи массъ, каковое должно было преодолеваться возникающею въ вращающемся солнцѣ силою обращенія.

Для насъ гораздо важнѣе этихъ разнообразныхъ представленій, съ которыми мы встрѣчаемся у Кеплера, то обстоятельство, что несмотря на окончательные блестящіе результаты, къ которымъ онъ пришелъ, онъ не смогъ ни удержать чистаго представленія о всеобщемъ притяженіи, ни прочно усвоить допущенія о квадратичномъ ослабленіи подобной центральной силы. Онъ, обнародовавшій въ 1619 г. въ *Harmonia mundi* положительный законъ ³, по которому квадраты временемъ обращенія планетъ относятся какъ кубы большихъ осей, т.-е. разстояній отъ солнца, отвергъ даже квадратичное уменьшеніе, и на мѣсто его поставилъ простую пропорціональность разстояніямъ. Онъ не могъ придти къ тому простому заключенію, которое тотчасъ же позволяетъ превратить рассматриваемый законъ въ ту формулу, что центростремительныя или, если угодно, и центробѣжныя двигательныя побужденія относятся обратно пропорціонально квадратамъ разстояній, и что такимъ образомъ дѣйствіе, направленное къ центру, мыслимо уменьшающимся какъ квадратъ разстоянія. Что же ему мѣшало при этомъ? Очевидно, не недостатокъ гениальности, о которой въ полной мѣрѣ свидѣлствуютъ какъ его эмпирическія изслѣдованія, такъ и спекулятивныя, и даже наиболѣе туманныя мечтанія! Стало быть, что касается личныхъ качествъ, то не было никакого основанія — ожидать для обоснованія теоріи тяготѣнія появленія Ньютона. Причина была объективная и зависѣла совсѣмъ отъ иныхъ условій. Завоеванія пережившаго его современника его Галилея — для Кеплера какъ бы не существовали, и еще

¹ *Astronomia nova seu de motu stellae Martis, introductio*. Изд. Фриша. 8 т. Франкф. 1858—1871 г. Т. III, стр. 151.

² *Ibid.* cap. 33—34. Стр. 300 и слѣд.

³ *Harmonices mundi liber quintus*, cap. 3, Т. V цит. изд., Стр. 279.

менѣе была къ его услугамъ, появившаяся лишь спустя цѣлое поколѣніе послѣ его смерти, теорія центральнаго движенія, формулированная Гюйгенсомъ. Но безъ нея невозможно было цѣлесообразно преобразовать законъ временъ обращенія и пріобрѣсти какую-либо дѣйствительно механическую идею о величинѣ силъ, направленныхъ къ центру. Нужно было имѣть квадратъ скорости, дѣленный на радіусъ, уже какъ форму для мѣры центральной силы, дабы изъ Кеплерова закона о квадратахъ временъ обращенія простыми алгебраическими операціями вывести формулу, которая выражала бы квадратичное уменьшеніе аттракціи при возрастаніи разстоянія. Но болѣе полустолѣтія должно было пройти, прежде чѣмъ совершена была комбинація обѣихъ точекъ зрѣнія, и эта отсрочка объясняется единственно тѣмъ, что тотъ, кто обладалъ достаточными познаніями въ астрономіи и необходимою смѣлостью умозрѣнія, способнаго подмѣчать законы, не имѣлъ еще въ своемъ распоряженіи потребныхъ расчленяющихъ средствъ механическаго мышленія. Если мы припомнимъ вышеупомянутые (§ 74) два главные ствола научнаго преданія, то можно сказать, что первоначальная ихъ изолированность, а именно собственно механики отъ законовъ астрономіи, была причиною относительно запоздалаго развитія, уже замѣтной въ своихъ зачаткахъ, идеи тяготѣнія. На сколько недостаточно самъ Кеплеръ вооруженъ былъ требуемыми въ этомъ отношеніи элементарными представленіями, это мы ясно усматриваемъ изъ того, что хотя онъ и представлялъ себѣ инерцію покоящейся матеріи какъ нѣчто такое, что противопоставляло движенію пропорціональное массѣ сопротивленіе, но что онъ не зналъ инерціи въ формѣ косной скорости, и потому полагалъ, что нужна непрерывная причина для объясненія переноснаго движенія въ планетныхъ обращеніяхъ.

78. Около того времени, когда и Ньютонъ началъ заниматься въ направленіи идеи тяготѣнія, слѣдовательно годами двадцатью ранѣе того, какъ онъ выступилъ съ уже законченною теоріей, у различныхъ авторовъ обнаружались весьма ясныя слѣды той энергіи, съ какою факты и мысли стремились къ новому открытію. Въ этомъ отношеніи слѣдуетъ въ особенности упомянуть о Борелли, который въ своей работѣ о спутникахъ Юпитера ¹ отправляется отъ идеи, что планеты и спутники стремятся соединиться съ тѣмъ шаромъ, около котораго они обращаются, и что круговое движеніе обуславливаетъ стремленіе (*impetum*) удаляться отъ центра. Равновѣсіе между обоими стремленіями разсматривается имъ какъ причина возможности обращеній.

¹ Theoricæ Medicorum planetarum ex causis physicis deductæ, Флоренція 1666.

Значительно ближе, нежели Борелли, подошелъ къ системѣ тяготѣнія одинъ изъ земляковъ Ньютона, прямо обратившій вниманіе на собственно механическія отношенія и даже экспериментировавшій въ этомъ направленіи. Свои мысли о тяготѣніи Гукъ развилъ въ особомъ сочиненіи ¹, но лишь позднѣе пришелъ къ допущенію квадратичнаго ослабленія этой силы. Если принять въ расчетъ это послѣднее представленіе, то очевидно, что на долю Ньютона оставалось лишь доказательство фактическаго тождества земной тяжести и аттракціи. Большое преимущество Гука въ сравненіи съ его предшественниками состояло въ томъ, что онъ съ самаго начала смотрѣлъ на общіе механическіе законы какъ на ключъ къ постиженію планетныхъ движеній. Онъ не только различалъ прямолинейную скорость по инерціи, которую онъ мыслилъ возникшею разъ навсегда вслѣдствіе первоначальнаго толчка, отъ уклоняющаго аттракціоннаго начала, но взвѣшивалъ и вліяніе разницы величинъ этихъ обоихъ стремленій. Онъ допускалъ необходимость возникновенія эллиптическаго движенія. Впрочемъ, онъ предсказывалъ, что тотъ, кто точнѣе сдумѣлъ бы проникнуть въ количественныя отношенія, долженъ бы былъ придти и къ точнѣйшему опредѣленію планетныхъ явленій. Такимъ образомъ, механическая проблема космическаго тяготѣнія была ему совершенно ясна. На его препирательства съ Ньютономъ проливаетъ много свѣта письмо послѣдняго къ Галлею отъ 20 іюня 1686 ², и приэтомъ вмѣстѣ съ тѣмъ обнаруживается, что предположеніе квадратичнаго уменьшенія тяжести само по себѣ, безъ дальнѣйшаго вывода слѣдствій, не могло еще имѣть рѣшающаго значенія. Ньютонъ даже ссылается въ этомъ письмѣ на то, что такого рода уменьшеніе уже гораздо раньше предполагалъ Бульо ³. Слѣдовательно, хотя Гукъ и зашелъ достаточно далеко, но онъ не далъ доказательства тождества земной тяжести съ аттракціей, да кромѣ того ему недоставало и болѣе точнаго представленія, приписывающаго тяготѣніе каждой частичкѣ матеріи какъ таковой и дѣлающаго возможнымъ выводъ законовъ притяженія внутри шарообразныхъ массъ. Точно также и строго математическія основы происхожденія эллиптическихъ путей должно было еще выработать, и здѣсь то и предлежало Ньютону наиболѣе соразмѣрное съ его дарованіями поле изслѣдованій.

79. Мы не можемъ пускаться здѣсь въ изслѣдованіе особыхъ обстоятельствъ, при которыхъ самъ Ньютонъ пришелъ, мало-по-ма-

¹ An attempt to prove the motion of the earth etc. London 1674.

² Приведено у Брюэстера, *Memoirs of the life of Newton*, 2 т. London, 1855, Т. I. Стр. 442 и слѣд.

³ Подразум. Ism. Bullialdi *Astronomia Philolaica*. Paris 1645. Lib. I, cap. XII.

лу, къ окончательному результату, и рѣшеніе вопроса о томъ, въ какой мѣрѣ онъ чѣмъ-нибудь былъ обязанъ намекамъ Гука, въ рамки нашей задачи не входитъ. Гораздо важнѣе этихъ препирательствъ—вполнѣ ясная связь его изслѣдованій съ Кеплеровыми трудами. Въ письмѣ къ Галлею отъ 14 іюля 1686 г.¹ Ньютонъ самъ заявляетъ, что уже 20 лѣтъ тому назадъ онъ вывелъ законъ квадрата разстояній изъ Кеплеровскаго закона. Такимъ образомъ въ этомъ пунктѣ опытъ вмѣстѣ съ относящимся сюда чисто индуктивнымъ умозрѣніемъ нѣмецкаго мыслителя предшествовалъ разсмотрѣнію внутреннихъ причинъ, и способъ, посредствомъ котораго Ньютонъ пришелъ къ своему результату, составлялъ положительный контрастъ тому приему, посредствомъ котораго Галилей положилъ основаніе динамикѣ. Антиципирующая мысль служила итальянцу путеводною нитью при открытіи фактическихъ законовъ паденія; между тѣмъ какъ, наоборотъ, англичанину уже установленный какъ фактъ законъ соотношенія временъ обращенія съ разстояніями долженъ былъ служить руководящею нитью, и именно руководящею нитью для просто разлагающаго мышленія. Положительная заслуга этого разложенія факта, взятаго изъ наблюденія, на его составные элементы или частные факты, состояла у Ньютона въ дѣйствительномъ обнаруженіи механическихъ факторовъ. Необходимую помощь при этомъ, какъ уже раньше указано, дало выраженіе центробѣжной силы, которая, по закону Гюйгенса, была прямо пропорціональна квадрату скорости и обратно пропорціональна радіусу или разстоянію. Воспользовавшись Кеплеровымъ равенствомъ отношенія квадратовъ временъ обращенія отношенію кубовъ (среднихъ) разстояній для вывода выраженія отношенія центробѣжныхъ силъ посредствомъ простыхъ подстановокъ, онъ нашелъ, что послѣднее было обратно отношенію квадратовъ разстояній. Таково въ высшей степени простое происхожденіе усмотрѣнія общей формы тяготѣнія или, лучше, аттракціи; но этимъ закономъ квадратичнаго уменьшенія еще не было установлено, имѣетъ ли дѣйствующее такимъ образомъ между планетами, спутниками и солнцемъ притяженіе или центростремительное дѣйствіе что-либо общее съ осязательною на землѣ тяжестью. Законъ этого ослабленія имѣлъ форму факта, котораго всеобщность даже въ силу непосредственной аналогіи не выходила еще за предѣлы отношенія космическихъ тѣлъ, какъ тѣлыхъ массъ. Поэтому, дабы познать сущность аттракціи, какъ дѣйствительнаго тяготѣнія, нужно было построить мостъ, который давалъ бы возможность сравнить дознанныя Галилеемъ свойства сво-

¹ Приведено у Брюстера, *Memoirs of the life of Newton*, т. , стр. 449.

боднаго паденія у поверхности земли съ свойствами космической аттракціи.

Наведеніе этого моста и составляет особенность Ньютоновскаго пріема, и лишь въ этомъ пунктѣ открытіе его начинаетъ принимать тотъ видъ, которымъ оно безспорно отличается отъ всѣхъ предшествовавшихъ или одновременнѣ съ нимъ конкурировавшихъ концепцій. Извѣстно, что Ньютонъ сравнилъ центростремительное движеніе луны въ теченіе пробѣга ею нѣкоторой частички пути, слѣдовательно паденіе ея, т. е. уклоненіе отъ касательной, съ соотвѣствующимъ тому же самому времени пространствомъ паденія у поверхности земли, въ предположеніи квадратичнаго ослабленія силы, и такимъ образомъ окончательно установилъ тождество обоихъ явленій. А именно, оказалось, что оба явленія паденія различаются между собою не инымъ чѣмъ, какъ своею особою величиною соотвѣтственно закону квадратичнаго уменьшенія. Такимъ образомъ единство силы, лежащей въ основѣ явленій земной тяжести и всеобщей аттракціи, доказано было на столько убѣдительно, на сколько это возможно; ибо теперь имѣли передъ собою два дѣйствія, различающіяся лишь количественно, которыя возможно было подвести подъ общую форму дѣйствія и ея законъ. Но что слѣдовало разумѣть подъ понятіемъ силы, а въ данномъ случаѣ спеціально всеобщей силы тяжести, всеобщей аттракціи или тяготѣнія, это для главнаго познанія и для доказательства единства принципа было совершенно безразлично; ибо частныя дѣйствія были приведены къ общей формѣ дѣйствія, а болѣе этого сдѣлать было и невозможно и не нужно. На этомъ основаніи, можно замѣтить лишь мимоходомъ, что Ньютонъ, любившій представлять себѣ на самомъ дѣлѣ отношеніе тяготѣнія подъ видомъ дѣйствительнаго притяженія и въ виду этого подвергавшійся нападкамъ, въ сущности, не хотѣлъ придавать такому воззрѣнію никакого значенія, и хотѣлъ, чтобы обоснованіе ученія о тяготѣніи разсматривалось независимо отъ подобныхъ идей о внутреннемъ свойствѣ силы. Въ этомъ, очевидно, онъ былъ правъ; ибо какія бы свойства и отношенія причина разсматриваемой группы явленій или разсматриваемой системы процессовъ ни имѣла бы, во всякомъ случаѣ, своими дѣйствіями она была не только несомнѣнно охарактеризована, но и исключительно въ этихъ своихъ дѣйствіяхъ была предметомъ науки. Напримѣръ, наше поколѣніе узнало новое отношеніе тяжести, въ силу котораго она имѣетъ внутреннее соотношеніе съ тепловыми явленіями; но это познаніе, не взирая на то, что значеніе его чрезвычайно широко, не можетъ ни малѣйшимъ образомъ поколебать законность разъ навсегда установленныхъ принциповъ тяготѣнія.

Всѣмъ извѣстно, что Ньютоново доказательство тождества тяготѣнія въ явленіяхъ обыкновенной тяжести и въ притяженіи луны долгое время не двигалось впередъ, благодаря тому, что первая, уже весьма раннія свои вычисленія онъ производилъ, взявъ за основаніе неточную величину земнаго радіуса, и лишь позднѣе исправилъ ошибку, послѣ того какъ Пикаромъ сдѣлано было новое градусное измѣреніе. Первоначальное вычисленіе не приводило къ достаточному согласію между пространствомъ, проходимымъ въ первую секунду падающимъ тѣломъ у поверхности земли, и пространствомъ паденія луны, и благодаря этому результату Ньютонъ склонялся даже къ тому мнѣнію, будто бы тяготѣніе только частію проявляется какъ притяженіе, остальная же часть его сводится къ вихревому движенію. Такая нерѣшительность, выказанная Ньютономъ въ началѣ его изслѣдованій, еще яснѣе указываетъ на то, что нервъ доказательства идентичности тяготѣнія заключался въ количественномъ согласіи различныхъ дѣйствій причинъ, предполагавшихся однородными или аналогичными.

80. Здѣсь мы дошли до того пункта, когда идея тяготѣнія достигла достаточной опредѣленности, дабы развиваться въ механику тяготѣнія. Если всякое произвольно малое тѣло тяготѣетъ у поверхности земли, то этимъ въ сущности уже дано было представленіе, что всякая матеріальная частица притягивается, а въ виду всеобщей взаимности массовыхъ притяженій едвали необходимъ былъ особый шагъ, чтобы мыслить, что и самая эта частица также притягиваетъ. Планеты притягивали спутниковъ и сами притягивались солнцемъ. Поэтому, и не ссылаясь на явленіе приливовъ и отливовъ или даже на взаимныя возмущенія, было понятно, что должно было представлять себѣ, что аттракція вездѣ связана съ матеріей, и что слѣдовательно всякая масса и притягивается и вмѣстѣ сама притягиваетъ. Но отнюдь нельзя было поставить предѣла для величины тѣла, при которой еще имѣла бы мѣсто всеобщая тяжесть. Не было никакого основанія, почему не должна тяготѣть половина массы, если это свойство имѣетъ цѣлое, и слѣдовательно тяготѣніе элементовъ, какъ таковыхъ, было неизбѣжною идеею. Сюда присоединялась и та общія идея механики, въ силу которой масса вездѣ составляла фактора—множителя всякой силы, а потому всякую движущую силу должно было разсматривать какъ присущую частицамъ массы. Изслѣдованія о равнодѣйствующей земной тяжести и о ея уклоненіяхъ, равно какъ и розысканія о притяженіи внутри массъ, должны были подтверждать воззрѣніе, что тяготѣніе имѣетъ мѣсто между элементами. Выводя слѣдствія въ этомъ направленіи, Ньютонъ проложилъ путь, слѣдуя которому аналитическая механика тяготѣ-

нія позднѣе разработана была до мельчайшихъ подробностей, и научила изъ возмущеній заключать о существованіи еще невиданныхъ планетъ.

Указавъ на это принципиальное открытіе новаго поприща механики, мы должны теперь обратиться къ теоріи криволинейнаго движенія, посредствомъ которой Ньютонъ овладѣлъ основными чертами новаго рода силъ и выяснилъ Кеплеровы факты изъ внутреннихъ основаній. Впрочемъ, въ этомъ отношеніи мы будемъ кратки, ибо въ данномъ случаѣ, не смотря на всю его важность, все наше дѣло должно состоять только въ указаніи того обстоятельства, что въ предположеніи идеи тяготѣнія все остальное развитіе имѣло чисто математическій характеръ и не нуждалось ни въ одномъ новомъ принципѣ механики. Строго говоря, даже вся эта отрасль теоріи въ своей самой крайней отвлеченности, — чисто форономическая, ибо разниа массъ прежде всего совѣмъ не подлежитъ разсмотрѣнію и притяженіе означаетъ не болѣе какъ стремленіе къ сближенію даннаго вида и величины.

Припомнимъ, что Гюйгенсъ представлялъ круговое движеніе, въ каждой его точкѣ, какъ нѣкоторое центральное стремленіе, прямо пропорціональное квадрату скорости и обратно пропорціональное радіусу. Далѣе, припомнимъ, что такое изображеніе сохраняется со всею строгостью и для всякаго другаго неравноѣрнаго и произвольнаго криволинейнаго движенія, если только на мѣсто радіуса поставить болѣе общее понятіе радіуса кривизны. Такимъ образомъ, каково бы ни было криволинейное движеніе, во всякомъ случаѣ, примыкая непосредственнѣйшимъ образомъ къ Гюйгенсовымъ идеямъ, мы имѣемъ выраженіе для центрального стремленія въ направленіи нормали, имѣющаго мѣсто въ каждой точкѣ пути. Въ виду этого, Ньютону оставалось сдѣлать не много, поскольку движенія подъ вліяніемъ тяготѣнія разсматривались въ грубыхъ чертахъ, какъ движенія, соотвѣтствующія среднимъ разстояніямъ, и слѣдовательно дѣло было лишь въ измѣреніи, въ среднихъ числахъ, центростремительнаго влеченія, которое можно было разсматривать совпадающимъ съ радіусомъ кривизны. При относительной незначительности эксцентрицитетовъ, какъ напр. лунной орбиты, можно было при первыхъ соображеніяхъ о дѣйствіяхъ тяготѣнія поступать такъ, какъ будто бы рѣчь шла о круговыхъ путяхъ. Но задача должна была принять иную форму, какъ скоро требовалось пойти далѣе общаго и средняго, какъ бы статическаго отношенія величинъ тяготѣнія въ различныхъ точкахъ пути и отвѣтить на вопросъ, какова должна быть форма пути при данной въ нѣкоторой точкѣ тангенціальной скорости по инерціи и при данномъ притяженіи къ нѣкоторой не-

подвижной точкѣ, лежащей не въ направленіи нормали къ той скорости. Въ этомъ — главная задача, и для ея разрѣшенія должно было дать силу притяженія не просто только по ея величинѣ для данной точки, но также и по формѣ ея зависимости отъ разстоянія. Такимъ образомъ слѣдовало предположить, что она уменьшается пропорціонально квадратамъ разстояній, какъ скоро опредѣленію подлежали кривыя свободнаго движенія подъ вліяніемъ тяготѣнія и ихъ положеніе относительно центра дѣйствія. Ньютонъ нашель, что такого рода движеніе всегда должно совершаться по коническому сѣченію съ центромъ дѣйствія въ фокусѣ. Величина данной тангенціальной скорости въ сравненіи съ притяженіемъ рѣшаетъ вопросъ о томъ, какой частный видъ коническаго сѣченія долженъ получиться. Такимъ образомъ эллиптический видъ планетныхъ движеній является слѣдствіемъ взаимодействія тангенціальной скорости по инерціи и притяженія, дѣйствующаго обратно пропорціонально квадратамъ разстояній. Въ этомъ отношеніи абстрактная часть Ньютоновой теоріи движенія занимается, между прочимъ, и доказательствомъ того, что при другихъ условіяхъ, какъ напр. при другомъ воображаемомъ законѣ притяженія, не возникаетъ путей по коническимъ сѣченіямъ, которые имѣли бы центръ дѣйствія въ фокусѣ. Въ силу этого, сказанное отношеніе взаимнообратно; коническое сѣченіе съ центромъ силы въ фокусѣ даетъ квадратичное притяженіе, какъ единственно возможную предпосылку своего происхожденія отъ дѣйствія тяготѣнія, а законъ квадратичнаго притяженія даетъ — какъ единственную возможность своего осуществленія — форму путей по коническимъ сѣченіямъ.

81. Тамъ, гдѣ — какъ у кометъ — эксцентрицитеты велики, особенно замѣтно, что путь есть какъ бы линія паденія, и что тангенціальныя скорости въ каждой точкѣ обусловливаются большею частію дѣйствительнымъ паденіемъ. Напр., если вообразимъ, что косвенная начальная скорость относительно весьма мала, то будетъ казаться, что притягиваемое тѣло устремляется почти къ центру дѣйствія, т.е. оно будетъ описывать около центра растянутый эллипсъ, въ которомъ возрастаніе скоростей имѣетъ мѣсто почти въ направленіи большой оси, и такимъ образомъ существованіе тангенціальныя скорости слѣдуетъ поставить преимущественно на счетъ ускоряющей силы притяженія. Также въ подобномъ случаѣ особенно отчетливо замѣтно косвенное положеніе радіуса—вектора, и различіе между тангенціальнымъ и центростремительнымъ ускореніемъ выступаетъ вполне наглядно. Въ самомъ дѣлѣ, тогда какъ въ Гюйгенсовомъ образцовомъ случаѣ центробѣжной силы послѣдняя только то представляла, что кромѣ коснѣнія скорости имѣло мѣсто какъ от-

клоняющая сила и слѣд. не могло быть рѣчи о тангенціальной силѣ, такъ, напротивъ того, въ каждомъ типѣ движенія, въ которомъ центральная тяга направлена не перпендикулярно къ касательной, центральная сила, не обращаясь въ нуль, можетъ быть мыслима проектированной на касательную, и такимъ образомъ получается извѣстное разложеніе на тангенціальную и центростремительную силу.

Мы привели эти элементарныя понятія лишь для того, чтобы охарактеризовать главныя черты Ньютоновой теоріи криволинейныхъ движеній. Эта теорія начертана имъ въ подобныхъ варіаціяхъ настолько абстрактно, что повидимому въ ней изслѣдуется значительно больше того, что требуется настоящей цѣлью, т.-е. объясненіемъ механической конституціи движеній, обусловленныхъ тяготѣніемъ. Однако, всматриваясь въ дѣло ближе, убѣждаемся, что должно было взвѣсить гипотетически всякаго рода сродныя возможности, чтобы доказать необходимость эксцентрическаго движенія по коническому сѣченію. Весьма простой примѣръ покажетъ намъ, что центральное эллиптическое движеніе не можетъ соответствовать условіямъ тяготѣнія. Въ самомъ дѣлѣ, стоитъ только вообразить себѣ, что Гюйгеново равномерное круговое движеніе проэктировано во всѣхъ своихъ отношеніяхъ на непараллельную съ нимъ плоскость, чтобы получить движеніе по эллипсу около его центра, причемъ, по нѣкоторому соображенію, окажется, что центральная тяга увеличивается въ простомъ отношеніи съ разстояніемъ отъ центра. Очевидно, фактическія отношенія тяготѣнія, для квадратичной формы которыхъ на первый взглядъ не имѣется никакихъ внутреннихъ основаній, наглядно уяснятся, если центральное движеніе трактовать вообще и для различныхъ законовъ притяженія. Точно также, дѣло абстрактной теоріи криволинейнаго движенія излагать совершенно общія свойства всякаго центрального движенія, какъ напр. предложеніе о пропорціональности площадей секторовъ временамъ, независимо отъ какой-либо частной формы. Ньютоново начертаніе представляетъ въ этомъ отношеніи главу общаго ученія о движеніи. Въ 3-й книгѣ о системѣ міра, предложеніе 13-е, говорится объ эллиптическомъ движеніи планетъ и о Кеплеровой теоремѣ относительно пропорціональности описываемыхъ секторовъ временамъ, и весь этотъ планетный законъ движенія, который прежде всего данъ былъ какъ фактъ, индуктивно установленный Кеплеромъ, является доказуемымъ «*a priori*» изъ механическихъ началъ, просто при помощи теоремъ I и XI и королларія I къ XIII теоремѣ первой книги. Эти предложенія относятся ко 2-му и 3-му отдѣламъ, въ которыхъ идетъ рѣчь объ опредѣленіи центростремительныхъ силъ и объ эксцентрическомъ движеніи по коническимъ сѣченіямъ. Въ первой теоремѣ высказывается

пропорціональність площадей временамъ; одиннадцатая содержитъ задачу о выводѣ закона притяженія изъ даннаго эксцентрическаго движенія по эллипсу, а упомянутый королларій содержитъ общее формулированіе взаимной сопринадлежности квадратичнаго притяженія и путей по коническимъ сѣченіямъ.

Въ чисто механическомъ развитіи этихъ основныхъ формъ и основныхъ свойствъ свободного центрального движенія заключается вмѣстѣ съ тѣмъ анализъ криволинейныхъ движеній вообще; это и есть та сторона теоріи, въ силу которой у Ньютона слѣдуетъ искать и основаній или начатковъ принциповъ, каковыя въ полной своей общности, какъ напр. начало площадей, лишь позднѣе играли роль динамическихъ основныхъ отношеній всей механики. Но познаніе такихъ общихъ свойствъ движеній опредѣленнаго типа пріобрѣтается полный интересъ только при переходѣ къ высшимъ ступенямъ абстракціи аналитически раціональной механики, а потому мы коснемся этихъ Ньютоновскихъ исходныхъ пунктовъ лишь вполслѣдствіи. Здѣсь мы напомнимъ только, что ядро новой теоріи аттракціонныхъ движеній слѣдуетъ искать въ предложеніи XVII первой книги, гдѣ разрѣшена задача объ опредѣленіи орбиты по даннымъ: начальной скорости и квадратичному притяженію. Въ этомъ производженіи криволинейнаго пути изъ пунктуальныхъ элементовъ видѣтъ, какъ уже выше было изъяснено, рѣшительный прогрессъ, такъ какъ этотъ пріемъ разложенія Кеплеровыхъ фактовъ на ихъ механическія составныя части былъ подвергнутъ соотвѣтственному обращенію. Въ настоящее время этотъ процессъ заключается въ небольшомъ интегрированіи пары дифференціальныхъ формулъ, между тѣмъ какъ простое разложеніе полныхъ фактовъ требуетъ даже только простаго дифференцированія. Отсюда усматривается важность обращенія выводовъ. Какъ бы строящій генезисъ орбитъ соотвѣтствуетъ механическимъ производящимъ актамъ природы, а путь разрѣшенія цѣльныхъ фактовъ на составные элементы дополняется путемъ идеального производженія этихъ фактовъ изъ ихъ элементовъ.

82. Превращеніе Кеплеровскихъ фактовъ въ необходимые результаты притяженія, представленное нами доселѣ какъ Ньютонова система механики тяготѣнія, на первыхъ порахъ еще совсѣмъ не обращало вниманія на массы. Кеплеръ наблюдалъ, такъ сказать, форономическія явленія, и сведеніе ихъ къ центральному стремленію тѣлъ сближаться обратно пропорціонально квадрату разстоянія не измѣняло общаго вида дѣла. Эксцентрическое движеніе по эллипсу, т.-е. повидимому простѣйшій изъ Кеплеровыхъ законовъ, включалъ и два другіе, какъ скоро сдѣланъ былъ предметомъ расчлененія. Анализъ эксцентрически-эллиптического пути, если послѣдній рассматри-

вать форономически самъ въ себѣ и изслѣдовать аналогично круговому движенію, даетъ все остальное чисто геометрическимъ путемъ. Квадратичное ослабленіе центральнаго стремленія съ увеличеніемъ разстоянія является при этомъ конститутивнымъ основнымъ свойствомъ этого образа, между тѣмъ какъ описываніе равныхъ секторовъ въ равныя времена есть свойство, раздѣляемое имъ со всякимъ центральнымъ движеніемъ. Если сочетать вмѣстѣ разсмотрѣніе нѣсколькихъ эллипсовъ, въ которыхъ законъ квадратичнаго ослабленія, найденный для одного, положенъ въ основаніе всей группы, т.-е. положенъ по отношенію къ общему фокусу, то получится Кеплеровъ законъ, что квадраты временъ обращеній относятся какъ кубы большихъ осей. Отсюда явствуется, что доселѣ мы имѣли дѣло въ нѣкоторомъ родѣ съ болѣе тонкой форономіей, въ которой движеніе разсматривалось лишь само въ себѣ, т.-е. просто какъ феноменальная величина, дабы извлечь изъ нея важнѣйшіе основные законы. Но вмѣстѣ съ этимъ становится понятнымъ и то, почему здѣсь еще не могъ подлежать разсмотрѣнію новый, собственно механическій принципъ, и почему даже идея тяготѣнія требовалась въ этомъ отношеніи лишь постольку, поскольку она включала форономическую мысль о нѣкотораго рода сближеніи.

Но мы тотчасъ же встрѣчаемся съ специфически-механическими принципами, какъ скоро переходимъ отъ явленій движенія къ массовымъ отношеніямъ. Заключение о количествѣ матеріи, содержащейся въ различныхъ притягивающихся міровыхъ тѣлахъ, есть тотъ шагъ, при которомъ форономія тяготѣнія только и превращается въ механику тяготѣнія собственно. При этомъ необходимо представленіе объ измѣреніи силъ тяготѣнія, и это представленіе должно вмѣстѣ съ тѣмъ содержать схему для силового измѣренія вообще. Эти соображенія тотчасъ приводятъ насъ къ основнымъ началамъ и основнымъ понятіямъ. Мы оставляемъ пока въ сторонѣ это заключение о массахъ, возможность котораго еще должна быть подготовлена строго принципиальными усмотрѣніями, и переходимъ къ обзору формированія руководящихъ аксіомъ у Ньютона, поскольку здѣсь выступаетъ что-либо особенное.

Какъ уже сказано, тремъ книгамъ Ньютоновскаго главнаго произведенія предшествуетъ начертаніе вступительныхъ прелиминарій, которое можно бы было нѣкоторымъ образомъ сравнить съ эвклидовскими *Prota*. Оно содержитъ опредѣленія и аксіомы движенія (*axiomata sive leges motus*). Но, какъ сейчасъ покажетъ намъ первый же принципиальный случай, мы ошиблись бы, еслибы ограничились исключительно этимъ введеніемъ и не стали бы искать основныхъ понятій и въ другихъ мѣстахъ. Тѣ изъ концепцій, кото-

рия всего скорѣе могли бы требовать себѣ мѣста въ самомъ началѣ, должно искать наприм. уже въ леммѣ X первой книги, которая гласитъ, что сила, даже если она и не постоянна, производитъ въ началѣ пространства, пропорціональныя квадратамъ временъ.

Галилеевская тяжесть была силою безусловно постоянною, и въ законахъ паденія вообще была установлена общая форма дѣйствія постоянной силы. Эта форма дѣйствія состояла въ производженіи пространствъ пропорціонально квадратамъ временъ, или, если разсматривать дѣйствія въ ихъ простыхъ элементахъ,—ни въ чемъ иномъ, какъ въ сообщеніи скоростей пропорціональных времени дѣйствія. Такимъ образомъ, постоянная сила измѣрялась скоростью, какую она сообщала движущемуся тѣлу въ произвольную единицу времени. Самому Галилею еще не встрѣчалось случая, гдѣ онъ долженъ бы былъ сравнивать и измѣрять силы, принимая въ расчетъ матерію, кромѣ случаевъ статическихъ отношеній. Въ собственной его динамикѣ на различія силового дѣйствія, происходящія отъ количествъ матеріи, не обращалось вниманія. Его теоремы о равенствѣ силы восхожденія до высоты паденія количеству силы, произведенной паденіемъ, всегда относились къ одному и тому же тѣлу неопредѣленной и все-равно какой массы. Лишь въ статическихъ отношеніяхъ на простыхъ машинахъ или въ случаѣ жидкостей выступило основоположеніе, что обоими факторами силовой величины служатъ количество матеріи и скорость. Эта величина, позднѣе получившая техническое наименованіе количества движенія, которую въ особенности имѣлъ въ виду Картезіи, вплоть до Гюйгенсовыхъ изслѣдованій о центрѣ качанія играла роль понятія, которое находило себѣ примѣненіе лишь въ отношеніяхъ не собственно динамическихъ. Очевиднѣйшимъ образомъ только при разработкѣ законовъ удара выступила необходимость оцѣнивать специфически динамическія силы въ ихъ дѣйствіи на различныя массы. Такимъ образомъ выработалось представленіе, что постоянная сила должна измѣряться скоростью, какую она сообщаетъ нѣкоторой единицѣ массы въ нѣкоторую единицу времени. Поэтому вплоть до этого пункта Ньютонъ принималъ уже выработанныя представленія и фиксировалъ ихъ въ отвлеченной формѣ для только что открывшагося поля приложений. Его такъ называемая *vis motrix* есть ничто иное какъ стремленіе, которое въ отношеніяхъ равновѣсія является какъ вѣсъ или напряженіе, и слѣдовательно означаетъ то элементарное побужденіе, которое въ своемъ дѣйствіи развитіи производитъ скорости и измѣряется скоростью, произведенною въ единицу времени. Это—то самое, что нынѣ ради краткости называютъ въ механикѣ силою, что отлично отъ всякой ско-

рости по инерціи, и что такимъ образомъ должно противополagаться суммѣ результатовъ дѣйствія, т. е. работѣ силы. Общія физическія силы въ ихъ общей возможности дѣйствія, равно какъ вообще всѣ силы, поскольку онѣ мыслимы сообразно съ общимъ основаніемъ ихъ особыхъ количествъ дѣйствія, всѣ эти силы нельзя иначе охарактеризовать, опредѣлить и измѣрить, какъ взявъ мѣрою простѣйшую форму ихъ дѣйствія и количество дѣйствія по истеченіи единицы времени. Произвожденіе скоростей пропорціо-нально времени служить здѣсь этимъ простымъ способомъ дѣйствія. Это воззрѣніе сохранилось вплоть до Лагранжа и даже до настоящаго времени, и пререканія относительно способа оцѣнки силъ касались въ сущности совсѣмъ не силъ ъ ихъ общей формѣ, но лишь способа сравненія особыхъ количествъ дѣйствія.

То, что насъ здѣсь интересуетъ, также отнюдь не эти послѣднія пререканія, но вопросъ, хватающій глубже, ибо прежде всего слѣдуетъ отвѣтить на основной вопросъ, какъ слѣдуетъ относиться къ силамъ не постояннымъ. Отвѣтъ на это, рѣшительно ведущій дальше Галилеевской точки зрѣнія, Ньютонъ далъ въ упомянутой уже 10-й леммѣ I книги, ибо здѣсь и въ самомъ дѣлѣ рѣчь идетъ не о какомъ-либо вспомогательномъ воззрѣніи, заимствованномъ изъ нѣ-которой чуждой области, слѣдовательно не о какой-либо вводной теоремѣ, но о такой идеѣ, которая должна была стать во главѣ въ видахъ обезпеченія всей механики природы, ибо силы природы обыкновенно суть силы не постоянныя, но претерпѣваютъ необходимое измѣненіе въ зависимости отъ положеній ихъ точекъ при-ложенія или вообще въ зависимости отъ пространственныхъ отно-шеній. То, что Галилей установилъ какъ форму дѣйствія силы для приблизительно постояннаго отношенія, должно было разслѣдовать и для переменнаго отношенія. Количественное пониманіе силъ дол-жно было оставаться шаткимъ до тѣхъ поръ, пока не обезпечено было независимое отъ ихъ измѣняемости понятіе о способѣ ихъ дѣйствія и объ ихъ измѣримости.

83. Послѣднее основаніе къ точному пониманію силъ, измѣня-ющихся съ разстояніемъ, прежде всего такъ, какъ бы они были постоянны, заключается въ непрерывности измѣненія ихъ величины. Ни одна физическая сила, съ которою приходится оперировать, ни въ одно мгновеніе не мыслима какъ только-что возникающая, т. е. начинающаяся отъ нуля, но въ каждый, строго говоря, мо-ментъ времени имѣетъ уже опредѣленную, или, какъ обыкновенно говорятъ, конечную величину. Въ противоположность этой данной величинѣ, всякое измѣненіе, долженствующее имѣть мѣсто въ са-мой силѣ, можетъ развиваться только во времени. Оно должно

совершаться чрезъ прибавленіе величинъ, представляющихъ всякую произвольную степень, какую можно принять послѣ нуля. Поэтому, если положить, что частица времени, въ теченіе котораго сила дѣйствуетъ, неограниченно мала, то и уклоненіе отъ постоянства можетъ быть принято неограниченно малымъ. Только постоянная конечная составная часть силы будетъ имѣть значеніе и давать мѣру силы. Можно пренебречь измѣненіемъ силы внутри элемента времени точно также, какъ мы отвлекаемся отъ измѣненія направленія на протяженіи неограниченно малаго элемента кривой. Способъ дѣйствія силы въ отношеніи пропорціональности скоростей времени будетъ имѣть мѣсто внутри элемента времени съ неограниченнымъ приближеніемъ, или, какъ обыкновенно выражаются, всякую переменную силу въ теченіи мгновенія можно разсматривать такъ, какъ бы внутри этой частицы времени она была постоянна. Эта возможность и есть основаніе для обыкновеннаго опредѣленія мѣры. Способъ дѣйствія, т. е. пропорція между теченіемъ времени и сообщаемою скоростью, на столько же очевидна въ произвольно малую частицу времени, на сколько и для всякаго другаго протяженія времени. Эту малую частицу опять можно представить себѣ какъ угодно разложенною; можно вообразить, что она представляетъ время паденія или иначе нѣкотораго эффекта, можно бы было даже, если бы потребовалось, представить себѣ въ ней цѣлый міръ разнообразныхъ явленій. Впрочемъ, для насъ здѣсь она является только представительницею постоянного дѣйствія нѣкоторой непостоянной силы. Поэтому, мы можемъ вывести изъ нея непосредственно то дѣйствіе, которое послѣдовало бы, если бы сила въ теченіи цѣлой единицы времени дѣйствовала постоянно такъ, какъ, по предположенію, она дѣйствуетъ въ теченіи этой частицы времени, будучи какъ бы постоянной. А отсюда и слѣдуетъ Ньютоново предложеніе, что «въ началѣ» производятся пространства, пропорціональныя квадратамъ временъ, или, другими словами, что Галилеевская форма дѣйствія имѣетъ мѣсто при первомъ проявленіи дѣйствія всякой силы.

Когда хотятъ сравнить между собою силы, то подобное предпріятіе, какъ скоро рѣчь идетъ объ общихъ причинахъ, а не объ особыхъ специальныхъ дѣйствіяхъ въ продолженіи различныхъ временъ при особыхъ обстоятельствахъ, только тогда имѣетъ смыслъ, когда силы съ извѣстной точки зрѣнія являются однородными. Поэтому непостоянныя силы въ какомъ угодно положеніи должно какъ бы фиксировать, чтобы вообще можно было сравнивать ихъ съ постоянными силами и измѣрять. Только такимъ образомъ можно подвести ихъ подъ схему обыкновенной формы дѣйствія, и вообще подчинить ихъ общему динамическому силовому понятію. Искусственная

абстракція, имѣющая здѣсь мѣсто, тотчасъ станетъ очевидна, если примѣрно вообразимъ, что для заданія мѣры тяжести на землѣ взяли бы вмѣсто секунды очень большую единицу времени, напр. сутки. На подобномъ примѣрѣ видно, какое значеніе имѣетъ общая оцѣнка по величинѣ ускоренія для силъ постоянныхъ и непостоянныхъ. Этотъ способъ измѣренія заключаетъ подразумѣваемое условіе, что рѣчь должна идти отнюдь не объ измѣреніи или опредѣленіи всеобщей силы во всей ея тотальности, но лишь объ ея величинѣ при нѣкоторомъ опредѣленномъ положеніи. Потому, строго говоря, предметомъ обыкновеннаго способа оцѣнки становится не сила природы вообще, но сила въ опредѣленномъ мѣстѣ. Тѣмъ не менѣе, такія опредѣленія силъ совершенно точны, если только всегда помнить, что въ основаніи характеристики ихъ посредствомъ скорости, сообщаемой въ единицу времени, положено, какъ ближайшее подразумѣваемое предположеніе, мѣсто дѣйствія въ его пространственной опредѣленности. При неограниченныхъ приближеніяхъ это мѣсто дѣйствія есть неограниченно малое пространство; для приближеній съ опредѣленною степенью точности опредѣляется съ соотвѣтствующимъ опредѣленнымъ ограниченіемъ и ширина сферы, внутри которой можно допустить постоянство. Строго и безъ всякаго приближенія мѣсто дѣйствія слѣдовало бы вообразать лишь какъ непротяженную точку. Но въ такомъ случаѣ исчезло бы и представленіе о развитіи и предметомъ общаго измѣренія постоянныхъ и переменныхъ причинъ дѣйствія осталось бы только силовое побужденіе, какъ бы по сю сторону границы развитія лежащее и всякому движенію предшествующее. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь для этого-то именно побужденія и остается совершенно безразличнымъ постоянство и измѣняемость, и къ опредѣленію величины его, строго говоря, все дѣло только и сводится. Это побужденіе называется напр., съ одной точки зрѣнія—вѣсомъ, съ другой—движущею силою. Выше упомянутая Ньютонова *vis motrix* тоже есть это самое побужденіе, и то, что механика называетъ силою и выражаетъ въ дѣлимомъ вторымъ дифференціаломъ, зависящаго отъ времени, пространства, представляетъ это же именно побужденіе. Дифференціалъ скорости по времени, служащій равнымъ образомъ лишь инымъ выраженіемъ того же самага предмета, показываетъ это еще яснѣе. Въ первомъ случаѣ—квадратъ элемента времени, въ послѣднемъ—самый элементъ времени, есть та продолжительность, на которую нужно раздѣлить элементъ пространства. Такимъ образомъ возникаютъ тѣ дифференціальныя коэффиціенты или производныя функціи, которыя при строгомъ отрѣшеніи отъ всякаго безконечно-малаго элемента измѣняютъ это самое побужденіе, и выражаютъ—по отношенію къ опре-

дѣленнымъ единицамъ времени и пространства, то дѣйствіе, какое этотъ побудъ имѣлъ бы, если бы дѣйствовалъ, оставаясь въ строгомъ смыслѣ слова безъ всякаго измѣненія. Но эта строгая неизмѣняемость имѣетъ мѣсто только для покоя, а кромѣ того имѣетъ строго вѣрный смыслъ еще для непротяженного момента, въ который взаимное отношеніе различныхъ силъ можно мыслить подобнымъ равновѣсію. Но для сравненія и измѣренія большаго и не требуется, и само собою понятно, что Ньютоново представленіе о дѣйствіи въ «началѣ», съ одной стороны, есть приближеніе, а съ другой — наглядное уясненіе нѣкотораго, со всею строгостью существующаго, отношенія пунктуальнаго рода.

84. Не только въ механикѣ тяготѣнія, но и гдѣ угодно въ природѣ приходится имѣть дѣло съ силами, сущность которыхъ состоитъ въ томъ, что онѣ измѣняются вмѣстѣ съ измѣненіемъ разстояній между взаимодействующими массами. Но это обстоятельство не касается Галилеевской формы развитія, по скольку послѣдняя есть схема для изображенія скопленія скоростей, зависящаго непосредственно отъ продолжительности времени. Но это накопленіе обусловливается закономъ инерціи, а потому только послѣдній въ сочетаніи съ послѣдовательными, по предположенію, равными толчками силы и изображается. Какъ скоро эти толчки будутъ измѣняться вмѣстѣ съ измѣненіемъ разстоянія, то общая форма развитія, зависящаго отъ времени, не станетъ отъ этого непримѣнима, а подлѣжитъ лишь видоизмѣненію посредствомъ другой измѣняемости, касающейся самого силоваго фактора, который прежде былъ постояненъ. Эта вторая измѣняемость въ случаѣ Галилеевской тяжести въ расчетъ не принимается, что весьма упрощаетъ формулы для послѣдней, между тѣмъ какъ паденіе съ космическихъ высотъ даетъ уже не столь простыя формулы. Но измѣненія движенія въ планетной системѣ — это лишь особыя формы паденія съ космическихъ высотъ, соединенныя съ нѣкоторою боковою скоростью, въ силу которой это паденіе ограничивается лишь опредѣленными рамками и принимаетъ видъ какъ бы колебательнаго воспроизведенія паденій и восхожденій. Въ границахъ этихъ рамокъ и измѣняется сила въ зависимости отъ квадрата разстояній, а отсюда ясно видно, что лишь простѣйшія, какъ бы статическія проблемы механики тяготѣнія подлежали разрѣшенію при посредствѣ обыкновенныхъ представленій о различныхъ силахъ, изъ коихъ каждая постоянна для своего мѣста. Но и при такомъ дискретномъ фиксированіи постоянныхъ силъ, въ силу котораго можно представлять себѣ тяжесть, смотря по мѣсту, какъ изолированную самостоятельную силу съ особымъ количествомъ дѣйствія для единицы времени, можно было

выполнить уже многое, какъ напр. уже добыть заключенія о массахъ тѣлъ солнечной системы. Вѣса одинаковыхъ количествъ матеріи можно было сравнивать между собою по различію положеній, и понятіе о вѣсѣ, ограничивавшееся обыкновенною, не представлявшею болѣе никакихъ различій, земною тяжестью, расширилось въ рукахъ Ньютона во всеобщую космическую идею о тяготѣніи, пропорціональномъ массѣ и соотвѣтствующему силовому фактору. Это расширенное понятіе — то самое, которое нынѣ мы можемъ весьма просто выражать формулою $p=mt$, гдѣ p означаетъ вѣсъ, m — массу, а j — ускореніе. Для отношеній на земной поверхности эта формула превращается въ $P=mg$, гдѣ P — вѣсъ на поверхности земли, а g — ускореніе на ней же, т. е. скорость, сообщаемая въ секунду. Взять-ли пространство паденія въ первую секунду или всегда вдвое его большую конечную скорость, — не въ этомъ суть дѣла. Впрочемъ, для сохраненія раціональнаго единства въ этомъ способѣ представленія слѣдуетъ выбрать приращеніе скорости въ теченіи одной секунды. Въ противномъ случаѣ, мы пошли бы такимъ путемъ, какой не соотвѣтствуетъ господствующему со временъ Галилея способу представленія, и который только тогда можетъ быть вполне консеквентнымъ, когда вездѣ и сплошь точкою приложенія сравненій и измѣреній вмѣсто приращенія скорости слѣлана будетъ работа силы, и слѣдовательно — какъ ея единица — пространство, пройденное въ одну секунду.

Хотя масса, или другими словами, количество матеріи, какъ понятіе и вполне самостоятельно, но въ своемъ космическомъ опредѣленіи есть прежде всего нѣчто неизвѣстное, о чемъ заключаютъ по величинѣ силы. Въ ощутимомъ дѣйствіи извѣстенъ только одинъ факторъ, какъ напр. извѣстно, какое паденіе должна имѣть нѣкоторая относительно небольшая масса въ опредѣленномъ разстояніи отъ солнца или отъ земли или отъ нѣкоторой другой планеты. Это извѣстно изъ наблюденія планетъ и даже спутниковъ, и даже доселѣ неизвѣстно другаго пути, которымъ можно бы было установить эти абсолютныя величины побужденій. Разъ онѣ извѣстны для опредѣленныхъ положеній и массовыхъ отношеній, то можно ихъ вычислить для всѣхъ возможныхъ положеній по тому же общему закону. На этомъ опираются тѣ заключенія, которыя дозволяютъ опредѣлять массы на основаніи форономическихъ явленій, и при такомъ опредѣленіи исходный пунктъ составляетъ нѣкоторая извѣстная единица массы на землѣ. Такимъ образомъ были, такъ сказать, взвѣшены планеты и солнце. То, что интересно для принциповъ, — это прежде всего не сама, впрочемъ весьма простая, метода, но руководящее основное понятіе объ отношеніи массы и вѣса.

Масса имѣетъ свой особый вѣсъ лишь по столько, по сколько она подчинена опредѣленному фактору движенія.

Если теперь предположить равныя единицы массы съ различными силовыми факторами, двигательными побужденіями, вѣсами, или назовите, какъ хотите эти аффекціи, если предположить ихъ въ равныхъ разстояніяхъ отъ центровъ притягивающихъ тѣлъ, то ихъ различный вѣсъ, или, что сводится къ тому же, различное ускореніе, приобретаемое ими при свободномъ паденіи, обусловливается не ими самими и разстояніемъ, но различіемъ въ массахъ тѣлъ, къ которымъ онѣ тяготеютъ. Ихъ различное тяготѣніе познается изъ различія въ ускореніи, каковое они получили бы, если бы притягивающая сила, т.-е. ихъ побужденіе, оставалось бы постояннымъ. Это побужденіе есть произведеніе двухъ факторовъ m_j , если его разсматривать въ его дѣйствіи на равныя массы. Но если понимать его въ его причинахъ, то m_j и m_j' являются результатами массоваго различія притягивающихъ тѣлъ, такъ какъ разстоянія, въ которыхъ они дѣйствуютъ, равны. Поэтому неодинаковыя побужденія, сообщаемыя ими той же единицѣ массы при томъ же разстояніи, должны относиться между собою какъ ихъ собственныя массы. Такимъ образомъ напряженіе силоваго дѣйствія, т.-е. производеніе ускореній на равномъ разстояніи, служить мѣрою массъ и вообще формою, въ которой обнаруживается неодинаковая наличность количества вещества ¹. Итакъ, можно сказать, что понятіе о вѣсѣ массы въ сущности дается только лишь другою притягивающею массою, и тѣло имѣетъ вѣсъ не изъ самого себя, но вслѣдствіе дѣйствующей на него силы другаго тѣла. Это кажется парадоксомъ, но лишь до тѣхъ поръ, пока не будетъ отброшена односторонняя привычка представленія, въ силу которой причину вѣса ищутъ исключительно въ самомъ разсматриваемомъ тѣлѣ. Каждая частичка его вѣситъ въ мѣру массы притягивающаго тѣла и квадрата его разстоянія. Все же разсматриваемое тѣло вѣситъ пропорціонально количеству своей собственной матеріи. Такимъ образомъ обѣ массы перемножаются, и если раздѣлить ихъ на квадратъ разстоянія, служатъ выраженіемъ величины вѣса для какихъ угодно разстояній.

85. Пропорціональность силы количествамъ матеріи, дѣйствующимъ въ притяженіи, есть предположеніе, соотвѣтствующее аналогіи обыкновенной механики, дѣйствительное для всякой движущей силы, а въ примѣненіи къ космической области оправдываемое и специальными слѣдствіями, а именно вычисленіями возмущеній.

¹ Такъ у Ньютона *Phil. nat. princ. math. lib. III, coroll. 1 и 2 къ предположенію VIII.*

Однако же болѣе глубокое и болѣе принудительное основаніе заключается въ выводѣ самихъ обыкновенныхъ механическихъ положеній, ибо матерія, какъ носительница скоростей или силъ, должна содержать и представлять движущіе факторы, при остальныхъ одинаковыхъ условіяхъ, соразмѣрно своему количеству. Но понятіе количества матеріи совершенно не зависитъ отъ того представленія, какое можно бы было себѣ составить о самой матеріи; ибо одно и то же нѣчто можно вообразить повтореннымъ еще разъ и вообще умноженнымъ или скученнымъ и такимъ образомъ умножать его вмѣстѣ съ его слѣдствіями, не заботясь о болѣе точномъ пониманіи этого нѣчто. Последнее можно мыслить совершенно въ Ньютоновскомъ смыслѣ, по которому полная тождественность прибавленія опредѣляется какими угодно признаками и напримѣръ, на два, во всѣхъ отношеніяхъ равныя тѣла, какъ скоро онъ мысленно соединяетъ ихъ въ какой-либо формѣ, смотритъ какъ на двойную массу. Отсюда ясно, что понятіе массы или количества матеріи есть нѣчто вполне самостоятельное, и концепція эта возникаетъ впервые не изъ самой механики, какъ коррелятъ силовыхъ явленій. И хотя массы опредѣляются по силамъ или, скорѣе, по ихъ проявленіямъ, если никакое иное непосредственное заключеніе невозможно; но понятіе массы схватывается уже ранѣе, и даже безъ этой предварительной концепціи сказанное опредѣленіе было бы совершенно не мыслимо.

За выясненіемъ понятія о массѣ должно слѣдовать Ньютоновское представленіе о силѣ инерціи (*vis inertiae*), причѣмъ слѣдуетъ припомнить то, что несомнѣнно установлено касательно несомнѣннаго закона косности, или другими словами, Галилеевской инерціи. Въ третьемъ опредѣленіи и его разъясненіи говорится, что извѣстное понятіе о дѣйствительной инерціи даетъ сила, присущая массѣ (*vis insita*), которой можно бы было дать «весьма мѣткое» наименованіе силы инерціи. Она состоитъ въ способности къ сопротивленію или же къ преодолѣнію сопротивленія, смотря потому, съ какой точки зрѣнія ее разсматривать, т.-е. воображать ли покоящуюся или движущуюся массу. Въ обоихъ случаяхъ это есть та мощь, съ которою данное состояніе тѣла поддерживается, противясь перемѣнѣ. Ясно видно, что здѣсь Ньютонъ отнюдь не вводитъ какой-либо ложной силы инерціи; ибо хотя онъ и различаетъ силу инерціи отъ инерціи, тѣмъ не менѣе, первая есть лишь реакція, возникающая, какъ скоро до тѣхъ поръ сохранявшееся и себѣ самому равное состояніе покоя или движенія нарушается постороннимъ дѣйствіемъ. Простое сохраненіе состоянія, естественно, еще не есть сила; ибо только перемѣна, какъ таковая, тре-

буетъ причины. Напротивъ того то, что остается себѣ самому равнымъ, именно фиксированіе массы на одномъ мѣстѣ, или существованіе извѣстной скорости ея есть основаніе возможнаго силоваго развитія вслѣдствіе реакціи противъ чуждаго воздѣйствія. Даже покоящаяся масса, не возмущаемая рѣшительно никакими чуждыми ей силами, противопоставляетъ передвиженію или вообще сообщенію скорости сопротивленіе, возрастающее съ количествомъ матеріи. Но во всякомъ случаѣ было бы излишне удерживать особое техническое выраженіе и порождать недоразумѣнія тамъ, гдѣ можно вполне обойтись, съ одной стороны, съ представленіемъ коснѣнія, а съ другой, съ закономъ дѣйствія и протопровѣдствія. Въ одномъ случаѣ воображаемая Ньютономъ внутренняя сила, очевидно, есть пунктуальное побужденіе къ тому, что, какъ живая сила и какъ бы нѣчто накопившееся въ тѣлѣ, мало-по-малу, развивается въ протопровѣдствіе сопротивленію и такимъ образомъ переходитъ въ работу. Впрочемъ этихъ чуждыхъ Ньютону, еще совершенно для него не существовавшихъ понятій о живой силѣ и о работѣ мы касаемся здѣсь только для разъясненія. Эти вещи, конечно, онъ зналъ; но онъ еще прямо не различалъ этихъ способовъ представленія и принципиально ихъ не выдвигалъ.

Третья аксіома движенія гласитъ о равенствѣ и противоположности дѣйствія и протопровѣдствія. Это основное предположеніе само по себѣ ясно для случая равновѣсія; давленіе и отпоръ ему, тяга и противотяженіе отвѣчаютъ здѣсь другъ другу во всѣхъ отношеніяхъ. Но аксіоматическій законъ движенія распространяется и на значительно далѣе хватающій главный случай измѣненія во взаимныхъ отношеніяхъ тѣлъ. Измѣненіе состоянія въ обоихъ направленіяхъ одинаково; дѣйствію соотвѣтствуетъ равное протопровѣдствіе, и это тотчасъ же становится понятнымъ, если только правильно выбрать точку зрѣнія для уразумѣнія процесса. По мѣрѣ того, какъ развивается дѣйствіе, возрастаетъ подобнымъ же образомъ и протопровѣдствіе въ своихъ отдѣльныхъ элементахъ. Дѣйствію соотвѣтствуетъ, какъ коррелятъ, сопротивленіе, и при взаимномъ дѣйствіи двухъ массъ, если даже одна покоится, слѣдуетъ различать два дѣйствія. Посредствомъ одного тѣла А измѣняетъ состояніе движенія тѣла В, а посредствомъ другаго тѣла В измѣняетъ состояніе тѣла А. Эти оба измѣненія состояній, въ силу нашего принципа, должны быть равны между собою, и рассмотрѣнію здѣсь подлежитъ не одно мгновенное и какъ бы статическое отношеніе. Ньютонъ понимаетъ это основное начало въ такомъ болѣе широкомъ смыслѣ и, во избѣженіе недоразумѣній, замѣчаетъ, что равны должны быть, естественно, не просто измѣненія въ ско-

ростяхъ, но такъ называемыя количества движенія, т. - е. произведенія ихъ массъ на скорости. И въ самомъ дѣлѣ, состояніе движенія только и мыслимо въ отношеніе къ этимъ двумъ факторамъ, массѣ и скорости, а для общности пониманія должно здѣсь подразумѣвать и состояніе покоя, при которомъ одинъ изъ факторовъ, скорость, равенъ нулю, между тѣмъ какъ другой факторъ, масса, выказывается въ реакціи. Покоющееся тѣло измѣняетъ состояніе движенія другого тѣла на столько, на сколько измѣняется его собственное. Оно отвлекаетъ у того тѣла столько изъ количества движенія, сколько получаетъ въ придачу себѣ. Такъ должны опредѣляться обоюдныя состоянія въ каждомъ пунктѣ стадіи дѣйствія. Если принять вмѣстѣ съ Ньютономъ равенство дѣйствія и противо-дѣйствія не только для момента и для какъ бы статическаго сопротивления, но для конечнаго промежутка времени или для всего развитія дѣйствій, и взять въ соображеніе, что при этомъ, какъ само собою разумѣется, въ основѣ лежитъ законъ косности и накопленія разъ сообщенныхъ скоростей, то ясно станетъ все значеніе этой аксіомы. Въ этомъ именно смыслѣ, точнѣе разсматриваемая, аксіома эта есть не менѣе, какъ всеобщій законъ переноса количества движенія или силы, и уже заключаетъ въ себѣ представленіе о томъ родѣ, какъ сохраняется въ игрѣ силъ количество движенія, т. е. произведеніе массы на скорость. Это сохраненіе имѣетъ мѣсто, если принимать во вниманіе и знакъ, т. е. какъ алгебраическая сумма. Но это предложеніе есть лишь слѣдствіе болѣе принципіальнаго представленія, по которому реактивное количество движенія, взятое абсолютно, равно активному, и по которому послѣднее, и по направленію и по знаку, слѣдуетъ мыслить какъ перенесенное на реагирующее тѣло. Въ пунктѣ знака крылось заблужденіе Картезія касательно сохраненія одного и того же количества движенія въ цѣломъ процессѣ. Напротивъ того, въ Ньютоновской аксіомѣ заложено основаніе вѣрныхъ представленій о сохраненіи силъ.

Чтобы не связывать съ этою аксіомою слишкомъ узкаго представленія, нужно, говоря о ней, имѣть въ виду не только примѣръ тяги или удара какимъ-нибудь образомъ связанныхъ тѣлъ, но вмѣстѣ съ Ньютономъ представлять и свободное притяженіе. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ реактивное притяженіе равно и противоположно активному. Такимъ образомъ, если разсматривать только два тѣла, то меньшее тяготѣетъ къ большому такъ же точно, какъ и послѣднее къ первому. Что относится къ вѣсу или къ двигательному побужденію, то примѣнимо, по необходимости, соотвѣтственно этой аксіомѣ, и къ развитію движенія. Малая масса движется

быстро, большая медленно, а иногда и едва замѣтно; но всякому количеству движенія одного изъ этихъ тѣлъ соотвѣтствуетъ равное и противоположное количество движенія другого тѣла.

86. Въ началѣ третьей книги, трактующей о системѣ міра, Ньютонъ выставляетъ нѣсколько правилъ изслѣдованія (*regulae philosophandi*), которыя для насъ впрочемъ имѣютъ только тотъ интересъ, что они намъ еще яснѣе говорятъ о его кореннымъ образомъ индуктивномъ направленіи способа мышленія. Такъ напр. при обобщеніи свойствъ естественныхъ предметовъ рекомендуется осматрительность. Первое правило требуетъ, чтобы были допускаемы только такія причины, которыя необходимы для объясненія явленій. Въ третьемъ правилѣ упоминается напр. о силѣ инерціи какъ о чемъ-то такомъ, о чемъ мы заключаемъ совершенно такъ же, какъ и о всеобщей подвижности тѣлъ. Въ виду этого можно допустить, что на механическія аксіомы Ньютонъ смотрѣлъ какъ на всеобщіе факты опыта. Способъ, какимъ онъ въ своихъ прелиминаріяхъ трактуетъ о старыхъ началахъ, которыхъ въ его изложеніи мы еще не касались, вообще не обнаруживаетъ у него наклонности дѣлать принципиальное различіе между опытомъ и чисто разумною необходимостью. Констатируемъ же его отношеніе къ прежнимъ началамъ. Въ первомъ королларіѣ къ третьему закону наглядно изъясненъ параллелограммъ силъ, а во второмъ королларіѣ разложеніе и сложеніе силъ названо основаніемъ всей механики. Однако, припомнимъ то, что мы разъяснили въ § 60, трактуя о Вариньонѣ, который въ томъ же самомъ 1687 г. съ значительно большею настойчивостью разрабатывалъ этотъ принципъ и его примѣненія. Ньютонъ трактовалъ это начало, почти какъ нѣчто извѣстное, и несмотря на свой отзывъ о немъ какъ о базисѣ механики, почти какъ нѣчто второстепенное. Но это объясняется тѣмъ, что онъ имѣлъ въ виду болѣе динамику, нежели статику, и еще представлялъ себѣ этотъ законъ преимущественно съ точки зрѣнія сложения движеній. Впрочемъ при объясненіи его онъ все-таки ссылается на второй свой законъ, по которому измѣненіе движенія пропорціонально движущей силѣ и слѣдуетъ въ ея направленіи. Такимъ образомъ начало сложения является комбинаціей косности и приводящаго измѣненія состоянія движенія, которыя взаимно соединяются, причемъ одна аффекція не мѣшаетъ другой. Помѣщеніе въ королларій уже и съ внѣшней стороны говоритъ достаточно ясно.

Ньютону извѣстны вообще только три простыхъ закона движенія или три аксіомы движенія, именно законъ косности состоянія движенія, затѣмъ законъ измѣненія этого состоянія пропорціонально *vis motrix*, и наконецъ обстоятельно разобранный нами законъ равенства дѣй-

ствія и противодѣйствія. Въ заключительной схолиѣ введенія онъ замѣчаетъ, что доселѣ извѣстные принципы приняты всѣми механиками; что двумя первыми аксіомами (косности и измѣненія пропорціонально движущей силѣ) вмѣстѣ съ двумя первыми королларіями (сложенія и разложенія силъ) Галилей установилъ, что пространства относятся какъ квадраты временъ, равно и то, что движеніе брошеннаго тѣла совершается по параболѣ; что третья аксіома о равенствѣ дѣйствія и противодѣйствія стала необходима при изъясненіи законовъ удара. Онъ при притяженіяхъ изъясняетъ ее, воображая, что введена преграда, препятствующая движенію притягивающихся тѣлъ: въ самомъ дѣлѣ, тогда при перевѣсѣ притяженія въ одну сторону вся система должна бы была измѣнить свое состояніе движенія, что противорѣчило бы первой аксіомѣ. Но очевидно, что эта Ньютоновская ссылка хватаетъ весьма далеко, ибо она употребляетъ законъ косности уже въ смыслѣ извѣстнаго предложенія о сохраненіи движенія центра тяжести и, не высказывая явно, кладетъ въ основаніе различіе между внутренними и вѣшними силами.

Поэтому насъ не удивитъ, если и другая какая-либо теорема встрѣтится подъ видомъ элементарнаго опредѣленія, хотя для нея нужны были бы и иное мѣсто и особое доказательство. Объ этомъ даже свидѣлствуетъ уже самое изложеніе нѣкоторой части восьми опредѣленій, предпосланныхъ аксіомамъ движенія. Онѣ относятся, по-порядку, къ массѣ, къ количеству движенія, къ силѣ инерціи, къ сообщенной силѣ (какъ противоположности силѣ инерціи) и къ центростремительной силѣ. И именно измѣреніе этой послѣдней по произведенной скорости или, спеціальнѣе, по произведенному количеству движенія введено въ формѣ опредѣленій, между тѣмъ какъ для оправданія такихъ мѣровыхъ представленій потребно бы было особое доказательство. Сверхъ того тамъ, гдѣ рѣчь идетъ объ общемъ способѣ силового развитія, а именно въ самомъ изложеніи первыхъ началъ, исходнымъ пунктомъ взятъ видъ (*species*) центростремительной силы. Предложеніе объ ускореніи какъ о мѣрѣ силъ должно бы было выступать въ своей всеобщей законности, а не въ формѣ опредѣленія для мѣры центростремительной силы.

Несмотря однако на обдуманную систематическую выдержку Ньютоновскихъ прелиминарій съ ограниченіемъ ихъ тремя дѣйствительными аксіомами движенія, все еще многого недостаетъ для строго логическаго построения первыхъ элементовъ, недостаточность которыхъ чувствовалась уже Лагранжемъ и еще понинѣ не вполне устранена. Характеристично у Ньютона упоминаніе мимоходомъ и истолкованіе, какое получаетъ въ концѣ вышеупомянутой заключи-

тельной схолі введенія принципъ виртуальныхъ скоростей. Подобно тому какъ при соудареніи тѣла равномошны, когда ихъ скорости обратно пропорціональны силамъ инерціи (*vires insitae*), такъ при движеніи машинъ поддерживается равновѣсіе (*sustinent*) между движущими силами, когда скорости, оцѣненные согласно опредѣленію этихъ силъ, обратно пропорціональны послѣднимъ. Затѣмъ слѣдуютъ ссылки на рычагъ и т. п. Такимъ образомъ въ Ньютоновскомъ изъясненіи виртуальнаго принципа онъ истолковывается здѣсь посредствомъ аналогіи съ силовыми отношеніями при ударѣ и потому сводится на начало равенства дѣйствія и противодѣйствія. Именно, если разложить какъ дѣйствіе, такъ и противодѣйствіе на факторы массы и скорости, то оказывается, что равенство противоположно-направленныхъ стремленій требуетъ обратнаго отношенія между массами и скоростями. Однако же особенно свойственная виртуальному принципу сторона не вступаетъ при этомъ въ свои права, ибо теорема о виртуальныхъ скоростяхъ должна специфически имѣть значеніе для возможности развитія относительныхъ скоростей, возможностей, вытекающихъ изъ распорядка системы и изъ внѣшнихъ ограниченій движенія. Но съ болѣе общей точки зрѣнія, съ которой виртуальный принципъ превращается въ болѣе общее предложеніе, что равныя силы взаимно уравновѣшиваютъ, и что о равенствѣ силъ вездѣ рѣшаются по виртуальнымъ моментамъ,—съ этой болѣе отвлеченной точки зрѣнія, конечно, совпаденіе виртуальнаго начала съ фундаментальнымъ измѣреніемъ силъ, которое съ своей стороны только и даетъ смыслъ основоположенію о дѣйствіи и противодѣйствіи, совпаденіе это есть нѣчто весьма естественное, и позднѣе мы увидимъ, что только на этомъ основаніи и возможно было Лагранжу взять предложеніе о виртуальныхъ скоростяхъ за исходный пунктъ всей механики.

87. Разсмотрѣвъ главную идею механики тяготѣнія и ея отношеніе къ элементарнымъ принципамъ, мы должны прибавить кое-что и о математическомъ методѣ этого изслѣдованія. Теорія криволинейнаго движенія въ сущности стала просто дѣломъ математики, разъ поставленъ былъ вопросъ о гипотезѣ квадратичнаго притяженія. Ньютонъ избралъ въ главномъ своемъ произведеніи въ сущности геометрической или синтетической методъ, намѣренно отказавшись отъ болѣе аналитическаго изложенія, которое было бы для него возможно благодаря его флюкціонному исчисленію. Естественно, онъ не могъ никоимъ образомъ обойти дифференціальнаго элемента въ этомъ направленіи значительныхъ заключеній; ибо геометрическое одѣяніе и наглядное поясненіе ровно ничего въ главномъ дѣлѣ не измѣняетъ. Потому первый отдѣлъ первой книги и

трактуеть о первыхъ и послѣднихъ отношеніяхъ, т. е. говоря аналитически, о предѣлахъ или предѣльныхъ отношеніяхъ, существующихъ между переменными величинами въ началѣ ихъ произвожденія или въ опредѣленномъ конечномъ пунктѣ ихъ хода. Такимъ образомъ, это есть, могли бы мы сказать, въ геометрическомъ одѣянніи взятая въ помощь метода предѣловъ, соответствующая флюкціоннымъ или дифференціальнымъ операціямъ и служащая ихъ суррогатомъ. Но кромѣ того во второй леммѣ второй книги вкратцѣ начертаны и основныя положенія флюкціонной методы. Въ этомъ мѣстѣ величины разсматриваются такъ, какъ бы онѣ производились движеніемъ или теченіемъ. Приращенія, очевидно предполагаемыя не какъ конечныя, называются моментами, и принципы возникновенія отношеній этихъ моментовъ, но не самые моменты, указаны какъ настоящій предметъ изслѣдованія. Поэтому на мѣсто моментовъ, представляющихъ мгновенныя приращенія, можно бы было поставить и скорости нарастанія и назвать эти послѣднія именемъ измѣненій движенія или флюкціями. Отсюда видно, на какую внутреннюю связь флюкціоннаго понятія съ руководящими механическими представленіями и потребностями указывается и какъ натурально оно къ нимъ примыкаетъ. Флюкція есть скорость измѣненія непрерывной переменной величины. Въ основу положено соразмѣрное съ временемъ измѣненіе независимой переменной или, если угодно, измѣненіе самаго времени, какъ измѣненіе равномѣрное. Поэтому, знаменитое понятіе флюкціи есть первый дифференціальный коэффиціентъ, отнесенный ко времени, которое при всякомъ измѣненіи величинъ, даже отвлекаясь отъ явленій движенія, можетъ быть введено для измѣренія быстроты или медленности этого измѣненія. Это болѣе абстрактное понятіе скорости, отнюдь не принадлежащее необходимо движенію, вовсе не есть чуждая идея, которую слѣдовало бы устранить изъ анализа. Для представленія себѣ рода измѣненія величинъ это представленіе скорости даже необходимо. Оно принадлежитъ вообще къ понятію объ измѣненіи величинъ, а не только къ понятію о неодинаково великихъ пространствахъ, пробѣгаемыхъ въ послѣдовательныя одинаковыя части времени.

Затѣмъ Ньютонъ даетъ правила, по которымъ могутъ опредѣляться сложные моменты полныхъ величинъ, связанныхъ какъ факторы въ произведеніяхъ, степеняхъ и т. п., по моментамъ составныхъ частей. Въ этомъ мѣстѣ онъ говоритъ преимущественно о моментахъ; но въ сущности онъ начертываетъ основы того, что у него называется флюкціоннымъ исчисленіемъ, и что въ другихъ сочиненіяхъ изложено имъ подробнѣе. При этомъ достойно замѣчанія то еще, что соединеніе простыхъ величинъ въ сложныя онъ

называетъ произвожденіемъ, такъ что этимъ живое и имѣющее въ виду природу представленіе о произвожденіи величинъ относится не только къ возникновенію отдѣльныхъ величинъ, но и къ операціямъ исчисленія. Но это и натурально, и послѣдовательно; ибо возникновеніе отдѣльной величины мыслится какъ непрерывное приданіе элементовъ; но придаваніе есть основная форма всякихъ операцій, и слѣд. всякая операція исчисленія есть лишь обособленіе этого способа произвожденія или измѣненія.

Это послѣднее замѣчаніе—не лишнее относительно такого произведенія, которое озаглавлено математическими началами философіи природы. Ньютоновы математическія воззрѣнія и представленія о природѣ сродны между собою по формѣ. Ясно видно, что первыя выработаны съ тѣмъ, чтобы отвѣчать потребностямъ послѣднихъ. Это соотвѣтствіе есть большое преимущество, ибо оно допускаетъ взаимную поддержку матеріала и формы. Эта взаимная сопринадлежность выступала бы еще яснѣе, если бы обычай геометрическаго и логически-синтетическаго способа изложенія не заслонялъ бы нѣкоторымъ образомъ внутренне натурального развитія истинъ. Галилей любилъ генетически развивающій методъ какъ таковой. Ньютонъ воздвигъ свою систему въ неподвижныхъ формахъ и развѣ при случаѣ, въ схолияхъ, позволяетъ себѣ нѣкоторыя дѣйствительно развивающія отступленія. Это отнюдь не дѣлаетъ его произведенія доступнымъ. Необходимы какъ бы обратныя построенія хода изобрѣтенія и развитія, которыя могутъ удалиться лишь послѣ болѣе глубокихъ штудій. Обращикъ такой необходимости мы уже встрѣтили въ прелиминаріяхъ, хотя тамъ такое понужденіе было еще относительно незначительно. Въ дальнѣйшихъ главахъ книги эти сами по себѣ почти неизбежно тяжелые доспѣхи геометрическаго веденія доказательствъ на старый ладъ становятся тормазомъ болѣе легкому уразумѣнію. И это тѣмъ въ большей мѣрѣ, что предметъ не есть чисто геометрической и что англичанину было далеко до той высокой степени изящества, какую выказалъ Гюйгенсъ, также не любившій примѣшивать анализъ. Сама по себѣ геометрическая наглядность была бы преимуществомъ, если бы она вмѣстѣ съ этимъ подкрѣплялась болѣе абстрактными ступенями простаго алгебраически аналитическаго развитія. Позднѣйшая исторія показала, что аналитическая форма изложенія, особенно у Лагранжа, достигла даже односторонняго господства и только въ началѣ 19-го столѣтія снова встрѣтила нѣкоторое, правда, весьма проблематическое, ограниченіе со стороны Пуансо. Но неговоря уже объ этомъ особенномъ, по формѣ не удовлетворительномъ способѣ исполненія ньютоновскаго начертанія, даже то обстоятельство, что изобрѣтатель могу-

шественнѣйшаго аналитическаго вспомогательнаго средства, именно флюкціоннаго исчисленія, насколько возможно отодвинуть на задній планъ алгебраическую символику, безъ сомнѣнія, поучительно. Услуги, достовляемыя вычисленіемъ, только тогда могутъ быть дѣйствительны и вмѣстѣ съ тѣмъ въ достаточной степени наглядны, когда усиленіе аналитической абстракціи идетъ рука объ руку съ возрастаніемъ легкости перенесенія ея на область нагляднаго.

88. Натурфилософія или, какъ можно бы было сказать въ отличіе отъ новаго болѣе узкаго значенія этого слова, натуральная философія Ньютона есть ничто иное какъ спеціально къ міровой системѣ примѣненная механика, обогащенная математическою разработкою идеи тяготѣнія. Если отвлечься отъ идеи о тяготѣніи самой въ себѣ, то выдающимся въ этой естественной философіи являются не новые факты опыта, даже не какой либо важный новый принципъ общей, не специфически космической механики, но математическое проведеніе старыхъ принциповъ въ область задачъ, возбужденныхъ новою идеею.

Чтобы отличить у Ньютона идею отъ математической разработки, составимъ себѣ окончательно концентрированное понятіе о формѣ руководящихъ исходныхъ пунктовъ. Двѣ единицы массы, взятыя другъ отъ друга въ разстояніи единицы длины, тяготѣя одна къ другой, образуютъ, такъ сказать, единицу тяготѣнія. Двѣ другія произвольныя массы въ произвольномъ иномъ разстояніи представляютъ всеобщій примѣръ того, какъ относить эффектъ тяготѣнія къ единицѣ тяготѣнія. Произведеніе этихъ массъ, выраженное въ единицахъ вышеупомянутыхъ массъ, раздѣленное на квадратъ разстоянія, численно выраженного въ тѣхъ же единицахъ разстоянія, — это частное изъ произведенія массъ на квадратъ разстоянія есть мѣра тяготѣнія, выраженная въ упомянутыхъ первоначальныхъ единицахъ тяготѣнія. Если какъ тѣла, которыя образуютъ единицу, такъ и произвольную комбинацію, которая должна быть измѣрена, вообразить себѣ во время свободнаго притягательнаго движенія, то отношеніе къ единицѣ тяготѣнія должно также обнаружиться какъ ускореніе. Слѣдовательно, какъ скоро ускореніе единицы тяготѣнія извѣстно какъ абсолютная величина, то вмѣстѣ съ этимъ дано ускореніе и для всякаго другаго случая. Само собою понятно, что при неравныхъ массахъ движеніе каждой отдѣльной массы должно быть разсматриваемо само по себѣ, такъ какъ слитіе въ одно общее неразличимое сближеніе затемнило бы мысль. Поэтому полезно даже и въ самой единицѣ тяготѣнія принимать въ расчетъ каждую массу самое по себѣ.

Изъ сказаннаго понятно, что изъ данныхъ въ природѣ отно-

шеній можно опредѣлить единицу тяготѣнія съ сопринадлежною величиною ускоренія. Тогда въ этой типической единицѣ мы обладаемъ фундаментальнымъ отношеніемъ между массою, разстояніемъ и сопринадлежнымъ движеніемъ. Такимъ образомъ количества матеріи и ихъ разстоянія, гдѣ бы они ни находились во вселенной, рѣшаютъ принципиально относительно соответственныхъ притягательныхъ движеній. Все остальное есть дѣло математики и примѣненія простѣйшихъ механическихъ принциповъ, каковы — сложение силъ, условія равновѣсія и т. п. Если, напр., какъ въ самомъ земномъ шарѣ, вообразить взаимно тяготѣющіе элементы скученными въ равномѣрные концентрическіе слои, то для нѣкоторой внутренней точки придется равнодѣйствующую всесторонняго притяженія точно также выводить только математически. По виду новый законъ, что тяжесть внутри земли уменьшается пропорціонально разстоянію (предл. IX, книга III) есть просто математическое слѣдствіе всеобщаго закона тяготѣнія. Точно также подобнымъ же слѣдствіемъ является и упоминаніе (въ примѣчаніи къ предложенію XIV, книга III) о томъ, что неподвижныя звѣзды свое и безъ того слабое, по причинѣ отдаленности, притяженіе нашей солнечной системы, большею частію должны взаимно уравнивать. Именно, поскольку наша солнечная система относится къ группировкѣ неподвижныхъ звѣздъ какъ точка внутри шаровой оболочки, постольку притяженія этой точки звѣздами должны бы были нейтрализоваться до нуля (по теоремѣ 70, книга I). Предположеніе 2-го королларія книги III, теорема XIV, что неподвижныя звѣзды распределены равномѣрно, хотя никоимъ образомъ не отвѣчаетъ дѣйствительности, тѣмъ не менѣе аналогичныя заключенія возможны.

Эти примѣры показываютъ, на сколько разнообразны тѣ обороты, къ которымъ способенъ посредствомъ чисто математической разработки этотъ простой типъ притягательнаго отношенія. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшенія различнѣйшихъ проблемъ у Ньютона суть ничто иное какъ такая количественная разработка фундаментальнаго принципа. Теорія прилива и отлива, расчисленіе взаимныхъ возмущеній планетъ и вообще вся космическая физика, по скольку она имѣетъ предметомъ какую-нибудь форму притягательныхъ дѣйствій, — вся эта совокупность задачъ есть лишь исчисленіе, основанное на идеѣ тяготѣнія и на особыхъ величинахъ массъ и разстояній, какія намъ доставляетъ непосредственный или посредственный опытъ.

Въ механикѣ тяготѣнія, къ свойственнымъ ей факторамъ, именно къ единству и къ закону квадратичнаго уменьшенія присоединяется еще одинъ фактъ, который и до сего времени предлежитъ какъ случайность и также необъяснимъ какъ и у Ньютона. Это — та со-

ставная часть бокового или переноснаго движенія по инерціи, которая въ большей или въ меньшей мѣрѣ уравниваетъ тяготѣніе и во всѣхъ случаяхъ относится къ послѣднему антагонистически. Эта скорость по инерціи, мѣшающая паденію на центральное тѣло, можетъ быть мыслима, какъ всякая конечная скорость, нѣкогда произведенною. Но способъ произведенія ея намъ совершенно неизвѣстенъ, и самое заключеніе о ея произведеніи основывается только на аналогіи, въ силу которой, при всякой величинѣ скорости, коснѣющей по закону инерціи, мы вынуждены спрашивать о ея накопленіи посредствомъ нѣкоторой силы. Въ заключительной школѣ своего произведенія Ньютонъ прямо высказался, что разстоянія и самые пути должны были быть даны и не могли бы быть выведены изъ принциповъ тяготѣнія. Въ сущности это значитъ, что коснѣнія образуютъ элементъ чуждый тяготѣнію и съ нимъ разнородный.

Эти коснѣнія суть основаніе возможности криволинейныхъ путей. Простое тяготѣніе само по себѣ произвело бы лишь прямолинейное сближеніе между двумя тѣлами. Но разъ эти коснѣнія даны какъ факты и определено то мѣсто, въ которомъ тѣло подлежить имъ, то дальнѣйшая игра этого движенія въ сочетаніи съ тяжестью есть лишь математическій вопросъ. Поводъ, благодаря которому Ньютонъ приведенъ былъ къ изученію внутреннихъ условій возникновенія эллипсовъ, также указываетъ на это. Въ письмѣ къ Галлею ¹ отъ 27 Іюля 1686 года онъ сознается, что обратилъ вниманіе на предварительныя условія происхожденія эллиптическаго пути тѣла благодаря Гуковскому изслѣдованію уклоненія падающаго тѣла вслѣдствіе вращенія. Слѣдовательно, здѣсь нужно искать зародышъ его болѣе глубокихъ размышленій надъ обусловленнымъ законами мѣханикою происхожденіемъ планетныхъ путей. Если припомнить, что онъ самъ говоритъ о выводѣ квадратичнаго измѣненія притяженія изъ послѣдняго Кеплеровскаго закона (ср. § 79), и что кромѣ того самъ онъ признаетъ, что тотъ же законъ былъ самостоятельно найденъ Гукомъ, Реномъ и Галлеемъ (въ школѣ къ предложенію IV, короллар. 6, книга I), то характеристичнымъ въ его системѣ остается, очевидно, математическое исполненіе, и мы окончательно должны придти къ тому, что тяготѣніе отъ элемента къ элементу и математическая разработка онаго, въ соединеніи съ расширеніемъ теоріи криволинейныхъ движеній за предѣлы Гюйгенсовскихъ основаній, и составляютъ основныя черты, свойственныя новой механикѣ

¹ Напечатано у Бръюстера, *Memoirs of the life of Newton*, London 1855, томъ I, стр. 452.

тяготѣнія. Что же касается элементарныхъ основныхъ положеній, которыя могли бы считаться послѣдними принципами общей механики, то мы не встрѣтили ни одного радикально новаго, а лишь расширенное пониманіе старыхъ способовъ представленія. Главными двумя пунктами были здѣсь — начальная форма дѣйствія непостоянныхъ силъ, равно какъ и ясное выступленіе фактора массы въ напряженіи силы. Формально лишь у Ньютона выступила на первый планъ аксіома о равенствѣ дѣйствія и противодѣйствія, какъ отдѣльная идея. Однакоже, именно прелиминаріи и не были у него самымъ важнымъ, такъ-что принципиальное развитіе аксіоматическихъ основъ общей механики какъ таковыхъ предоставлено было дальнѣйшему изслѣдованію. Такимъ образомъ сложились и многіе, прежде всего весьма спорные способы представленія, которые, какъ сохраненіе живыхъ силъ и принципъ наименьшаго дѣйствія, по большей части потребовали вниманія въ ближайшемъ періодѣ развитія. Разработка этихъ не столько аксіоматическихъ, сколько схематическихъ теоремъ, выступаетъ рядомъ съ возрастаніемъ участія анализа, какъ вспомогательнаго средства, и слѣдующій отдѣлъ, представляющій развитіе науки вплоть до Лагранжевыхъ работъ включительно, будетъ посвященъ, въ виду требованій нашей задачи, изслѣдованію преимущественно этихъ схемъ и тѣхъ выгодъ, какія болѣе определенное постиженіе принциповъ и ихъ внутренней связи приобрѣло благодаря введенію чистаго анализа въ нашу область.

ТРЕТИЙ ОТДѢЛЪ.

Время общихъ формулированій и аналитическаго развитія до Лагранжа включительно.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Главные пункты прогресса.

89. Начиная съ Галилея и кончая Гюйгенсомъ и Ньютономъ, были постигнуты всѣ существенныя основныя воззрѣнія общей механики въ простѣйшей и первоначальнѣйшей формѣ, и на долю слѣдующаго періода выпала только роль, съ одной стороны, уясненія, путемъ дальнѣйшихъ размышленій и изслѣдованій, сущности тѣхъ основныхъ представленій, между прочимъ и метафизическаго ихъ истолкованія, а кромѣ того и усмотрѣнія, какимъ образомъ примѣненіе анализа позволяло одолѣть математически болѣе сложныя задачи. Потому-то господствующая характерная черта этого періода будетъ все болѣе и болѣе отпечатлѣваться въ аналитическомъ направленіи. Почти одновременно съ первымъ появленіемъ въ свѣтъ главнаго Ньютонова произведенія, на континентѣ замѣчается стремленіе къ болѣе абстрактной, преимущественно аналитической разработкѣ всякихъ задачъ. Съ появленіемъ въ свѣтъ статьи Лейбница «О новомъ методѣ рѣшенія вопросовъ о *maxima* и *minima* и т. д.» (*Nova methodus pro maximis et minimis etc.*) въ *Acta Eruditorum* 1684 г. Ньютоново флюкціонное исчисленіе ¹ стало извѣстно пуб-

¹ Полное изобличеніе, которое принудило бы даже упорнѣйшихъ сторонниковъ Лейбница признать, что онъ совершилъ научное воровство, первоначально было невозможно, а по свойству матеріала актовъ и въ настоящее время нельзя ожидать онаго. Впрочемъ, тайное присвоеніе чужихъ заслугъ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ доступно такому ясному доказательству. Но противъ Лейбница говорить вѣроятность, граничащая съ достовѣрностью, въ виду имѣющихся матеріаловъ, а кромѣ того въ воровствѣ, въ которомъ онъ обвиняется, вполне квали-

ликѣ и получило болѣе удобную нотацію, а континентальные математики, именно различные члены фамиліи Бернулли, переработали новое исчисленіе и алгоритмъ мало-по-малу въ настоящее дифференціальное и интегральное исчисленіе, между тѣмъ какъ англичане придерживались болѣе внѣшнихъ формъ непосредственнаго Ньютоновскаго наслѣдія. Разработка интеграцій прежде всего досталась на долю преимущественно братьямъ Якову и Ивану Бернулли. Они-то главнымъ образомъ и содѣйствовали примѣненію аналитическихъ методовъ къ разработкѣ важнѣйшихъ механическихъ проблемъ, занимаясь, наприм., аналитическимъ изысканіемъ Гюйгенсаго способа нахождения центра колебанія. Въ интересахъ нашей задачи, кромѣ обоихъ поименованныхъ современниковъ Лейбница, слѣдуетъ обратить вниманіе и на сына младшаго брата Ивана, на Даніила Бернулли (1700—1782), главнымъ образомъ ради его концепціи начала живыхъ силъ.

Извѣстно, что первое обширное общее начертаніе новыхъ аналитическихъ методовъ, въ соединеніи съ важными обогащеніями, дано было въ большихъ работахъ Эйлера, и этотъ же нѣмекій математикъ 18-го столѣтія первый предпринялъ и аналитическую

фицируютъ его какъ его крайне испорченный личный характеръ, такъ и полнѣйшее отсутствіе творческихъ силъ. Что характеръ его именно таковъ, объ этомъ свидѣлствуетъ также и письменный отзывъ Гюйгенса къ l'Hôpital'ю отъ 9-го апрѣля 1693 г.: «Совершенно вѣрно, что г. Лейбницъ весьма искусенъ, но въ то же время въ немъ чрезмѣрна жажда казаться (*une envie immodérée de paraître*), какъ это явствуетъ изъ всего... что онъ говоритъ о своемъ анализѣ безконечнаго... и о гармоническихъ законахъ планетныхъ движеній, гдѣ онъ слѣдовалъ открытіямъ Ньютона, но съ примѣсью своихъ мыслей, которыя только портятъ дѣло... Впрочемъ, въ виду основаній, которыя я могъ бы привести, я весьма сильно подозреваю, не вывелъ ли онъ свое построеніе (цѣпной линіи) изъ построенія г. Бернулли». (Корреспонденція эта—въ *Hugenii Exercitationes Mathematicae*, ed. Uylenbroek, Hagae Com. 1833, Fasc. I, стр. 256).—Эйлеръ въ предисловіи къ своимъ институціямъ дифференціального исчисленія (1755), имѣя въ виду то, что уже ранѣе дано было Ньютономъ, приписываетъ Лейбницу просто ученое формулированіе и нѣкотораго рода систематическое резюмированіе (*in formam disciplinae redegerit ejusque praecepta tanquam in systema collegerit*).—Лагранжъ, который усматриваетъ зародышъ дифференціального исчисленія у Фермата, не преминулъ въ своихъ *Leçons sur le calcul des fonctions* (1806), стр. 324, обратить вниманіе на то, что въ Лейбницевои статьѣ 1684 г. замѣчается даже вышнее сходство съ составными частями Ферматовскаго начертанія—Гауссъ, какъ явствуетъ изъ письма Сарторія фонъ Вальтерсгаузена (Памяти Гаусса, Лейпцигъ, 1856, стр. 85, высказался о Лейбницѣ въ такомъ смыслѣ, что его даже отдаленнѣйшимъ образомъ нельзя сравнивать съ Ньютономъ. О характерѣ Лейбница, какъ онъ, на нашъ взглядъ, при ближайшемъ изслѣдованіи вездѣ выступаетъ въ жизни Лейбница и въ отношеніяхъ его къ наукѣ, см. мою Критическую Исторію Философіи, Берлинъ. 1869 г., 3-е изд. 1879 г.

разработку механики въ своемъ произведеніи «*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*» (С.-Петербургъ 1736). Это произведение не касается собственно статики, разсматриваетъ движеніе свободныхъ точекъ въ томъ I, несвободныхъ во II томѣ, и было дополнено Эйлеромъ, но еще не завершено, самостоятельную и окончательную въ отношеніи опредѣленія главныхъ осей инерціи теоріей: «*Theoria motus corporum solidorum*» (1765). Нѣсколько лѣтъ спустя послѣ обнародованія упомянутой Эйлеровской работы появился «*Traité de dynamique*» д'Аламбера (Paris, 1743), въ которомъ нашолъ себѣ выраженіе извѣстный еще и нынѣ подъ именемъ автора принципъ, позволяющій составлять уравненія движенія по условіямъ равновѣсія. Слѣдующій важный аналитическій шагъ, составившій эпоху вмѣстѣ съ тѣмъ и въ отношеніи математической формы, сдѣланъ былъ Лагранжевой «*Mécanique analytique*», появившейся впервые въ 1788 г., а во-второй разъ въ 1811 — 1815, причемъ весь трактатъ былъ просмотрѣнъ, переработанъ и увеличенъ на три четверти сравнительно съ первымъ изданіемъ.

Чтобы не оставлять совсѣмъ въ сторонѣ имѣвшихъ менѣе рѣшительное значеніе, по характеристичныхъ противоположностью способа пониманія, работъ англичанъ, упомянемъ о Маклореновомъ трактатѣ «*A complete system of fluxions*» (Edinburg, 1742), въ которомъ излагается новое исчисленіе безконечныхъ вмѣстѣ съ механическими приложеніями примѣнительно къ Ньютоновскому способу возрѣнія. Если бы нашу задачу составляла исторія анализа ради его самого, а не просто ради механики, то мы не преминули бы показать, откуда ведетъ начало Тайлоровъ рядъ, и что по примѣру самого Ньютона метода рядовъ сдѣлалась у англичанъ исходнымъ пунктомъ для аналитическаго мышленія. Лагранжъ въ своей теоріи аналитическихъ функцій (первое изд. 1797, второе 1813 г.) также пришелъ къ методу рядовъ, какъ къ основной формѣ, отъ которой должно бы было отправляться при разработкѣ дифференціального и интегральнаго исчисленій, равно и всѣхъ отсюда зависящихъ геометрическихъ и механическихъ понятій. Напротивъ въ Аналитической Механикѣ, даже и во второй переработкѣ ея, онъ удержалъ общепринятые способы представленія дифференціальной природы безъ примѣси рядовъ.

90. Если бы кто пожелалъ сдѣлать эскизъ примѣненій анализа къ механикѣ, то долженъ бы былъ припомнить, что Декартъ ввелъ въ употребленіе аналитическую геометрію и этимъ создалъ предварительныя условія, при посредствѣ которыхъ позднѣе въ послѣдней четверти 17-го столѣтія выступающій на сцену анализъ безконечнаго или, какъ можно бы было также сказать, непрерывно-пе-

ремѣннаго могъ испытать плодотворное и подконецъ чисто схематическое примѣненіе. Одною изъ главныхъ потребностей обобщенія аналитической разработки механическихъ проблемъ должно было стать употребленіе трехъ прямоугольныхъ осей координатъ. Замѣчательно, что правила для выраженія движеній такимъ способомъ было введено лишь относительно поздно и впервые съ такой стороны, откуда всего менѣе можно было ожидать склонности къ абстрактному схематизму и къ строгимъ обобщеніямъ, именно Маклореномъ. Хотя Эйлеръ, наприм., занимается еще особымъ, каждой частной задачѣ свойственнымъ положеніемъ направленій, какъ наприм., касательными и нормальными прозекціями силъ, тѣмъ не менѣе все-таки трудно указать тотъ шагъ, который въ непрерывномъ развитіи кореннымъ образомъ привелъ къ отнесенію всякихъ движеній къ произвольной прямоугольной системѣ координатъ. Легко понять, что и помимо Маклореновскаго направленія тамъ и сямъ можно найти слѣды стремленія къ такой общей точкѣ зрѣнія. Но такъ же точно естественно, что при этой начальной разработкѣ проблемъ напали на мысль объ употребленіи координатъ какъ бы натуральныхъ, произвольно навязывавшихся и вызывавшихся требованіями вопросовъ, и удерживали ихъ еще нѣкоторое время въ аналитическихъ формулировкахъ. Разсматривать движеніе въ точкѣ криволинейнаго пути, какъ оно представляется по отношенію къ касательной и нормали въ этой точкѣ, или каковы, такъ сказать, его прозекціи на оба эти направленія, значить также руководствоваться въ изслѣдованіи процесса координатными осями. Только послѣднія выбраны въ этомъ случаѣ такъ, что совпадаютъ съ касательною и съ нормалью, и подразумѣвается, что третья ось является въ такой же мѣрѣ излишнею, какъ если бы оперировали въ плоскости, а не въ пространствѣ. Натуральныя точки зрѣнія всегда содержатъ въ себѣ такого рода упрощенія, гдѣ обстоятельства это позволяютъ, и въ новѣйшее время подобный способъ разсмотрѣнія справедливо выставляется какъ такой, при которомъ разсматривается предметъ самъ въ себѣ, безъ обремененія воображенія несущественными вспомогательными величинами.

При всемъ томъ мы должны и съ другой точки зрѣнія смотрѣть какъ на прогрессъ на то обстоятельство, что введено было общее представленіе движенія по тремъ взаимно перпендикулярнымъ измѣреніямъ пространства. Подразумѣваемая система координатъ, которая произвольно должна лежать въ основаніи представленія о каждомъ движеніи, получила благодаря этому сознательное рациональное выраженіе. Самое понятіе движенія ставится внѣ сомнѣнія лишь отнесеніемъ къ тремъ осямъ, мыслимымъ абсолютно неподвиж-

ными, т.-е. оно уже не можетъ быть двусмысленнымъ для математики и механики, какъ скоро измѣненіе положенія относительно этихъ мысленно фиксированныхъ осей составляетъ его признакъ и даже его содержаніе. Но сверхъ того употребленіе осей есть вмѣстѣ съ тѣмъ самая общая форма разложенія и сложенія силъ или, другими словами, замѣны дѣйствительныхъ силъ эквивалентными группами такихъ силъ, которыя дѣйствуютъ по направленію осей. Наконецъ употребленіе этихъ постоянныхъ линій почти произвольно привело къ тому, что принципъ, содержащійся въ параллелограммѣ силъ, или то, что мы назвали редукціей направленія силы, выказалось во всемъ своемъ значеніи, а именно раскрылось, въ какомъ отношеніи различныя механическія понятія (ускореніе, скорость, пройденное пространство, ускорительная сила, количество движенія, живая сила, наконецъ даже новый способъ представленія механической работы) должны находиться между собою при этомъ переносѣ сопринадлежащихъ элементарныхъ и цѣльныхъ величинъ на оси. Съ этой точки зрѣнія даже болѣе важныя общія предложенія, какова теорема о проэкціи количествъ движенія, произведенныхъ въ теченіи нѣкотораго опредѣленнаго времени, являются такими воззрѣніями, какими они при сплошномъ употребленіи методовъ координатъ и безъ того должны бы были оказаться.

Само собою понятно, что всякая приличная комбинація мыслимыхъ неподвижными геометрическихъ мѣстъ даетъ возможную въ механикѣ систему координатъ, и что, кромѣ того, только относительное движеніе таково, что при немъ система координатныхъ осей, къ которой его относятъ, въ свою очередь сама мыслится отнесенною къ нѣкоторой другой неподвижной системѣ и представляется движущеюся относительно этой послѣдней. Оба пункта, т.-е. какъ разнообразіе координатныхъ системъ, такъ и комбинаціи подвижныхъ системъ съ неподвижными, озабочиваютъ насъ не сами по себѣ, но постольку лишь, поскольку они находятся въ связи съ установленіемъ нѣкоторыхъ главныхъ свойствъ равновѣсія и движенія. Прямоугольныя координаты—самое натуральное средство понимать всякое переносное движеніе какъ совершающееся по тремъ измѣреніямъ пространства. Съ другой стороны, онѣ пригодны во всѣхъ случаяхъ, и только для представленія вращеній естественнѣе—вмѣсто разстояній измѣрять углы и пользоваться такъ называемыми полярными координатами.

Этимъ предварительнымъ указаніемъ на неподвижныя линіи, къ которымъ относятъ мѣста и измѣненія мѣстъ массъ, мы разъ навсегда привели на память тотъ пунктъ, котораго значеніе для историческаго развитія и для окончательнаго устроенія аналитической механики нельзя достаточно оцѣнить.

91. Періодъ, съ которымъ теперь мы имѣемъ дѣло, прежде всего наполненъ изслѣдованіями и спорами о нѣкоторыхъ общихъ способахъ представленія принциповъ или лучше опредѣленныхъ все-объемлющихъ предложеній. Самый знаменитый спорный пунктъ этого рода, что касается его преобладающе метафизической стороны, ведетъ начало отъ Лейбница, и не разъ интересовалъ и тѣхъ, кому, впрочемъ, не было никакого дѣла до обстоятельствъ научной механики. Какъ извѣстно, это — споръ объ измѣреніи силъ или о томъ, въ какомъ смыслѣ мыслимо сохраненіе силы. Введеніе особой терминологіи, слѣдующей которой, простыя количества давленія или натяженія Лейбницъ называлъ мертвыми силами, количества же, развивающіяся при движеніи, — живыми силами, много способствовало тому, что пререканія объ оцѣнкѣ живыхъ силъ получили метафизически шаткую и потому въ плохомъ смыслѣ популярную окраску. Такимъ образомъ настоящее ядро и истинный принципъ сохраненія живыхъ силъ, впервые установленный Гюйгенсомъ, хотя и не подъ своимъ позднѣйшимъ именемъ, — принципъ этотъ, что касается его существеннаго для механики содержанія, нерѣдко бывалъ оттѣсняемъ на задній планъ, а на его мѣстѣ процвѣтали неопредѣленно шаткіе способы представленія. Хотя въ истинномъ своемъ смыслѣ эта идея коренилась уже въ Галилеевскомъ представленіи способа дѣйствія силы, тѣмъ не менѣе вмѣшательство возраженій метафизическихъ школъ сообщило спору такіе размѣры, которые далеко не соответствовали его дѣйствительному содержанію и окончательному результату или, если угодно, оставшемуся послѣ него осадку.

Наклонность, подобная той, какая лежала въ основѣ только что упомянутаго спорнаго вопроса, повела и къ туманной постановкѣ принципа наименьшаго дѣйствія, когда Мопертюи, возобновляя воззрѣніе Фермата, нѣсколько неясно его обобщилъ. Даже и принципъ сохраненія площадей получилъ также нѣкоторую метафизическую окраску. Отыскиваніе сокровенныхъ законовъ природы въ ожиданіи натолкнуться на открытіе руководящихъ цѣлей, которыя природа, будто бы, преслѣдуетъ, нерѣдко служило основаніемъ, въ силу котораго чисто механическимъ отношеніямъ и схемамъ приписывали значеніе, далеко выходящее за предѣлы ихъ содержанія. Только предложеніе о движеніи центра тяжести, которое, вмѣстѣ съ принципомъ площадей, коренится уже въ Ньютоновской механикѣ, не вошло въ кругъ спорныхъ метафизическихъ способовъ представленія. Впрочемъ, всѣ вообще схематическія главныя предложенія, которыя въ наше время обыкновенно предпосылаютъ въ динамикѣ въ качествѣ нѣкотораго рода принциповъ разработкѣ

особыхъ задачъ, долгое время были предметомъ натурфилософскаго изслѣдованія и пониманія въ вышеприведенномъ родѣ. По почину Лагранжа на нихъ смотрять почти какъ на производныя теоремы и какъ на необходимости, вытекающія изъ первыхъ аксіомъ механики. Впрочемъ, по примѣру Лагранжа, главнымъ образомъ имѣютъ въ виду ихъ аналитическую форму, не очень заботясь объ ихъ чисто логическихъ отношеніяхъ. Такъ, напримѣръ, терминъ «живая сила» получилъ повсемѣстно права гражданства; но для современнаго математика просто сталъ словомъ, обозначающимъ произведение массы на квадратъ скорости. Съ этимъ словомъ онъ не связываетъ никакой другой мысли, и однакоже въ области аналитической механики это обстоятельство никоимъ образомъ не ведетъ за собою никакихъ неудобствъ.

При такомъ положеніи дѣла, не только для историческаго изложенія, но и въ видахъ болѣе глубокаго пониманія современнаго содержанія механики, необходимо эти общія формулированія, какъ они были выработаны до Лагранжа, разсмотрѣть съ трехъ сторонъ. Во первыхъ, должно извѣстить вліяніе метафизики, затѣмъ содержаніе науки въ отношеніи чисто механическихъ теоремъ, и особенно, въ третьихъ, указать—какъ выразился результатъ въ уравненіяхъ. Наконецъ, это строгое разграниченіе изслѣдованія покажетъ еще, гдѣ просто принципиальное въ тѣхъ типическихъ главныхъ теоремахъ соприкасается съ прочими аксіомами механики, и въ какой мѣрѣ извѣстные элементы общихъ формулированій сказаннаго рода могутъ имѣть притязаніе на то, чтобы ихъ тотчасъ же кореннымъ образомъ причислить къ обыкновеннѣйшимъ аксіомамъ, какъ сопровождающія обстоятельства или какъ существенныя свойства простѣйшихъ силовыхъ основныхъ отношеній. Этотъ послѣдній шагъ выходитъ изъ предѣловъ историческаго изложенія, но необходимъ для критическаго освѣщенія его. Онъ покажетъ, наприм., какимъ образомъ принципъ наименьшаго дѣйствія могъ бы быть уже найденъ въ обыкновеннѣйшемъ сложении силъ, слѣдовательно, въ параллелограммѣ силъ, и какимъ образомъ, слѣдовательно, притязанія этого начала должны бы были значительно сѣзиться: оно просто должно бы было сдѣлаться точкою зрѣнія, на основаніи которой можно бы было эту механическую каузальность уразумѣть уже въ въ аксіоматическихъ корняхъ ея разнообразныхъ формъ.

Кромѣ тѣхъ метафизическихъ изысканій, которыя примѣшаны были къ технически-математической разработкѣ механическихъ вопросовъ и которыя, какъ у Лейбница, оказались довольно безплодными, подлежатъ устраненію и предпріятія собственно философовъ,

хотя, главнымъ образомъ, какъ примѣры устрашающаго свойства. Въ кругу мыслей метафизика, каковъ былъ Кантъ, уже играли скороспѣлую, хотя и смутную, роль рефлексы Ньютоновской натур-философіи. Однакожь съ этой стороны не привзошло ничего такого, что принесло бы какую-нибудь выгоду для механическихъ воззрѣній или для логическаго метода ихъ пониманія. Во всякомъ случаѣ, эта примѣсь и искаженіе точныхъ положительныхъ ученій есть фактъ, въ которомъ теперь легко убѣдиться.

92. Болѣе важный прогрессъ, итоги котораго, однако же, впервые замѣчаются только въ Лагранжевой Аналитической Механикѣ, представляетъ коренное распространеніе общихъ механическихъ принциповъ на гидростатику и гидродинамику. Впрочемъ, какъ мы видѣли въ § 43, уже Галилей позналъ принципъ виртуальныхъ скоростей на равновѣсіи жидкостей и здѣсь же нашелъ ему примѣненіе; но позднѣе общій ходъ разработки механики жидкостей опять направленъ былъ болѣе къ выводу законовъ подлежащей области изъ специфическихъ началъ, особо устанавливаемыхъ для случая жидкостей. По крайней мѣрѣ, равенство распространенія давленія, во всѣхъ направленіяхъ также подконецъ принято было за аксіоматическій исходный пунктъ. Итакъ, достаточно очевидно, что развитіе аналитической формы механики жидкостей было тѣмъ, что подконецъ повело за собою включеніе этихъ особыхъ предложеній въ число самыхъ общихъ принциповъ. Послѣ того какъ Клеро, д'Аламберъ и Эйлеръ окончательно установили уравненія равновѣсія и движенія жидкостей въ дифференціальной формѣ, какъ приложеніе или, по крайней мѣрѣ, въ смыслѣ гидродинамики Даніила Бернулли (1738), достигшей уже весьма общихъ принциповъ, а именно принципа живыхъ силъ, послѣ этого не далеко было уже и до вывода этихъ уравненій изъ вполне общихъ принциповъ механическаго силового дѣйствія. Жидкость должно было разсматривать какъ матеріальную систему, въ которой взаимное отношеніе частицъ, т.-е. совершенно свободная измѣняемость взаимныхъ перемѣщеній принималась бы за основное свойство какъ въ вычисленіяхъ, такъ и въ обыкновенной механической дедукціи. Какъ скоро это и было исполнено Лагранжемъ, тотчасъ вполне устранено было разъединеніе, существовавшее между механикою капельно- и газообразно жидкой матеріи, съ одной стороны, и механикою твердыхъ тѣлъ, съ другой стороны. Этимъ чисто-механически опредѣлялись три частичныя состоянія тѣлъ, притомъ такъ, что къ нимъ прямо можно было примѣнять общіе принципы, подъ однимъ только условіемъ,—каждый разъ принимать въ расчетъ сказанныя опредѣленные и сдѣлавшіяся доступными вычисленію различія вмѣстѣ со всѣми другими различіями и

предварительными условіями, съ которыми совмѣстны распорядокъ и постановка механическихъ системъ.

Стремленіе къ обобщенію, обнаружившееся въ только-что упомянутомъ фактѣ, также проявлялось въ разсматриваемый періодъ почти во всѣхъ другихъ направленіяхъ. Оно сдѣлало изъ механики изолированную, весьма отвлеченную науку, въ которой техническія или космическія приложенія, прежде непосредственно имѣвшіяся въ виду, все болѣе и болѣе превращались въ матеріаль, вызывавшій разработку собственно механики и составлявшій все въ меньшей и меньшей степени настоящее содержаніе этой науки. Такой ходъ развитія имѣеть нѣкоторое сходство съ первоначальнымъ развитіемъ чистой математики. Абстрактная механика подконецъ знаетъ только различнымъ образомъ распределенныя въ пространствѣ массы, на которыя дѣйствуютъ силы, т. е. причины явленій движенія или препятствій движенію въ определенныхъ простыхъ формахъ развитія. А въ такомъ разѣ ея задачи состоятъ въ выводѣ извѣстныхъ свойствъ и основныхъ отношеній, существующихъ между массами, временами и пространствами въ разнообразной игрѣ возможныхъ явленій, насколько позволительно отъ данныхъ предварительныхъ условій заключать о соотвѣствующихъ дѣйствіяхъ путемъ вычисленія.

Сочетаніе статики съ динамикою, необходимость котораго мы замѣчали уже раньше по разнымъ случаямъ, а особенно по поводу виртуальнаго принципа, въ нѣкоторомъ смыслѣ осуществляется при посредствѣ д'Аламбертова принципа. Обороте, данный дѣлу Лагранжемъ, а именно—примѣненіе д'Аламбертова принципа къ выводу изъ общей аналитической формулы статики настолько же общаго выраженія для всей динамики, обороте этотъ сдѣлалъ вполне очевиднымъ, что динамика должна была теперь стать просто продолженіемъ и развитіемъ основъ статики. И Лагранжъ покончилъ сперва со статикою; динамика слѣдуетъ у него за нею. Однако же, такая степень сочетанія, въ которой единственнымъ соединительнымъ звеномъ является д'Аламбертовъ принципъ, отнюдь не достаточна. Уже сходство наиболѣе общихъ аналитическихъ выраженій указываетъ на несравненно болѣе тѣсную связь обѣихъ прежнихъ вѣтвей одного и того же научнаго ствола. И теперь нѣтъ недостатка въ признакахъ, что полное соединеніе статики съ динамикою все болѣе и болѣе становится требованіемъ соразмѣрности научной формы.

93. Главною точкою приложенія для важнѣйшихъ успѣховъ новаго періода является изъ прежняго наслѣдія теорема Гюйгенса о поднятіи тѣлъ въ статически-связанномъ или въ свободномъ состояніи до высоты паденія. Эта теорема, по введеніи Лейбницевою терминологіи, получившая названіе принципа сохраненія живыхъ силъ

и возникшая изъ проблемы о центрѣ качанія, сдѣлалась въ разсматриваемомъ періодѣ частію предметомъ дальнѣйшаго расчлененія, частію непосредственно примѣнимымъ средствомъ для рѣшенія новыхъ задачъ. Въ качествѣ такого средства она являлась преимущественно въ гидродинамикѣ Даниіла Бернулли, играя въ вопросѣ объ опредѣленіи движенія жидкостей въ каналахъ подобную же роль, какъ первоначально въ задачѣ объ опредѣленіи центра качанія сложнаго маятника. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ лишь постепенно приходятъ къ рѣшеніямъ, вытекающимъ изъ первыхъ принциповъ механики непосредственно и не требующимъ теоремы о сохраненіи живыхъ силъ какъ недоказаннаго исходнаго пункта. Но эта расчленяющая работа относилась не столько къ понятію о живой силѣ и объ общемъ способѣ ея дѣйствія и сохраненія въ какомъ-нибудь простомъ случаѣ, сколько къ примѣси статическихъ отношеній къ динамическимъ. Ранѣе мы видѣли, что проблема простого маятника не слишкомъ далека отъ простѣйшаго случая движенія по наклонной плоскости, но что уже въ случаѣ маятника, состоящаго изъ двухъ тяжелыхъ точекъ, возникаетъ задача высшаго рода, ибо между двумя точками появляется взаимное, неизмѣннымъ статическимъ отношеніемъ опредѣляемое, распредѣленіе импульсовъ тяжести. Такимъ образомъ, вообще, дѣло здѣсь въ отвѣтъ на вопросъ, каково будетъ взаимоотношеніе динамическихъ силъ въ случаѣ введенія статическихъ отношеній упомянутого сложнаго рода. Уже у Якова Бернулли отвѣтъ на этотъ вопросъ привелъ къ опредѣленію тѣхъ частей силъ, которыя должны быть въ равновѣсіи сами по себѣ, если вполне отвлечься отъ движенія. Извѣстно, что это суть такъ называемыя потерянные или пріобрѣтенныя при взаимномъ распредѣленіи силы, являющіяся, по сравненію съ возможнымъ совершенно свободнымъ движеніемъ, его измѣняющими сопротивленіями либо ему способствующими средствами. Но такое расчлененіе статически взаимно уничтожающихся силовыхъ элементовъ и концепція противоположности дѣйствительнаго движенія движенію, которое имѣло бы мѣсто въ предположеніи отсутствія статическихъ связей, уже у Якова Бернулли дали зерно того, что позднѣе, принимая разныя направленія и разныя формы, окончательно же подъ видомъ д'Аламбертова принципа, сдѣлалось общимъ методомъ рѣшенія задачъ динамики съ помощію законовъ статическихъ отношеній. Припомнимъ себѣ при этомъ наше первоначальное усмотрѣніе, что, рассматриваемый съ чисто-механической точки зрѣнія, безъ всякаго отношенія къ размѣрамъ и объему примѣненій, съ самого начала наибольшія трудности предъявлялъ тотъ стволъ динамическихъ задачъ, въ которомъ свободное движеніе комбинировалось съ статическими связями.

Въ этомъ отношеніи путь исторіи шелъ отъ Галилея чрезъ Гюйгенсовы работы, а свободная механика тяготѣнія, какъ продолженіе динамики совершенно свободныхъ движеній, оставалась скорѣе въ сторонѣ, безъ рѣшительнаго вліянія на важнѣйшія проблемы сложнаго рода. Такимъ образомъ вполне очевидно, что отношенія статики къ динамикѣ представляютъ существеннѣйшую сторону прогрессирующаго познанія, а потому и мы преимущественно съ этой же точки зрѣнія рассмотримъ то предложеніе, съ которымъ связанъ этотъ, во всякомъ случаѣ, существеннѣйшій отдѣлъ исторіи началъ въ разсматриваемомъ періодѣ. Законъ сохраненія живыхъ силъ, съ весьма различныхъ точекъ зрѣнія, долженъ составлять основу дальнѣйшаго нашего начертанія.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Принципъ сохраненія живыхъ силъ.

94. Сохраненіе живыхъ силъ есть представленіе, которое можно разложить на болѣе общую и болѣе специальную составныя части. Первая касается отношенія возникновенія и расхода даннаго количества силы вообще и относится прежде всего къ весьма простому случаю свободно движущагося тѣла, причемъ не принимаются въ расчетъ его размѣры и форма или распредѣленіе въ немъ массы, т.-е. оно разсматривается нѣкоторымъ образомъ какъ точка. Вторая составная часть представленія касается сочетанія тѣлъ, дѣйствующихъ одно на другое простымъ давленіемъ, и слѣдовательно, какъ въ случаѣ сложнаго маятника, образующихъ неизмѣняемый стержень, или же ихъ воображаютъ связанными твердою линіей. Какъ болѣе общей, такъ и специальной формѣ представленія положилъ основаніе Гюйгенсъ. Выше (§§ 58—59) мы показали, что при рѣшеніи задачи о центрѣ качанія онъ съ самаго начала свелъ принципъ поднятія до высоты паденія къ положенію, что изъ ничего не можетъ возникнуть никакой поднимающей силы и что поэтому при всѣхъ обстоятельствахъ излишекъ поднятія надъ высотой паденія, соотвѣтствующею начальной скорости, былъ бы безсмыслицею. Гюйгенсъ конципировалъ этотъ принципъ какъ нѣчто непосредственнѣйшимъ образомъ примыкающее къ Галилеевской схемѣ способа возникновенія и дѣйствія скорости въ частномъ примѣненіи къ восхожденію по наклоннымъ плоскостямъ, и, имѣя въ виду свою проблему о центрѣ качанія, расширилъ въ томъ смыслѣ, что и статическая связь ничего въ содержаніи этого принципа измѣнить не можетъ. Какъ

въ связанномъ, такъ и въ свободномъ состояніи, при обращеніи около горизонтальной оси или безъ этого, сила тяжести не могла бы произвести никакого вертикальнаго движенія вверхъ, которое, по своей величинѣ, не имѣло бы источника въ скорости, произведенной равнымъ паденіемъ. Впрочемъ, Гюйгенсъ не упустилъ изъ виду и всеобщей широты примѣненій своего принципа, ибо онъ, какъ мы равнымъ образомъ уже говорили, замѣтилъ и то, что онъ примѣнимъ и къ жидкостямъ, — указаніе, которымъ впослѣдствіи не преминулъ воспользоваться Данииль Бернулли.

Припомнивъ себѣ эти исходные пункты Гюйгенса, мы можемъ утвердительно сказать, что этотъ гениальный ревнитель въ дѣлѣ механики и математики открылъ и формулировалъ не просто особую теорему механики, которою воспользовался при изысканіи центра качанія, но и такъ-сказать философское основное воззрѣніе болѣе общей природы и болѣе широкаго значенія. Послѣдующее время вплоть до нашихъ дней точно также не смогло дать этой общей, какъ бы логической истинѣ, присущей принципу, никакого иного основанія, какъ то, что никакая сила не можетъ возникнуть изъ ничего. Всѣ идеи сохранения, выступившія въ новѣйшее время съ открытіемъ механическихъ эквиваленцій тепловыхъ дѣйствій, содержатъ во внутреннѣйшемъ ядрѣ лишь тотъ же первичный принципъ, на который ссылался и Гюйгенсъ, и важное значеніе котораго уже онъ могъ обозрѣть до весьма далекихъ предѣловъ. Впрочемъ, въ принципіальномъ разысканіи метафизической стороны дальше онъ не пошелъ. Ему довольно было этого, какъ бы логическаго засвидѣтельствованія представленія, а при частномъ примѣненіи смотрѣлъ онъ на соотношеніе квадратовъ скоростей съ высотами паденія, т.-е. на равенство ихъ двойнымъ высотамъ паденія, просто какъ на установленный Галилеемъ способъ дѣйствія тяжести. Хотя онъ и суммировалъ произведенія массъ на квадраты скоростей, причемъ узнался о независимости этой суммы отъ несвободы или отъ свободы движенія для каждаго момента времени, тѣмъ не менѣе, ему не представлялось надобности обозначать эти произведенія какимъ-нибудь особымъ техническимъ терминомъ.

95. Благодаря Лейбницу (1646--1716), съ одной стороны пошло въ ходъ новое названіе уже существующей вещи, а съ другой стороны на нѣкоторое время выступила на первый планъ примѣсь къ предмету постороннихъ ему метафизическихъ размышленій. Лейбницево наименованіе простаго давленія или тяги, имѣющихъ мѣсто въ статическомъ состояніи, «мертвою силою», и противопоставленіе ей «живой силы», какъ представительницы силового развитія въ собственномъ смыслѣ, было лишь эхомъ одной второстепенной Га-

лилеевской мысли. Въ § 67 мы изъяснили эту Галилеевскую идею. Впрочемъ, это размышленіе о различіи между простымъ давленіемъ, производимымъ большою тяжестью, и количествомъ дѣйствія, возникающимъ вслѣдствіе малаго удара, размышленіе это—еще наслѣдіе древности и само по себѣ не имѣетъ большаго значенія. Только Галилеево представленіе о непрерывномъ накопленіи импульсовъ въ ударѣ придало этой мысли большее значеніе, и Лейбницъ также прямо ссылается¹ на изреченіе Галилея, что дѣйствіе удара такъ относится къ простому давленію какъ безконечное къ конечному. Лейбницава «мертвая сила», ведущая начало отъ Галилеевской *pes mortis*, забыта исторіей; ибо можно гораздо лучше обойтись безъ этого выраженія, такъ какъ уже простое лингвистическое чутье не допускаетъ терминологіи, которая, будучи излишнею, имѣетъ и явный вредъ, открывая доступъ ложной метафизикѣ. Напротивъ того, выраженіе «живая сила», если только не придавать ему никакого реального смысла, сдѣлалось чисто аналитическимъ терминомъ для обозначенія произведенія изъ массы на квадратъ скорости. Такое полное устраненіе всякаго вещественнаго и нагляднаго представленія объясняется тѣмъ, что въ этомъ лишь путаницу вносящемъ и всегда спорномъ метафизическомъ истолкованіи, въ которомъ Лейбницъ прибѣгалъ даже къ энтелехіямъ Аристотеля,—вынуждены были отбросить вообще всякій способъ представленія, кромѣ аналитическаго.

Пререканія о такъ-называемомъ измѣреніи силъ, всегда вращающіяся лишь въ областяхъ метафизическаго тумана, которымъ хотятъ окутать науку,—эти пререканія, никогда не касавшіяся уже существующихъ главныхъ отношеній, каковы Гюйгенсовы и Ньютоновы результаты, можно объяснить только тѣмъ, что картезіанскіе натурфилософы, которые не знали или не умѣли оцѣнить вещественнаго содержанія уже завоеваннаго знанія, давали удобный поводъ къ порожденію видимости новой критики и низверженія Декартовской философемы, которую уже Гюйгенсъ далеко оставилъ за собою. Этотъ великій мыслитель никогда не считалъ достойнымъ труда особенно освѣщать недостатки, заблужденія или двусмысленности Декартовскихъ представленій и терминологіи. Лейбницъ же не упустилъ случая заняться этимъ и около двухъ лѣтъ спустя послѣ статьи о дифференціальномъ исчисленіи опубликовалъ нѣчто вродѣ поправокъ къ Картезію², высказавшись въ томъ смыслѣ,

¹ Въ *Specimen dynamicum* etc. впервые въ *Acta Erudit.* 1695. Пертцъ-Гергартовское изд. математическихъ трудовъ Лейбница, т. VI. Галле 1860, стр. 238.

² *Brevis demonstratio* etc. въ *Acta Erudit.* 1686. Цитир. изд. трудовъ, т. VI, стр. 117.

что то, что въ природѣ сохраняется, не есть количество движенія, т.-е. не произведеніе изъ массы на скорость, такъ что измѣрять силы слѣдуетъ не производимыми ими скоростями, но квадратами скоростей. У Картезія была смутная, но случайно вѣрная идея, что величина силы въ смыслѣ количества дѣйствія должна быть представляема произведеніемъ вѣса на высоту поднятія. Но самъ онъ занимался только виртуальными, въ статическихъ вопросахъ встрѣчающимися движеніями и сверхъ того ничего не понималъ въ Галилеевской динамикѣ. Когда же Лейбницъ истолковалъ Картезіево положеніе въ приложеніи къ Галилеевскимъ законамъ паденія, то нашелъ новую форму для Декартовскаго основнаго представленія. Прямо ссылаясь на Галилея, онъ замѣнилъ Картезіево произведеніе изъ вѣса на высоту произведеніемъ, тотчасъ же получающимся, если припомнить, что пути пропорціональны квадратамъ скоростей, существующихъ при началѣ движенія вверхъ. Если, какъ предполагалъ Картезіи, все равно, поднимать ли единичный вѣсъ на четверную высоту, или четверной вѣсъ на единичную высоту, то отсюда слѣдуетъ, что также все равно, будетъ ли единичный вѣсъ подниматься съ двойною скоростью, или четверной вѣсъ съ единичною скоростью. Такимъ образомъ, количества дѣйствія, поскольку они состоятъ въ потребленіи и дѣйствіи данныхъ скоростей и рачисляются сообразно пройденному грузомъ пути, относятся какъ квадраты скоростей. Но почему принятое Картезіевское допущеніе, что произведеніе пути на грузъ, т.-е., въ теперешнемъ смыслѣ, работа, почему она должна бы быть мѣриломъ и при оцѣнкѣ силъ, въ объясненіи этого Лейбницъ, какъ въ частности это можно видѣть изъ его посмертныхъ статей, не могъ пойти дальше самого Картезія. Онъ прибѣгнулъ даже къ совершенно несвойственнымъ чисто статическимъ отношеніямъ на простыхъ машинахъ. Благодаря непониманію этихъ статическихъ отношеній, Декартъ пришелъ къ такому выраженію виртуальнаго принципа, что будто бы величина силы измѣряется произведеніемъ вѣса на высоту подъема. Динамическое значеніе, каковое должно было приписать этому произведенію, осталось виновнику этого общаго представленія неизвѣстно, а позднѣйшій его истолкователь, взявшій его въ этомъ новомъ смыслѣ, въ свою очередь также не зналъ, какъ подкрѣпить его въ этомъ новомъ значеніи болѣе глубокими основаніями.

Если силу, какъ посредствующее понятіе, забраковать, то исчезаетъ и метафизически схоластическая сторона вопроса объ измѣреніи, и вопросъ будетъ не въ чемъ иномъ, какъ въ опредѣленіи количественнаго элемента въ различнаго рода дѣйствіяхъ. Количество дѣйствія въ смыслѣ непрерывнаго суммированія элементарныхъ

количество дѣйствія соотвѣтствуетъ полупроизведенію массы на квадратъ скорости; но накопленіе скорости въ Галилеевскомъ смыслѣ остается тѣмъ простѣйшимъ родомъ дѣйствія, о которомъ прежде всего спрашивается при всякихъ явленіяхъ. Замѣчательною странностью въ исторіи является то, что представителемъ силы намѣчено было не дѣйствительное количество дѣйствія, отвѣчающее полуквадрату скорости, но просто вслѣдствіе пропорциональности, произведеніе полного квадрата на массу, т.-е. двойное количество дѣйствія. Это введенное Лейбницемъ недоразумѣніе было бы естественнымъ образомъ устранено, еслибы писателямъ, нынѣ выставляющимъ полупроизведеніе какъ нѣчто самостоятельное, удалось ввести и отмѣну термина. Выраженіе «живая сила» означаетъ, такъ сказать, просто квадратъ скорости массы, и если должны получить права гражданства правильныя реальныя представленія, то о количествѣ дѣйствія, о работѣ, объ энергіи и т. п. и о соотвѣтствующемъ этимъ понятіямъ полупроизведенію будутъ говорить, помня при этомъ, что какъ цѣлое произведеніе реально совсѣмъ не существуетъ, то и не можетъ быть предметомъ сохраненія. Итакъ, наименованіе въ родѣ живой силы, даже логически, ошибочно, и было бы всего лучше, вмѣстѣ съ мертвою похоронить и живую силу Лейбница, какъ понятіе ложное.

Такая же туманная неточность, какая присуща Лейбницеvской метафизикѣ безконечнаго, повела за собою недостатокъ строгости и двусмысленность и въ его представленіяхъ о расходѣ скоростей; слѣдствія этого, хотя и не въ такомъ родѣ, какъ ложная метафизика дифференціальнаго исчисленія, вліяніе которой чувствуется и теперь, однакоже не однократно служили тормазомъ натуральному уразумѣнію основныхъ понятій механики. Въ самомъ дѣлѣ, изъ безконечнаго повторенія того, что онъ называлъ мертвою силою, т.-е. изъ неограниченнаго множества статическихъ отношеній, Лейбницъ хотѣлъ вывести рядъ дѣйствій, т.-е., говоря его языкомъ, развитіе живой силы. Но это почти то же самое, какъ еслибы кто-либо хотѣлъ понимать линію какъ скопленіе безконечнаго множества непротяженныхъ точекъ. Элементъ количества дѣйствія или живой силы есть также продолжающееся въ теченіе элемента времени дѣйствіе и соотвѣтствуетъ произведенію изъ количества движенія на дифференціалъ скорости. Лейбницъ никогда строго и недвусмысленно не принималъ въ уваженіе того положенія, что и въ безконечно-маломъ имѣетъ мѣсто измѣняющее силовыя отношенія развитіе дѣйствія. Его неопредѣленныя, въ ту и другую сторону колеблющіяся, возрѣнія заставляли его высказывать то одно, то другое, причемъ никогда не выступалъ ясно рѣшительный, на

сознаніе исключających другъ друга противорѣчій опирающійся, способъ представленія.

На-ряду съ измѣреніемъ силъ въ собственномъ смыслѣ слова, идеи сохраненія образуютъ относительно самостоятельный кругъ мыслей. Въ этомъ отношеніи Лейбницъ слѣдовалъ наиболѣе общему мотиву Гюйгенса, а именно положенію, что дѣйствіе не можетъ возникнуть изъ ничего. Употребленіе этого основанія было этому нѣмецкому философствователю тѣмъ сподручнѣе, что онъ даже специально занимался разработкою Спинозовскаго каузальнаго закона и формулированіемъ его какъ положенія о достаточномъ основаніи. Сверхъ того, онъ же настойчиво указывалъ на понятіе о непрерывности,—понятіе неизбежное при строгомъ математическомъ воззрѣніи на явленія природы, о чемъ уже у Галилея были весьма вѣрныя мысли. Принявъ Галилеевское разложеніе удара на безконечное число элементарныхъ импульсовъ и сочетавши оное съ законами удара, установленными Гюйгенсомъ и другими, онъ пришолъ къ постановкѣ и общаго представленія, до котораго было уже не далеко, что развитіе живой силы всегда связано съ истощеніемъ дѣятеля о сопротивленіе. Что касается удара, то сюда присоединялось логическое слѣдствіе: „То, что поглощается частицами, никоимъ образомъ не теряется абсолютно для вселенной, хотя оно и потеряно для совокупности силъ соударяющихся тѣлъ“ ¹. Этотъ выводъ изъ всѣхъ выводовъ, лежавшихъ на пути Лейбницевой метафизики, несомнѣнно былъ лучшимъ изъ возможныхъ; ибо хотя онъ никоимъ образомъ не былъ предвкусеніемъ современнаго намъ способа воззрѣнія, но все же случайно содержалъ истину, которая нынѣ лучше доказывается механикою теплоты. Не должны мы забывать и того, что Лейбницъ считалъ силы субстанціями въ метафизическомъ смыслѣ этого слова, и что ему такимъ образомъ легко было утверждать ихъ неразрушимость. Итакъ, негодная метафизика играла здѣсь большую роль, чѣмъ даже логическія слѣдствія, взятаго въ количественной опредѣленности, каузальнаго закона или, другими словами, положенія о достаточномъ основаніи количествъ.

96. Въ числѣ болѣе знаменитыхъ математиковъ Иванъ Бернулли (1667 — 1748) былъ тѣмъ, чей образъ мыслей и на практикѣ и въ теоріи всего болѣе сроденъ былъ Лейбницеvu; онъ же и считалъ себя наиболѣе способнымъ—указать, каково значеніе разсматриваемыхъ метафизическихъ идей. Въ своемъ извѣстномъ сочиненіи

¹ Заключительныя слова лишь въ недавнее время появившейся въ печати, относящейся ко времени споровъ съ картезіанцами, статьи: *Essai de dynamique etc.* Цитир. изд. твореній, т. VI, стр. 231.

на премію 1723 г. о сообщеніи движенія онъ опредѣляетъ живую силу какъ «такую, которая пребываетъ въ тѣлѣ, когда оно находится въ равномерномъ движеніи» ¹. Очевидно, что хотя здѣсь и не говорится, что количество движенія или движеніе массы по инерціи есть живая сила, но разумѣется, что оно ее содержитъ. Количество движенія мыслится какъ причина возможности дѣйствія, каковая въ случаѣ сопротивленія можемъ различнымъ образомъ осуществиться; но эта общая точка зрѣнія годна и въ отношеніи къ покоящемуся тѣлу, понуждаемому къ реакціи. Однакоже въ послѣднемъ случаѣ не предполагается никакой живой силы, ибо скорость, а съ нею и разсматриваемое произведеніе равны нулю. Далѣе о живой силѣ И. Бернулли говоритъ: «Она эквивалентна той части причины, которая поглощается, производя ее (*s'est consumée en la produisant*)» ². Подъ именемъ общей причины разумѣется здѣсь вообще нѣкоторая физическая сила и ей противопоставляется особое, количественно опредѣленное дѣйствіе. Сказавъ о томъ, что всякая элементарная потеря соотвѣтствуетъ нѣкоторому элементарному выигрышу, онъ прибавляетъ далѣе ³: „Въ этомъ равенствѣ состоитъ сохраненіе силъ для тѣлъ, находящихся въ движеніи“. Вообще рѣчь идетъ о равенствѣ причины и дѣйствія, поэтому мы не должны удивляться, когда И. Бернулли ⁴ прямо объявляетъ: Пытаться доказать законъ сохраненія живыхъ силъ значить только затемнять его.

Предположеніе Лейбница, что въ природѣ не бываетъ абсолютнаго покоя, ввело И. Бернулли въ заблужденіе, которое стоитъ того, чтобы его отмѣтить. Именно, онъ представляетъ себѣ, что покоящееся тѣло постоянно находится въ состояніи стремленія (*effort*) къ паденію, и что оно получаетъ безконечно малыя скорости, пропадающія при самомъ возникновеніи, и при исчезновеніи вновь возникающія (*périssent en naissant et renaissent en périssant*) ⁵. Подобный процессъ, въ которомъ понятіе о безконечно маломъ играетъ неподобающую роль, естественно, вовсе не есть антагонизмъ дѣйствительныхъ весьма малыхъ колебаній, а просто формула непримиримаго противорѣчія.

Въ то время какъ Иванъ Бернулли, по примѣру Лейбница, на первый планъ ставилъ внутренніе процессы и метафизическіе способы изслѣдованія, его сынъ Даніилъ Бернулли началъ съ того,

¹ Discours sur les lois de la communication du mouvement. Opera, 4 тома. Lausanne 1742, т. III, гл. 3, стр. 23.

² Ibid. гл. V, § 3, стр. 36.

³ Ibid. § 8, стр. 38.

⁴ Ibid. гл. 10, § 1, стр. 56.

⁵ Ibid. гл. V, § 2, стр. 35.

что объявилъ эти общія метафизическія точки зрѣнія вещью для дѣла весьма маловажною и сталъ держаться исключительно Гюйгенсовской формы закона сохраненія, слѣдовательно, равенства подъема паденію, — равенства, которое бы безразлично имѣло мѣсто и при свободномъ состояніи и при связанномъ. Отецъ видѣлъ въ Гюйгенсовой теоремѣ только слѣдствіе общаго принципа сохраненія живыхъ силъ, каковой, по его мнѣнію, въ настоящемъ доказательствѣ совсѣмъ не нуждался или былъ недоказуемъ. Напротивъ того, Данииль Бернулли, подобно виновнику этого принципа, хотѣлъ имъ воспользоваться для разрѣшенія своихъ гидродинамическихъ задачъ, и для него было даже очень важно, въ противоположность англичанамъ или инымъ противникамъ Лейбницевскихъ приемовъ и способовъ выраженія, повернуть назадъ къ чисто Гюйгенсовскимъ мыслямъ. Онъ былъ того мнѣнія, что въ главномъ дѣлѣ всѣ были согласны и что о несущественныхъ для дѣла разногласіяхъ въ способѣ представленія спорить не стоило.

Въ прелиминаріяхъ къ своей гидродинамикѣ, которыя должны были освѣтить принципы общіе гидростатикѣ и гидравликѣ, онъ заявляетъ, что изъ всѣхъ принциповъ, которыми онъ пользовался, наибольшее предпочтеніе онъ отдаетъ принципу сохраненія живыхъ силъ, или, какъ онъ выражается, «началу равенства между дѣйствительнымъ (actuellen) паденіемъ и возможнымъ (potentiellen) подъемомъ». Выражаясь такъ, онъ желалъ бы избѣжать возраженій тѣхъ, кого смутило бы слово «живая сила». Здѣсь же ¹ кратко и мѣтко онъ указываетъ главные моменты въ исторіи развитія этого принципа. Ему извѣстна преемственность у Галилея и Гюйгенса и словами послѣдняго онъ вполне формулируетъ принципъ. Ссылаясь на свою относящуюся сюда статью, помѣщенную въ трудахъ Петербургской Академіи (т. I этихъ Записокъ, стр. 131 и слѣд.) и резюмируя исторію предмета, онъ утверждаетъ, что во всемъ Лейбницевскомъ ученіи нѣтъ ничего, чего не было бы фактически и у всѣхъ, только выраженнаго своеобразно каждымъ. Такимъ образомъ онъ не обращаетъ вниманія на самый способъ представленія, а придерживается только механической теоремы о равенствѣ дѣйствительнаго паденія и возможнаго свободнаго, разрѣшеннаго отъ связей, подъема тѣла, равенствѣ, какъ его предполагалъ Гюйгенсъ въ вопросѣ о сложномъ маятникѣ.

Въ статьѣ, обнародованной десять лѣтъ спустя послѣ гидродинамики въ Запискахъ Берлинской Академіи, подъ заглавіемъ «Замѣчанія о принципѣ сохраненія живыхъ силъ, взятомъ въ общемъ

¹ D. Bernoulli, Hydrodynamica. 1738, Sect. I, § 18 и слѣд.

смыслѣ»¹, Д. Бернулли трактуетъ объ одномъ великомъ принципѣ природы, но и здѣсь, не входя въ основы его, ограничивается подтвержденіемъ его широкими примѣненіями. Онъ даетъ здѣсь совершенно общую разработку случая взаимныхъ притягательныхъ силъ, измѣняющихся съ разстояніемъ по какому угодно закону. Принципіально важнѣйшее здѣсь, это—переходъ отъ постоянныхъ силъ къ переменнымъ. Пропорціональность квадратовъ скоростей путямъ дѣйствія была уже абстрагирована отъ обыкновенной схемы паденія, т.-е. отъ примѣра постоянной силы, и нужно было математически показать, что и количество дѣйствія непостоянной силы также пропорціонально квадрату скорости и находится въ нѣкоторомъ отношеніи къ пройденному пути, т.-е. къ взаимному сближенію притягивающихся массъ.

Примѣнять принципы совсѣмъ не то, что анализировать ихъ. Въ виду этого, многократное употребленіе, которое Д. Бернулли дѣлаетъ въ своей гидродинамикѣ изъ теоремы о сохраненіи живыхъ силъ, не имѣетъ для насъ никакого особеннаго интереса. Если что и важно, то лишь способъ, какимъ онъ вводитъ этотъ принципъ. Онъ сознательно проведенъ чрезъ все произведеніе какъ непосредственное предположеніе, но въ оправданіе его не дается никакого расчлняющаго отчета. Форма, въ какой онъ является, неизмѣнно есть представленіе, что потенціальное поднятіе (*ascensus potentialis*) должно быть равно актуальному паденію нѣкоторой жидкой массы. Въ этой формѣ онъ служитъ для установленія законовъ истеченія и колебанія жидкостей. Натурально, Д. Бернулли замѣчаетъ, что какъ при ударѣ, такъ и въ этихъ случаяхъ физически неизбежна большая или меньшая потеря живой силы, и что оказывающіяся на опытѣ неравенства между восхожденіемъ и паденіемъ должны быть отчасти приписаны этому поглощенію живой силы вязкостью частичекъ. Въ послѣднемъ отдѣлѣ своего труда Д. Бернулли ведетъ совершенно вѣрныя вычисленія количествъ движенія, отнесенныхъ къ общему направленію. Въ предпоследней (двѣнадцатой) секціи онъ пришелъ вообще къ познанію статическихъ отношеній внутри области гидравлическихъ отношеній и эти, при первомъ начертаніи предыдущихъ частей работы еще самому ему неясные способы взрѣнія ввелъ какъ новую статику и, какъ онъ также называетъ ее, гидравлико-статику. Мы упоминаемъ объ этихъ обстоятельствахъ только ради контраста, въ какомъ они стоятъ къ сплошь непосредственному примѣненію принципа сохраненія. Этотъ послѣдній, польза котораго всего замѣтнѣе именно въ седьмомъ и восьмомъ отдѣлахъ,

¹ Histoire de l'Académie de Berlin, за 1748 г., стр. 356 и слѣд.

гдѣ онъ примѣняется къ болѣе сложнымъ движеніямъ изъ отверстій сосудовъ, принципъ этотъ можно бы было ясно познать въ его сокровеннѣйшихъ основахъ, еслибы накопленіе и истощеніе количествъ движенія, слѣдовательно примыкающія къ статикѣ отношенія измѣненій давленія, относяшіяся къ элементамъ процессовъ, съ самаго начала сдѣланы были принципиальнымъ исходнымъ пунктомъ. Для сравненія заключеній изъ количествъ движенія съ заключеніями изъ живыхъ силъ, отсылаю особенно къ § 17 послѣдней и къ § 3 (regula II) восьмой секціи. Особое разсмотрѣніе этихъ примѣненій, въ виду специально гидродинамическаго характера предмета, завело бы насъ слишкомъ далеко въ область разъяснительныхъ вспомогательныхъ изслѣдованій.

97. Гюйгенсово начало сохраненія относилось не къ единичному движущемуся объекту, но къ статически связанной системѣ. Оно содержало, слѣдовательно, одной идеею больше, чѣмъ до сихъ поръ нами обслѣдовано и особенно чѣмъ оно представляется, какъ мы нашли, въ Лейбниевской концепціи. Оно включало мысль, что чисто-статическія давленія хотя и измѣняютъ распредѣленіе, но не совокупную сумму поднимающихъ силъ. Центръ тяжести тѣлъ, соединенныхъ, наприм., въ формѣ сложнаго маятника, которыя упали связанные вмѣстѣ, а поднимаются вверхъ вслѣдствіе пріобрѣтенной скорости разъединенными, центръ тяжести такихъ тѣлъ подымается до первоначальной высоты. Возможность такого поднятія Гюйгенсъ представляетъ себѣ, слѣдую своему принципу, двояко. А именно, съ одной стороны, она выражается отдѣльными произведеніями вѣса на высоту или массы на квадратъ скорости, а съ другой стороны найдено было, что сумма этихъ отдѣльныхъ произведеній есть полная подъёмная сила, если движеніе центра тяжести опредѣлять обыкновеннымъ образомъ по движенію отдѣльныхъ массъ. Если теперь предположить этотъ принципъ, то та же самая сумма произведеній будетъ дѣйствительна для обоихъ представленій силы или, другими словами, живая сила системы, несмотря на статическую несвободу, для каждаго произвольнаго мгновенія будетъ такая же, какъ сумма живыхъ силъ ея отдѣльныхъ, предполагаемыхъ свободными, частей. Весьма часто принципъ сохраненія живыхъ силъ понимаютъ именно съ точки зрѣнія, что статическое взаимодействіе силъ остается безъ вліянія. Привнесеніе такого статическаго взаимоотношенія не мѣшаетъ сохраненію того же количества живой силы,—такова другая идея, которой придавали большое значеніе всѣ, державшіеся въ своихъ представленіяхъ преимущественно Гюйгенсовскихъ основаній. Нужно сознаться, что для расширенія механическаго знанія эта вторая составная часть принципа имѣетъ еще большую важность, и болѣе глубокое изслѣ-

дованіе покажетъ также, что, строго говоря, даже и не можетъ быть никакого отношенія дѣйствій двухъ силъ, при которомъ уже въ извѣстномъ смыслѣ не возникалъ бы вопросъ, какимъ образомъ статическія отношенія, которыя можно представлять себѣ какъ бы предшествующими развитію силъ, вліяютъ на это самое силовое развитіе или остаются для него безразличными. Само собою разумѣется, что эти статическія отношенія слѣдуетъ понимать въ томъ болѣе общемъ смыслѣ, въ какомъ внутреннее натяженіе или давленіе для непротяженного момента времени, или какъ хотите назовите это отношеніе внутренняго состоянія, совершенно достаточно для характеристики силовыхъ отношеній, предшествующихъ развитію движенія. Напротивъ, дѣйствительное равновѣсіе состоитъ въ являщемся равенствѣ такихъ внутреннихъ натяженій или давленій, впрочемъ, разсматриваемыхъ какъ дѣйствія строго мгновенныя.

Расчлененіе, каковому Гюйгенсово приложение принципа къ задачѣ о центрѣ качанія подвергнуто было преимущественно Яковомъ Бернулли, можетъ быть поучительно въ отношеніи самого этого принципа въ двоякомъ смыслѣ. Во-первыхъ, оно показало, насколько затруднительно было при помощи обыкновенныхъ механическихъ началъ сдѣлать очевидными болѣе глубокія основанія этого безразличія статическихъ отношеній, а во-вторыхъ, изъ него видно было, что какъ скоро порѣшили о статической, т.-е. строго мгновенной формѣ силовыхъ отношеній, то примыкающее сюда развитіе изъ соединенныхъ въ этомъ родѣ силовыхъ группъ извѣстнаго количества дѣйствія не требуетъ никакой иной идеи, кромѣ обыкновенной Галилеевской схемы силового дѣйствія. Такимъ образомъ рѣшена, такъ сказать, задача о сложении живыхъ силъ при произвольномъ сочетаніи массъ, и слѣдовательно найдено вмѣстѣ съ тѣмъ основаніе для новаго принципа совмѣстной разработки статики и динамики, а прежде всего для разрѣшенія динамическихъ проблемъ по схемѣ статическихъ отношеній. Тому, что позднѣе д'Аламберъ формулировалъ какъ особое правило, данъ былъ Яковомъ Бернулли прообразъ, въ сущности, уже этимъ расчлененіемъ, а болѣе глубокая основа этихъ успѣховъ заключалась въ томъ, что найдено было статическое соединительное звено, которое давало возможность соединять количества дѣйствія или живыя силы, каково бы ни было ихъ статическое сочетаніе, и такимъ образомъ развивать полныя движенія.

98. Уже въ § 58 мы коснулись возраженій на Гюйгенсовское рѣшеніе задачи о центрѣ качанія, побудившихъ Якова Бернулли къ неоднократнымъ и въ концѣ концовъ удавшимся попыткамъ къ расчлененію вопроса. Онъ былъ старшимъ изъ знаменитой семьи

Бернулли, оказавшейся столь вліятельною въ области математики и механики. Хотя онъ умеръ (1654—1705) десятью годами раньше Лейбница, тѣмъ не менѣе въ главномъ вопросѣ, нами разсматриваемомъ, онъ проложилъ на дѣлѣ надежнѣйшій путь. Отъ своего младшаго брата Ивана, котораго вначалѣ онъ руководилъ на стезяхъ математики, отличался онъ вообще и въ нашемъ вопросѣ въ частности тѣмъ, что почти вовсе не интересовался различіемъ метафизическихъ способовъ представленія, зато много трудился надъ приведеніемъ фактовъ и еще формально несовершенныхъ рѣшеній къ простымъ принципамъ обыкновенной механики. Въ этомъ смыслѣ именно онъ былъ тѣмъ, кто всего болѣе пролилъ свѣта на Гюйгенсовскую теорему, и именно на сохраненіе живыхъ силъ, каковое имѣло бы мѣсто несмотря на статическія связи. Задача о центрѣ качанія была посредствомъ принципа равнаго поднятія Гюйгенсомъ рѣшена, и дѣло было лишь въ томъ, чтобы вмѣсто этого, все еще оставляющаго мѣсто сомнѣнію, метода поставить такой способъ вывода, который непосредственно примыкалъ бы къ первымъ и извѣстнымъ принципамъ механики и вовсе не нуждался бы въ принципѣ сохраненія въ статически-осложненной формѣ. Удайся подобный выводъ, и этимъ само собою былъ бы доказанъ и Гюйгенсовъ принципъ, а посему и теорема о сохраненіи живыхъ силъ впредь должна бы была считаться не аксіомою, но доказуемою теоремою. Но, какъ уже сказано, самъ Яковъ Бернулли въ такія опредѣленія и методическія розысканія совѣмъ не пускался, и, какъ мы знаемъ изъ позднѣйшаго образа дѣйствія Даниила Бернулли и другихъ, теорема о сохраненіи прямо примѣнялась какъ непосредственное вспомогательное средство, а съ этимъ вмѣстѣ принципъ равнаго поднятія и впослѣдствіи не разъ примѣнялся какъ аксіома. Непосредственное намѣреніе Якова Бернулли на дѣлѣ состояло совѣмъ не въ томъ, чтобы прежде всего вывести новый принципъ, а просто въ томъ, чтобы дать болѣе прямое рѣшеніе задачи о центрѣ качанія.

Первый шагъ на пути къ этому болѣе прямому рѣшенію былъ еще связанъ съ немаловажнымъ заблужденіемъ, и только общая мысль съ самаго начала имѣетъ здѣсь цѣнность, да и позднѣе осталась руководящею точкою зрѣнія. Сбивчивыя и ошибочныя возраженія, съ которыми нѣкій аббатъ Catelan въ 1681—82 г. выступилъ противъ Гюйгенса, и которыя повели къ нѣкотораго рода пререканіямъ, побудили Якова Бернулли вмѣшаться въ споръ и даже на первыхъ порахъ дать доказательство, которое, хотя по построенію и являлось весьма сомнительнымъ, однакоже, повидимому, говорило противъ правильности Гюйгенсова рѣшенія. Въ относящейся

сюда статьѣ¹, повѣствующей объ этомъ спорѣ, Яковъ Бернулли даетъ свой въ принципѣ правильный, но въ примѣненіи ложный выводъ скорости сложнаго маятника изъ скоростей его частей. Онъ представляетъ себѣ простѣйшій случай двухъ равныхъ тѣлъ, насаженныхъ на твердую, около оси вращающуюся линію въ разныхъ разстояніяхъ отъ точки привѣса и исходнымъ пунктомъ беретъ соображеніе, что скорость такого сложнаго маятника слѣдуетъ искать между тѣми скоростями, какія получили бы отдѣльныя тѣла, еслибъ они качались сами по себѣ, т.-е. еслибъ они не были связаны другъ съ другомъ. Ближайшее къ точкѣ привѣса тѣло, еслибы качалось одно, двигалось бы быстрѣе, а отдаленнѣйшее само по себѣ — медленнѣе, какъ это и должно быть сообразно дѣйствию тяжести на простой маятникъ. Но, въ виду сказанной комбинаціи, тяжесть не можетъ сообщить каждому тѣлу скорости простаго маятника безъ вычета или безъ прибавки. Она не можетъ дѣйствовать на ближайшее тѣло, не дѣйствуя вмѣстѣ съ тѣмъ отсюда и на отдаленнѣйшее. Но на само отдаленнѣйшее тѣло не посредственно дѣйствуетъ она лишь такъ, что сообщаетъ ему скорость, которая сама по себѣ не можетъ согласоваться съ ходомъ ближайшаго тѣла, но противопоставляетъ ему нѣкоторое замедленіе и потому требуетъ восполнительнаго побужденія со стороны ближайшаго тѣла. Такимъ образомъ, побуды тяжести приходятъ въ нѣкотораго рода равновѣсіе, и такую передачу можно бы было разсматривать такъ, какъ будто бы это было балансированіе грузовъ на рычагѣ. Неподвижная точка на оси и оба тѣла на негибкой линіи образовали рычагъ. Скорость, какую приобрѣло бы одно тѣло, не связанное, а качающееся какъ простой маятникъ, испытываетъ, благодаря соединенію съ другимъ, нѣкоторый вычетъ или потерю, а болѣе отдаленное тѣло получаетъ прибавку или выигрышъ. Но потеря и выигрышъ происходятъ отъ того, что на рычагѣ силы приходятъ въ равновѣсіе. Поэтому они должны взаимно уравниваться сообразно отношенію ихъ дѣйствій на рычагѣ, т.-е. сообразно разстояніямъ отъ точки привѣса.

Это разсужденіе было вообще не только правильно, но и въ высшей степени поучительно; тѣмъ не менѣе, ему присуща ложная точка зрѣнія, каковую мы намѣренно прикрыли общностью выраженій: въ самомъ дѣлѣ, здѣсь постоянно имѣются на-лицо накаплиющіяся въ теченіе опредѣленнаго времени скорости, а приэтомъ не можетъ быть и рѣчи о непосредственномъ статическомъ отно-

¹ Яковъ Бернулли, Орега, 2 т. Женева 1744; т. I, § 23, стр. 277 и слѣд. (Также въ Acta Erud. Іюль 1686).

шеніи. То, что здѣсь дѣйствительно приходитъ въ равновѣсіе, это — различно обусловленные элементарные толчки тяжести, но не дальнѣйшіе результаты произвожденія ими скоростей по истеченіи нѣ котораго конечнаго промежутка времени. Въ опредѣляемое рычагомъ статическое отношеніе и равновѣсіе приходятъ собственно не скорости, а движущія силы или, что то же, ихъ мѣры, содержащіяся въ безконечно малыхъ скоростяхъ, которыя ими были бы произведены.

99. Только-что упомянутое смѣшеніе конечныхъ скоростей съ составными частями мгновенныхъ статическихъ отношеній было раскрыто l'Hopital'емъ въ письмѣ ¹ къ Гюйгенсу, причемъ данъ былъ и способъ рѣшенія задачи, въ которомъ допускался и полагался въ основаніе принципъ Якова Бернулли, что силы здѣсь приходятъ въ равновѣсіе какъ на рычагѣ. Но l'Hopital не далъ еще вполнѣ прямого способа, ибо онъ сначала опредѣлялъ между обоими тѣлами центръ качанія, затѣмъ воображалъ, что оба тѣла въ немъ сосредоточены, и наконецъ переходилъ къ третьему тѣлу, дабы между нимъ и уже найденнымъ центромъ опредѣлить новый. Хотя этотъ приемъ и правиленъ, но въ немъ содержится предположеніе, съ одной стороны, не совсѣмъ простое, а съ другой требующее дальнѣйшихъ основаній. Въ самомъ дѣлѣ, строгость вывода не дозволяетъ принимать за очевидное, что для опредѣленія центра качанія всей системы можно, какъ наприм. при нахожденіи центра тяжести, сначала разсматривать два тѣла или двѣ части системы сами по себѣ, а затѣмъ разсматривать ихъ какъ одно тѣло, помѣщающееся въ центрѣ качанія, чтобы затѣмъ эту, такимъ образомъ упрощенную комбинацію, подобнымъ же образомъ трактовать въ отношеніи къ третьему тѣлу или къ третьей части системы. Несмотря на это обстоятельство, не имѣющее впрочемъ первостепеннаго значенія, l'Hopital'евское усовершенствованіе принципа рѣшенія Якова Бернулли, въ сущности, привело дѣло къ концу. Сверхъ того, l'Hopital'евское изложеніе, развертывающееся не на почвѣ общихъ формулъ, а на простыхъ числовыхъ примѣрахъ, по-истинѣ отличалось ясностью. «Примѣчанія» ², присоединенныя самимъ Гюйгенсомъ къ письму l'Hopital'я, предоставленному для опубликованія по усмотрѣнію, доказываютъ только, что, не смотря на признаніе правильности результата, онъ все-таки считалъ эту методику не настолько ясною, какъ свою собственную ссылку на сохраненіе поднимающей силы (*force ascensionelle*). Интересно, впрочемъ, что въ этихъ при-

¹ Помѣщено въ цит. произведеніяхъ Якова Бернулли т. I, § 43 (*Lettre etc.*), стр. 454 и слѣд. (изъ *Histoire des ouvrages des savants*, июнь 1690).

² *Ibid.* § 44, стр. 458 и слѣд. (изъ того же источника и той же даты).

мѣчаніяхъ онъ формулируетъ принципъ сохраненія поднимающей силы и иначе, а именно непосредственно разсматривая суммы, составляющіяся изъ квадратовъ скоростей, какъ сами себѣ равныя. Очевидно, впрочемъ, что своего принципа, относившагося къ конечнымъ величинамъ, онъ не хотѣлъ измѣнить въ пользу заключенія, посредствомъ котораго расчлененіе его основнаго положенія можно было исполнить лишь обращаясь къ безконечно-малымъ, моменту возникновенія принадлежащимъ, скоростямъ и количествамъ движенія. Равнымъ образомъ и представленіе о потерѣ и выигрышѣ при переносѣ толчковъ тяжести сообразно закону рычага казалось ему недостаточно яснымъ.

Около года спустя (въ іюль 1691) Яковъ Бернулли опубликовалъ новое начертаніе своей методы рѣшенія ¹ «изъ сущности рычага», гдѣ онъ обратилъ вниманіе на l'Hopital'евское исправленіе своей ошибки и придавъ рѣшенію такую общность, которая устраняла необходимость ограничиваться совокупностью двухъ тѣлъ. Но лишь долгое время спустя этотъ эскизъ переработанъ былъ въ обширные мемуары, въ которыхъ задача обслѣдована была въ самомъ общемъ видѣ. Эти болѣе обстоятельныя изслѣдованія ² 1703 и 1704 годовъ не ограничиваются тѣлами, насаженными на линію маятника, но имѣютъ въ виду, какъ уже ранѣе поступалъ и Гюйгенсъ, качающееся тѣло произвольной формы, т.-е. вообще колеблющуюся систему. Въ послѣдней статьѣ доказывается особо и (случайное) тождество центра удара съ центромъ качанія. Впрочемъ, эти довольно нетрудныя обобщенія особенно насъ не касаются, такъ какъ главнымъ пунктомъ было введеніе въ динамическую систему статическаго распредѣленія силъ съ точки зрѣнія рычага, и такъ какъ этотъ принципъ, несмотря на ошибки, съ самаго начала клалъ въ основаніе, какъ важнѣйшій фундаментъ, исчисленіе статическихъ выигрыша и потери силы для различныхъ точекъ. Кромѣ этого, нельзя не упомянуть и о томъ, что авторъ здѣсь въ первый разъ прямо, какъ необходимость, вывелъ самый Гюйгенсовъ принципъ, т.-е. равенство поднятія центра тяжести его паденію и даже при изолированномъ поднятіи тѣлъ по прекращеніи связи, дѣйствовавшей при паденіи, и такимъ образомъ прежній постулатъ превратилъ въ доказанную по способамъ механики теорему. Это доказательство уже не представляло особыхъ затрудненій, съ тѣхъ поръ какъ дѣйствіе силъ на рычагъ дало руководящую

¹ Ibid. § 45, Demonstratio centri oscillationis ex natura vectis, стр. 460 и сл. (изъ Acta Erud. Іюль 1691).

² Ibid. Т. II, § 98—100, стр. 930—53 (изъ Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris, за 1703 и 1704).

точку зрѣнія, а l'Hopital началъ разсматривать элементарные побуды тяжести какъ настоящіе предметы статической компенсаціи. Именно, такимъ образомъ имѣлись отношенія силъ для мгновенія, и дѣло сводилось только къ тому, чтобы скопляющееся дѣйствіе этихъ отношеній дознать для нѣкотораго произвольнаго конечнаго времени. Но это было просто дѣломъ вычисленія по образцу обыкновенной схемы силового развитія. Говоря математическимъ языкомъ, оставалось найти интегральную форму дифференціального уравненія движенія, найденнаго посредствомъ принципа статической компенсаціи. Будучи наполовину наглядно-геометрическимъ, рѣшеніе Якова Бернулли, въ сущности, было аналитическимъ, да и вообще лишь на основаніи новаго метода безконечно-малыхъ возможно было Гюйгеновское рѣшеніе, отличавшееся синтетическимъ характеромъ по преимуществу и державшееся конечныхъ отношеній, надлежаще расчленивъ и такимъ образомъ раскрыть какъ бы составные элементы Гюйгеновскаго принципа. Поэтому не удивительно, что именно l'Hopital, т.-е. авторъ трактата «Analyse des infiniment petits», особенно изошрившій свое вниманіе и искусство въ оперированіи надъ безконечно малыми, первый замѣтилъ сказанный промахъ Якова Бернулли и исправилъ подобающимъ способомъ изслѣдованія. Это былъ шагъ чрезвычайно важный, ибо онъ впервые научилъ, каковъ тотъ предметъ, на равновѣсіе котораго слѣдовало обратить вниманіе. Тѣмъ не менѣе, его нельзя и сравнивать съ широтою первоначальной мысли, посредствомъ которой Яковъ Бернулли обыкновенное равновѣсіе на рычагѣ выставилъ какъ такую вещь, которая и въ вопросѣ о развитіи движущихъ силъ должна бы была дать ключъ къ уразумѣнію явленій.

100. Поэтому въ заключеніе мы укажемъ и ту болѣе опредѣленную форму, въ которой Яковъ Бернулли смогъ наконецъ представить себѣ процессъ статической компенсаціи. При этомъ, ради простоты, будемъ держаться двухъ равныхъ тѣлъ, какъ это дѣлалъ и l'Hopital, и даже возьмемъ въ помощь его опредѣленный числовой примѣръ. Болѣе отдаленное тѣло отстояло отъ точки привѣса вчетверо дальше ближайшаго, но находилось на одной съ нимъ сторонѣ. Твердую линію будемъ разсматривать въ опредѣленномъ положеніи, и всего проще, какъ дѣлалъ l'Hopital, въ началѣ движенія. Импульсы тяжести, приведенные къ возможнымъ и одинаковымъ направленіямъ, соотвѣтствующихъ этому положенію, касательныхъ въ данныхъ точкахъ къ ихъ путямъ, сами по себѣ совершенно равны и могутъ поэтому быть приняты за единицу скоростей. Вычетъ, испытываемый этимъ элементарнымъ дѣйствіемъ тяжести на ближайшее тѣло и обусловливаемый задержкою, производимую медленнѣе

движущимся болѣе отдаленнымъ тѣломъ, можно выразить разностью $1-x$, если буквою x обозначить неизвѣстную дѣйствительную скорость, какую тяжесть должна породить въ это мгновеніе, несмотря на сказанное противодѣйствіе, а подъ 1 разумѣть вышеупомянутый полный и лишь что касается направленія редуцированный, выражаемый какъ скорость, импульсъ тяжести. Но эта потеря $1-x$, на разстояніи вчетверо больше, уравнивается выигрышемъ, который можетъ быть только ея четвертью. Поэтому замедленіе на $1-x$ ближайшаго тѣла обозначаетъ лишь ускореніе на $\frac{1-x}{4}$ вчетверо отдаленнѣйшаго тѣла, или, другими словами, обѣ силовыя части $1-x$ и $\frac{1-x}{4}$, которыя нужно вообразать приложенными къ рычагу въ противоположныя стороны, находятся въ равновѣсіи. Потеря и выигрышъ уравниваются какъ на рычагѣ. Если теперь придать выигрышъ болѣе отдаленнаго тѣла къ единицѣ, т.-е. къ скорости, какую оно кромѣ того получаетъ, то сумма $1+\frac{1-x}{4}$ будетъ представлять скорость, какую оно дѣйствительно должно имѣть, если принять въ расчетъ вліяніе другаго тѣла. Соотвѣтствующая скорость другаго тѣла есть x , и обѣ должны находиться въ отношеніи разстояній отъ точки привѣса, т.-е. выраженіе для отдаленнѣйшаго тѣла должно быть въ 4 раза больше, чѣмъ для ближайшаго. Такимъ образомъ, это отношеніе приводитъ къ уравненію $4x=1+\frac{1-x}{4}$, откуда $x=\frac{5}{17}$. Слѣдовательно, если скорость, производимая элементарнымъ побудомъ тяжести, для одного тѣла, принявъ въ расчетъ замедленіе, равна $\frac{5}{17}$, а для другаго, принимая въ расчетъ ускореніе, равна $\frac{20}{17}$, то соотвѣтствующая потеря и выигрышъ сравнительно съ неуменьшеною единицею импульса тяжести, приведеннаго къ этому направленію, равны соотвѣтственно $\frac{12}{17}$ и $\frac{3}{17}$. Эти величины суть результаты въ высшей степени простаго Г'юпітал'еваго примѣра, въ которомъ еще не дается разниа массъ. Равно и способъ представленія о взаимномъ уравнишеніи потери и выигрыша есть тотъ самый, какой составлялъ себѣ Г'юпіталъ на основаніи первой идеи Якова Бернулли. Этотъ примѣръ совершенно наглядно показываетъ, какимъ образомъ изъ двухъ единицъ, существующихъ въ двигательномъ импульсѣ, только $\frac{25}{17}$ выступаютъ какъ дѣйствительныя скорости, тогда какъ недостающія $\frac{9}{17}$, принимая во вниманіе точку привѣса и опоры, должны быть разсматриваемы какъ

бы статически связанными, т.-е. какъ бы въ равновѣсіи находящимся и потому индефферентными для движенія. На дѣлѣ, именно, эти потерянные $\frac{12}{17}$ превратились въ приобретенное дѣйствіе $\frac{3}{17}$ наотдаленнѣйшую точку рычага. Потому о дѣйствительномъ равновѣсіи можетъ быть рѣчь лишь постольку, поскольку потерю и выигрышъ или вычетъ и прибавку въ противоположныхъ направленіяхъ представлять такъ, какъ бы это были дѣйствующія сами по себѣ, особливо приложенныя, силы. Впрочемъ, именно эти $\frac{12}{17}$, вмѣсто того чтобы дѣйствовать на ближайшее тѣло, производить дѣйствіе $= \frac{3}{17}$ въ томъ же смыслѣ на отдаленнѣйшее тѣло.

Чтобы примѣръ l'Hospital'я, взятый нами только ради статическаго способа представленія, не оставлять незаконченнымъ и со стороны главной задачи, замѣтимъ, что какъ скоро опредѣлена элементарная скорость для одной точки въ $\frac{5}{17}$, то нахожденіе разстоянія центра качанія требуетъ лишь простѣйшихъ соображеній. Если извѣстна дѣйствительная элементарная скорость одного тѣла, то извѣстны и скорости всѣхъ точекъ линіи, ибо вся линія движется разомъ и слѣдовательно, при равной угловой скорости, всякая точка должна имѣть большую или меньшую линейную скорость смотря по ея разстоянію. Но центръ качанія есть точка, которой скорость такова, какъ будто бы точка эта была свободно предоставлена редуцированному импульсу тяжести или, другими словами, какъ будто бы она представляла простой маятникъ. Слѣдовательно, въ ней должна проявиться не уменьшенная и не увеличенная единица, съ которой мы начали, говоря объ обоихъ тѣлахъ. Въ ней не можетъ быть никакой потери и никакого выигрыша. Поэтому, въ ней, по нашему примѣру, должны встрѣтить полную $\frac{17}{17}$. Если теперь, ради простоты и симметріи, примемъ длину маятника за 1 и будемъ считать двадцатыми долями, то какъ $\frac{20}{17}$ представляютъ наибольшую скорость, то ясно, что $\frac{17}{20}$ выразятъ разстояніе центра качанія или длину простого маятника, имѣющаго эту скорость. Поэтому, разстоянія трехъ точекъ будутъ соотвѣтственно $\frac{5}{20}$, $\frac{17}{20}$ и $\frac{20}{20}$, тогда какъ соотвѣтствующія скорости будутъ $\frac{5}{17}$, $\frac{17}{17}$ и $\frac{20}{17}$. Отсюда легко видѣть, что разстоянія центра качанія относятся какъ 12:3, т.-е. какъ разъ пропорціональны разностямъ между его скоростью и скоростями обоихъ тѣлъ, или, другими словами, относятся какъ приобретенныя и потерянные части силы. Поэтому, если мы припомнимъ старую,

еще неопредѣленную идею Картезія, по которой центръ ажитаціи есть та точка, относительно которой различныя ажитаціи силъ находятся какъ бы въ равновѣсіи, то не должно забывать, что рѣчь идетъ о совершенно иномъ отношеніи, чѣмъ отношеніе центра тяжести, и что теперь рассматриваемый родъ балансірованія можетъ относиться только къ парціальному равновѣсію въ динамическомъ отношеніи силъ.

101. Трудность представить въ совершенно ясной формѣ полный принципъ рѣшенія Якова Бернулли, а именно приведеніе распредѣленія скоростей къ отношенію на рычагѣ, не укрылась уже и отъ Гюйгенса. Равно и въ позднѣйшее время пробовали разнаго рода варьяціи вводимыхъ здѣсь способовъ представленія вплоть до д'Аламберовскаго принципа, и самъ Яковъ Бернулли всегда стремился сдѣлать открытую имъ точку зрѣнія опредѣленнѣе и яснѣе. Подконецъ онъ напалъ на мысль представлять себѣ, что дѣйствительныя элементарныя скорости или силы слагаются изъ двухъ составныхъ частей, а именно изъ такихъ, какія тѣла приняли бы въ несвязанномъ состояніи, и изъ такихъ, которыя вслѣдствіе связи теряются или приобретаются. Важность этого способа представленія состоитъ въ томъ, что здѣсь вводится дѣйствительное сложеніе или разложеніе силъ, и что слѣдовательно вмѣстѣ съ этимъ указывается направленіе дѣйствія этихъ составныхъ частей вычитаніемъ потерянныхъ или прибавленіемъ приобретенныхъ элементовъ. Эти прибавляемые или вычитаемые элементы должны, какъ таковыя, т.-е. сообразно съ ихъ знаками, образовать въ данномъ сочетаніи всегда истинное и дѣйствительное равновѣсіе. Это—совершенно недвусмысленное выраженіе рассматриваемой статической необходимости парціального равновѣсія, т.-е. равновѣсія, простирающагося на извѣстныя составныя части, опредѣляющихъ движеніе, причинъ. Такъ, въ выше приведенномъ l'Hôpital'евскомъ примѣрѣ не $\frac{12}{17}$ единицы силы по собственному ея направленію уравниваются съ $\frac{3}{17}$ силы, вызванной на другомъ тѣлѣ въ томъ же направленіи, но потеря, т.-е. противоположная сила или противоудѣйствіе въ $\frac{12}{17}$ должно уравниваться выигрышемъ въ $\frac{3}{17}$. Для наглядности можно также представить себѣ, что болѣе удаленное тѣло въ сравненіи съ импульсомъ, какой должно испытать ближайшее, отчасти относительно остается въ покоѣ, т.-е., въ силу своей реакціи по инерціи, движенію на $\frac{3}{17}$ быстрѣйшему противопоставляетъ такое же сопротивленіе. Во всякомъ случаѣ, чтобы перенести на него $\frac{3}{17}$ прибавочной скорости, должно по закону равен-

ства дѣйствія и противодѣйствія смотрѣть на противоположное стремленіе къ сохраненію состоянія движенія какъ на уравновѣшенное. Въ этомъ, какъ мы позднѣе увидимъ, лежитъ основаніе тому, что новыя формулированія дали д'Аламбертову принципу или, другими словами, обобщенному принципу Якова Бернулли, непосредственно такое выраженіе, что въ нихъ на привнесеніе силъ инерціи указывается какъ на средство приведенія всякой движущейся системы къ системѣ равновѣсія.

Впрочемъ, мы будемъ держаться здѣсь только того замѣчанія, что Яковъ Бернулли весьма натурально рассматриваетъ дѣйствительныя движенія или скорости какъ равнодѣйствующія, а силовыя дѣйствія на несвязанныя тѣла, съ одной стороны, и чисто статическія модификаціи, съ другой, какъ слагающія. Это — соотвѣтствующій дѣлу способъ воззрѣнія, ибо силы, еще не находящіяся во взаимодействіи, испытываютъ измѣненіе своего способа дѣйствія отъ противоположныхъ дѣйствій своей статической связи и только такимъ образомъ возникаютъ дѣйствительные элементы скоростей каждаго тѣла. Но, рассматривая предметъ совершенно абстрактно, можно всякое сложеніе силъ исполнить, какъ угодно ихъ комбинируя, и сдѣлать всякую силу равнодѣйствующею двухъ другихъ, если только направленіе дѣйствія одной изъ силъ измѣнить такъ, чтобы имѣть дѣло уже не съ результирующимъ движеніемъ, а съ случаемъ равновѣсія. Для этого послѣдняго случая всякое различіе между слагающею и равнодѣйствующею уже не есть реальное различіе, и основывается лишь на произвольномъ способѣ воззрѣнія. Если поэтому, какъ позднѣе это имѣло мѣсто въ д'Аламбертовскомъ принципѣ, затормозить движеніе системы введеніемъ равнодѣйствующихъ скоростей въ противоположномъ направленіи, то между этими противоположно взятыми силами и рассматриваемыми слагающими силами, которымъ онѣ противоположны, должно быть равновѣсіе. Но въ этомъ случаѣ изъ троякаго класса дѣйствій, именно изъ силъ внѣшнихъ системъ, изъ потерянныхъ и приобрѣтенныхъ силъ и изъ силъ, уничтожающихъ движеніе, можно каждую категорію по произволу заставить играть роль равнодѣйствующей или слагающей. Такимъ образомъ, можно напр. потери и выигрыши рассматривать какъ равнодѣйствующія, являющіяся результатомъ сложенія возможныхъ дѣйствій въ несвязанномъ состояніи съ противоположными дѣйствіями дѣйствительныхъ скоростей. Всматриваясь ближе, замѣчаемъ, что этого рода процедура подразумѣвается въ каждомъ вычисленіи, которымъ должны опредѣляться потерянные и приобрѣтенныя силы. Эту процедуру довольно легко можно усмотрѣть въ приѣмѣ l'Hôpital'я и Бернулли. Такимъ образомъ, позднѣйшіе варианты касаются

только сопутствующаго способа представленія и большей или меньшей степени сознанія объ общемъ методическомъ значеніи такихъ способовъ возрѣнія. Съ этимъ вмѣстѣ мы такимъ образомъ собственно уже достигли той позиціи, когда выступаетъ д'Аламбертовъ принципъ, пока только обозначаясь какъ общее средство, съ помощію котораго динамическія отношенія будутъ трактоваться съ точки зрѣнія дѣйствительнаго равновѣсія и такимъ образомъ искусно приведены будутъ къ разработкѣ по законамъ статики.

102. Въ этомъ мѣстѣ, гдѣ мы имѣемъ предъ собою законъ сохраненія живыхъ силъ, мы не стали бы слѣдить за основаніями его независимости отъ статическихъ отношеній до послѣднихъ розысканій этихъ статическихъ дѣйствій, еслибъ именно эта противоположность простого давленія живой силъ не играла роли при всякомъ принципиальномъ обсужденіи закона сохраненія. Можно даже ожидать, что уже самая форма Гюйгенсовскаго принципа будетъ привлекать вниманіе на эту противоположность. Соединеніе тѣлъ нисколько не измѣняло живой силы. Но въ статическомъ распредѣленіи оказались внѣшнія различія между полною скоростью несвязаннаго состоянія и скоростью соединенія. Нужно было отличать другъ отъ друга оба эти класса отношеній, именно развитіе живой силы и безразличіе привнесенія статическаго распредѣленія импульсовъ.

Кромѣ того, мы имѣли и другое основаніе съ особою подробностью освѣтить законъ сохраненія съ этой стороны. А именно, въ смыслѣ Ивана Бернулли стремились схватить этотъ принципъ съ возможно болѣе общей точки зрѣнія и примѣнять его не только тамъ, гдѣ имѣло мѣсто безразличное привнесеніе простыхъ давленій. Даже тамъ, гдѣ, какъ при ударѣ совершенно упругихъ тѣлъ, примѣшивалось обоюдное внутреннее силовое развитіе, но приводило къ возстановленію прежняго состоянія, совершенно правильно признавали законность принципа сохраненія. Впрочемъ, нѣкоторые писатели и въ числѣ ихъ, какъ мы увидимъ, и Лагранжъ, въ сущности, оставались при ограниченіи этого общаго принципа областью безразличія давленій, на случай же упругаго удара, въ которомъ живая сила до и послѣ раздѣленія тѣлъ одна и та же, смотрѣли какъ на требующее особой мотиваціи исключеніе изъ того правила, что внезапныя измѣненія скорости ведутъ за собою нѣкоторую потерю живой силы. Напротивъ новѣйшая форма механическихъ возрѣній ведетъ къ наибольшему обобщенію принципа сохраненія и приняла такое направленіе, что о всякой потерѣ живой силы должно быть доказано, что она или только кажущаяся и появляется въ нѣкоторомъ, впрочемъ, незамѣтномъ эквивалентѣ, или же что ее

нужно отмѣтить какъ потерю вслѣдствіе статическихъ связей. Если послѣдняя часть этой задачи и оставляетъ желать еще многого, то это все-таки не значитъ, чтобы слѣдовало воздерживаться отъ такого естественнаго обобщенія принципа сохраненія. Не слѣдуетъ также слишкомъ низко цѣнить и упрощеніе, какое это обобщеніе вноситъ въ механическіе способы воззрѣнія и въ соотвѣтствующія исчисленія. Позднѣе мы увидимъ, что Лагранжевское пониманіе этого принципа, и въ своей формѣ и въ предпосылкахъ, содержитъ ограниченія, которыя становятся излишними, какъ скоро съ самаго начала кладется въ основаніе лишь естественно возможное, а не эти недознанныя внезапныя измѣненія скорости. Но прежде, ради полноты, изложеніе приѣма l'Hopital'я и Якова Бернулли мы должны пополнить еще кое-какими примѣчаніями.

103. О тѣхъ препятствіяхъ, съ которыми разработка простыхъ точекъ зрѣнія должна была бороться и послѣ рѣшеній Якова Бернулли и l'Hopital'я, свидѣтельствуетъ и тотъ запутанный и непрямой способъ, какимъ задача о центрѣ качанія трактовалась въ появившемся еще въ 1716 г. общемъ начертаніи механики, именно въ форономіи Германна ¹. Импульсы, имѣющіе мѣсто въ связанномъ состояніи, понимаются тамъ ² какъ эквивалентные (aequipollentes) импульсамъ центральной тяжести и, сообразно этому, разсматриваются какъ замѣщающія потенціи (solicitationes vicariae), а потому, если предположить, что они направлены въ противоположную сторону импульсамъ тяжести, должны давать равновѣсіе. Однако же, изложеніе этого воззрѣнія не достаточно ясно, и потому оно всего менѣе способно дать въ руки всеобщее правило, подобное д'Аламбертовскому принципу. Напротивъ, при этомъ даже не воздается должное простотѣ способа воззрѣній Якова Бернулли и l'Hopital'я, а между тѣмъ въ существѣ дѣла къ исходнымъ пунктамъ ихъ ничего новаго не прибавляется.

Несравненно своеобразнѣе оформленъ способъ рѣшенія Тейлора въ его Methodus incrementorum, съ которымъ почти согласуется и способъ, принятый Иваномъ Бернулли. Тейлоровъ приѣмъ ³ состоялъ въ перенесеніи частицъ тѣла съ измѣненными гипотетическими силами аффекціями, т. е. съ квадратичнымъ отношеніемъ разстояній какъ факторомъ, изъ ихъ мѣста въ одну точку, гдѣ они производили бы дѣйствіе, соотвѣтствующее этому перенесенію и удовлетворяющее предположеніямъ эквивалентнаго простаго маятника. Хотя и должно согласиться съ тѣмъ, что этотъ приѣмъ въ нѣкото-

¹ Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum.

² Ibid. lib. I, cap. 5, стр. 100 и слѣд.

³ Taylor, Methodus incrementorum. London 1715. Propos. 24, стр. 95 и слѣд.

рыхъ второстепенныхъ отношенійхъ имѣтъ большія достоинства, поскольку онъ включаетъ нѣкоторый родъ превращенія силовыхъ моментовъ, отнесенныхъ къ оси вращенія, тѣмъ не менѣе въ главномъ дѣлѣ принципъ Якова Бернулли остается простѣйшимъ и въ концѣ концовъ для всѣхъ случаевъ рѣшающимъ методомъ.

Что касается того обстоятельства, что въ рѣшеніяхъ вопроса о нахожденіи центра качанія, которыя стали возможны благодаря примѣру Гюйгенса, принципъ сохраненія живыхъ силъ болѣе и болѣе отступаетъ на второй планъ, обстоятельство это не должно удивлять насъ. Уже при l'Horital'евскомъ правильномъ примѣненіи статическаго принципа Якова Бернулли идея сохраненія стала излишнею, поскольку именно рѣчь шла лишь о задачѣ нахожденія центра качанія. Въ самомъ дѣлѣ, стоило только привести статически во взаимное другъ къ другу отношеніе просто мгновенные импульсы силъ, и получилось уравненіе, изъ котораго легко опредѣлить положеніе центра качанія, какъ мы это показали на l'Horital'евскомъ примѣрѣ. Такимъ образомъ, теорема сохраненія въ Гюйгенсовской формѣ сдѣлалась производною истиною, и нахожденіе центра качанія уже не лежало болѣе на пути или по ту сторону этого вывода, но ему предшествовало какъ нѣчто теперь совершенно отъ него независимое. Такимъ образомъ, принципъ сохраненія можно было при этой задачѣ совершенно оставить въ сторонѣ, такъ какъ теперь уже научились опредѣлять рѣшающія силовые отношенія въ ихъ дифференціальномъ формѣ, а не искать ихъ на окольномъ пути ихъ интегральнаго вида. Квадраты скоростей и высоты, разсмотрѣніе которыхъ служило исходною точкою для Гюйгенса, представляли эту интегральную форму и потому должны были включать и теорему сохраненія. Но добились большей простоты, и въ рукахъ Якова Бернулли принципъ сохраненія явился уже простымъ слѣдствіемъ изъ основы дифференціальныхъ силовыхъ отношеній, каковыя составлялись для первоначальнаго и мгновеннаго, какъ бы статическаго распорядка.

Еще менѣе, чѣмъ въ Гюйгенсовской формѣ могъ принципъ сохраненія надолго играть существенную роль для задачи о центрѣ качанія въ томъ болѣе общемъ смыслѣ, какой имѣлъ въ виду Иванъ Бернулли, примыкая къ Лейбницевскому способу воззрѣнія. Разъ пришли къ статической комбинаціи динамическихъ силъ, теорема сохраненія, съ своимъ особымъ содержаніемъ, уже не могла оставаться основаніемъ, а становилась просто слѣдствіемъ такого рода механическихъ заключеній. Не тронутый въ той составной части, которая касается лишь производенія силы, связаннаго со всякою силовою затратою, принципъ сохраненія живыхъ силъ въ движу-

шейся системѣ долженъ былъ, поэтому, сдѣлаться особою теоремою, въ которой всего труднѣе было правильно формулировать ея возможные особые предположенія. Сюда присоединялось отвращеніе англичанъ къ Лейбницевскому способу воззрѣнія, какъ это довольно ясно можно видѣть изъ Маклореновскаго труда о флюкціяхъ ¹. Вообще и въ теченіе 18-го столѣтія логическое теченіе преимущественно стремилось къ замѣнѣ антиципаций, выглядѣвшихъ метафизически или сопровождавшихся неясными метафизическими представленіями, къ замѣнѣ ихъ чисто каузальными отношеніями и простыми воззрѣніями, связанными какъ основаніе и слѣдствіе. Что можно было познать какъ дѣйствіе, того не хотѣли выставять въ видѣ особаго принципа и особаго свойства, которое непосредственно мыслилось бы какъ болѣе или менѣе шаткое или даже скрытое качество естественныхъ отношеній. Въ этомъ смыслѣ и принципъ сохраненія живыхъ силъ позднѣе выставленъ былъ кореннымъ образомъ какъ простое слѣдствіе обыкновенныхъ механическихъ аксіомъ и вычисленія.

104. Всего лучше отчеканенное выраженіе этого способа изслѣдованія и вмѣстѣ съ тѣмъ окончательное оправданіе посредствомъ общаго, на возможно отвлеченнѣйшемъ вычисленіи основаннаго, вывода находимъ въ твореніяхъ Лагранжа, а именно прежде всего въ первомъ изданіи его знаменитой Аналитической Механики ², а затѣмъ и въ его Теоріи аналитическихъ функцій ³, которой третій отдѣлъ излагаетъ способъ примѣненія этого исчисленія къ основнымъ понятіямъ и самымъ общимъ теоремамъ механики. Аналитическая Механика, это великое твореніе, и именно ея второе изданіе, должно образовать главный исходный пунктъ для познанія — какая форма дана Лагранжемъ принципу сохраненія живыхъ силъ. При этомъ здѣсь пока еще не мѣсто ближайшему изслѣдованію аналитической общей связи съ тою фундаментальною формулою, къ которой этотъ авторъ приводитъ все содержаніе механики, ибо что-либо подобное можетъ имѣть мѣсто лишь при связномъ изложеніи свойственной Лагранжу аналитической систематики. Напротивъ того, уже здѣсь, въ видахъ пополненія исторіи развитія принципа сохраненія, мы должны привести все то, что въ концепціи этого гениальнаго аналита и его современниковъ бросаетъ какой-либо свѣтъ на болѣе точное формулированіе или на болѣе отвлеченный выводъ сказанной фундаментальной теоремы.

¹ A complete system of fluxions. Edinburg 1742.

² Mécanique analytique. Paris 1788, 2-е изд. въ двухъ томахъ, 1811—15.

³ Théorie des fonctions analytiques, первое изд. 1797, второе 1813.

Уже д'Аламберъ въ предисловіи къ своему трактату динамики ¹ высказался въ томъ смыслѣ, что, желая имѣть дѣло только съ движеніями, а не съ движущими причинами, онъ на этомъ основаніи не будетъ пускаться въ изслѣдованіе спорнаго вопроса о живыхъ силахъ ². Эти споры бесполезны. Впрочемъ, количество движенія, и не только въ случаѣ равновѣсія, могло бы служить мѣрою, если имѣть въ виду «сумму сопротивленій» ³. При этомъ онъ разумѣетъ элементарныя сопротивленія, измѣряющіяся, по его воззрѣнію, количествомъ движенія. Вообще, главнымъ предметомъ спора онъ выставляетъ способъ измѣренія, а не принципъ сохранения. Во всякомъ случаѣ, указаніе на эти элементарныя количества сопротивленія, соотвѣтствующія произвольно малымъ частямъ времени, само по себѣ правильно. Но эти элементарныя дѣйствія слагаются не просто изъ массы и скорости (mv), но существенно содержатъ еще третій факторъ, именно измѣненіе скорости (dv). Произведенію $mv dv$ эквивалентно $m j ds$, гдѣ j означаетъ ускореніе. Элементы работы и то, что ради иной формы выраженія можно было бы назвать элементами живой силы, должно быть мыслимо какъ нѣчто совершенно однородное съ цѣлымъ, которое должно изъ нихъ составиться, и потому д'Аламберъ въ своемъ способѣ представленія дался въ обманъ той самой двусмысленной Лейбницевской метафизикѣ, которую онъ вполне справедливо желалъ видѣть устраненною.

105. Лагранжева концепція, какъ уже раньше сказано, повсюду выставляетъ принципъ сохранения живыхъ силъ главною теоремою механики, необходимо вытекающею изъ другихъ аксіомъ, какъ результатъ простаго вычисленія. Въ основаніи этого вывода лежитъ прежде всего также производное аналитическое выраженіе силовыхъ отношеній въ формѣ, какую они имѣютъ для частицы времени, — слѣдовательно, въ дифференціальной формѣ. Переходъ отъ этого соотношенія къ уравненію живыхъ силъ совершается посредствомъ интеграціи, вслѣдствіе чего квадраты скоростей выступаютъ факторами массъ.

Основное предположеніе состоитъ прежде всего въ томъ, что въ условныхъ уравненіяхъ, коими опредѣляется распорядокъ системы, время не входитъ. Кстати замѣтить, такъ всегда и будетъ, какъ скоро внутреннія силы между частями системы просто суть давленія и потому нѣтъ взаимнаго перемѣщенія частей. Можно вообра-

¹ Traité de dynamique. Paris 1743.

² Ibid. стр. XVI.

³ Ibid. стр. XX.

жать себѣ при этомъ, напр., сложный маятникъ. Въ подобномъ случаѣ, вмѣсто виртуальныхъ, т.-е. возможныхъ перемѣщеній, можно подставить перемѣщенія, пробѣгаемые при дѣйствительномъ движеніи.

Если теперь, какъ дѣлаетъ Лагранжъ, первоначальнымъ исходнымъ пунктомъ взять уравненіе, посредствомъ котораго принципъ виртуальныхъ скоростей выражается въ формѣ, допускаемой д'Аламбертовымъ приѣмомъ для движущейся системы, то оно будетъ представлять ничто иное какъ равную нулю сумму членовъ, которые всѣ сходны въ томъ, что оба ихъ фактора суть: одинъ—выраженіе для силы, другой—для сопринадлежащаго виртуального перемѣщенія, которое для точки или тѣла можно взять произвольнымъ. Итакъ, то, что здѣсь должно взаимно уничтожаться, обращаясь въ нуль, все это—моменты въ Лагранжевскомъ смыслѣ этого слова. Силы, противопоставляемыя здѣсь предполагаемымъ движеніямъ системы, дабы уничтожить эти движенія, сами суть ничто иное какъ воображаемыя причины введенныхъ противоположныхъ движеній и потому должны выражаться вторыми производными пространства по времени. Последнее—обычная форма выраженія ускоренія или, если присоединить и массы,—движущей силы. Движущія силы въ той или другой формѣ, т.-е. въ формѣ ли данныхъ величинъ или дифференціальныхъ функций,—слѣдовательно, при всѣхъ обстоятельствахъ,—движущія силы и суть то, что вмѣстѣ съ виртуальными перемѣщеніями или, говоря аналитически, съ возможными варьяціями ихъ точекъ приложенія (приведенными къ направленію силъ), даютъ такія произведенія, коихъ сумма, приравненная нулю, заключаетъ въ себѣ всѣ отношенія движенія и равновѣсія.

Чтобы дать себѣ отчетъ о приѣмѣ, посредствомъ котораго вышеуказанное основное уравненіе въ случаѣ предполагаемой интеграціи ведетъ къ теоремѣ о живыхъ силахъ и объ ихъ сохраненіи, нужно только принять въ соображеніе форму и значеніе какого-либо одного произвольно взятаго члена, содержащаго производную. Какъ уже сказано, онъ долженъ, при вышеприведенномъ предположеніи, содержать факторомъ пространство, дѣйствительноходимое въ элементъ времени. Поэтому, если вообразить только проекцію на одну изъ осей координатъ,—проекцію, форма которой будетъ та же и для другихъ осей, или, если вообще заняться на первый разъ совершенно общимъ представленіемъ подобнаго произведенія въ отношеніи къ произвольной линіи движенія, то мы будемъ имѣть дѣло съ величиною вида $\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx$, само собою разумѣется, умноженной на массу. Вмѣстѣ съ тѣмъ, слѣдуетъ при этомъ

замѣтить, что выраженіе $m \frac{d^2x}{dt^2} dx$, согласно съ новыми понятіями, представляетъ элементарную работу, такъ какъ предполагается, что dx есть путь, пробѣгаемый подѣ дѣйствіемъ силы для преодоленія равнаго и противоположнаго сопротивленія (каковымъ можетъ быть и простая реакція инерціи). Интеграція этого выраженія даетъ $\frac{1}{2} m \frac{dx^2}{dt^2}$, а какъ $\frac{dx}{dt}$ представляетъ скорость, которую можно обозначить буквою v , то для интеграла члена, выражающаго произведеніе движущей силы на элементарный путь, получается извѣстная формула $\frac{1}{2} mv^2$.

106. Въ общемъ Лагранжевомъ уравненіи динамики, дальнѣйшимъ обоснованіемъ котораго мы займемся впослѣдствіи, предлагаются двоякаго рода слагаемые. Одинъ родъ ихъ обнимаетъ силы противодѣйствія дѣйствительнымъ движеніямъ и имѣетъ выше указанную форму; другой родъ обнимаетъ данныя силы и, если отвлечься отъ ихъ обозначенія въ формѣ вторыхъ, производныхъ, въ чемъ здѣсь нѣтъ нужды, оказывается вполне однороднымъ съ первымъ классомъ. Поэтому, оба рода нужно различать только для того, чтобы можно было пользоваться выраженіями, соотвѣтствующими тѣмъ или инымъ движеніямъ, для опредѣленія этихъ движеній. Одинъ классъ эквивалентенъ другому, т.-е. суммы виртуальныхъ моментовъ силъ, находящіяся въ обѣихъ частяхъ уравненія, равны между собою, а обѣ вмѣстѣ должны соотвѣтствовать равновѣсію, т.-е. уничтожаясь взаимно, давать нуль. Собственно, если слѣдовать исходнымъ пунктамъ Лагранжа, то факторами каждаго члена должны бы быть не виртуальныя пространства, а виртуальныя скорости. Но эти пространства пропорціональны скоростямъ или, выражаясь иначе, можно вездѣ откинуть знаменателя dt , такъ что виртуальныя пути, которые были бы пройдены въ элементъ времени, пропорціонально замѣщаютъ скорости. Сами по себѣ они представляютъ лишь пути и такимъ образомъ соотвѣтственные члены представляютъ виртуальныя работы; однако, эта точка зрѣнія еще чужда Лагранжевой концепціи. Все-таки, уже и здѣсь она важна для истолкованія пріема; ибо возможность выше обозначенной формы результатовъ вычисленія основывается исключительно на томъ фундаментальномъ фактѣ, что интеграломъ произведенія $dx d^2x$ служитъ $\frac{1}{2} dx^2$. Критика должна еще обратить особенное вниманіе на то, что вслѣдствіе этого въ дифференціальной формѣ основного уравненія статики элементарныя работы силъ уже напередъ даны въ своихъ соотношеніяхъ, и что поэтому указанный вы-

водъ просто опредѣляетъ конечную форму, посредствомъ которой работы силъ связываются съ эквивалентными имъ выраженіями посредствомъ квадратовъ скоростей.

Интеграція выраженій вышеобозначенной формы даетъ сумму живыхъ силъ, соотвѣствующихъ дѣйствительнымъ движеніямъ всѣхъ тѣлъ или точекъ системы подъ вліяніемъ связей. Если теперь данныя силы, въ предположеніи несвязаннаго ихъ дѣйствія, т.-е. сумму ихъ виртуальныхъ моментовъ, разсматривать какъ дифференціалъ нѣкоторой функціи, то можно представить себѣ, что интеграція совершается надъ всею динамическою основною формулою. Суммы живыхъ силъ и эта функція, отнесенныя ко всѣмъ тѣламъ, равны въ такомъ случаѣ постоянному интеграции, и такимъ образомъ получается уравненіе живыхъ силъ и ихъ сохраненіе. Нужно только перевести эти отношенія на языкъ обыкновенныхъ понятій, и мы прочтемъ въ нихъ законъ сохраненія. Для всякаго мгновенія, для каковаго ни взята сумма живыхъ силъ, она будетъ имѣть одно и то же значеніе, положить ли въ основаніе дѣйствительное движеніе системы для этого мгновенія, или отправляться отъ того движенія, какое тѣла приняли бы въ несвязанномъ состояніи, еслибъ они двигались подъ вліяніемъ свободныхъ силъ каждое по той же линіи. Въ разсматриваемой формулѣ Лагранжа одинъ классъ членовъ представляетъ сумму живыхъ силъ при дѣйствительномъ движеніи, тогда какъ интегральная функція, относящаяся къ другому классу членовъ, вмѣстѣ съ постоянною выражаетъ соотвѣтственное значеніе во второй части. Этимъ указывается вмѣстѣ съ тѣмъ другой родъ сохраненія, которое можно бы было назвать періодическимъ; ибо если функція не однажды принимаетъ то же самое значеніе, наприм. становится нулемъ, то соотвѣтственно этому и сумма живыхъ силъ получаетъ то же самое значеніе. Примѣромъ могутъ служить симметрическія положенія сложнаго маятника. Въ сущности оба рода сохраненія ничѣмъ не различаются. Одинъ относится къ противоположности связаннаго и несвязаннаго силового дѣйствія; другой ограничивается безъ этой противоположности сравненіями прямого и обратнаго дѣйствій или, если взять наглядный примѣръ, просто паденія и поднятія.

107. Два Лагранжевскія особыя предположенія, при которыхъ принципъ живыхъ силъ доказывается какъ главное положеніе механики и, какъ свидѣтельствуетъ уже заголовокъ соотвѣтствующаго параграфа, возводится на степень общаго «свойства» движенія, оба

эти предположенія должны быть отгѣнены еще разъ. Впервыхъ, условныя уравненія должны быть независимы отъ измѣненія времени. Въ вторыхъ, сумма виртуальныхъ моментовъ (работъ) свободныхъ силъ должна имѣть интеграль. Последнее же предположеніе, какъ прямо прибавляетъ Лагранжъ, всегда будетъ выполнено, какъ скоро силы дѣйствуютъ изъ неподвижныхъ центровъ въ зависимости отъ разстояній, или когда онѣ, дѣйствуя такимъ образомъ, исходятъ отъ тѣлъ, принадлежащихъ самой системѣ. Такимъ образомъ, это условіе удовлетворяется взаимными притяженіями, и вообще это требованіе удовлетворяется способомъ дѣйствія силъ природы. Мы не знаемъ такой силы, величина которой не измѣнялась бы съ перемѣною мѣста и не опредѣлялась бы такою перемѣною и потому прямо или косвенно не зависѣла бы отъ положенія сопоставляемыхъ массъ въ пространствѣ. Тѣмъ не менѣе, это предположеніе должно быть ограниченіемъ, и на дѣлѣ оно и есть таково уже постольку, поскольку рассматриваемую систему произвольно ограничиваютъ и потому оперируютъ не такъ, какъ природа, всегда съ внутренними силами, но съ внѣшними, совокупное дѣйствіе которыхъ не во всякомъ отношеніи нуждается въ оцѣнкѣ.

Если обратимся къ сравненію изложенія Лагранжа въ его Аналитической Механикѣ съ изложеніемъ, которое онъ далъ въ своей теоріи функций ¹, то опять найдемъ аналитическій выводъ для случая взаимнаго силового дѣйствія какъ функціи разстоянія, слѣдовательно для случая притяженій и отталкиваній, имѣющихъ мѣсто между тѣлами самой системы и уменьшающихъ или увеличивающихъ ихъ разстоянія другъ отъ друга. Въ теоріи функций мы встрѣчаемъ и попытку новаго выраженія противоположности между мертвыми и живыми силами, имѣющаго то преимущество, что оно сразу примѣнимо къ статическому и мгновенному отношенію движущихъ агенцій и не предполагаетъ еще ихъ развитія.

А именно, Лагранжъ различаетъ ² активныя и пассивныя силы. Подъ именемъ пассивныхъ онъ разумѣетъ такія силы, посредствомъ которыхъ сохраняется взаимное положеніе тѣлъ, и, слѣдовательно, эти силы представляютъ сопротивленія перемѣщеніямъ. При этомъ онъ прямо имѣетъ въ виду давленія и натяженія. Напротивъ, активными онъ называетъ силы, когда онѣ производятъ взаимныя перемѣщенія тѣлъ, слѣдовательно, напр., притяженія или такія дѣйствія, какія обнаруживаются пружинами, если ихъ помѣстить между тѣлами. Существенный признакъ активныхъ силъ есть произ-

¹ Théorie des fonctions. 2-е изд. 1813, третій отд., гл. 7.

² Ibid., чл. 42.

вожденіе перемѣшеній тѣлъ или частицъ. Слѣдовательно, этотъ именно признакъ и есть обстоятельство, о которомъ мы прежде всего мыслимъ и при нашемъ новомъ понятіи о работѣ. Слѣдовательно, активныя силы Лагранжа суть силы, совершающія работу. Систему, въ которой взаимное положеніе тѣлъ не измѣняется, какъ, напр., въ случаѣ сложнаго маятника, можно разсматривать въ связи съ исходными пунктами внѣшнихъ силъ, слѣд. здѣсь—тяжести, а въ такомъ случаѣ каждое движеніе будетъ представляться какъ перемѣшеніе, имѣющее мѣсто между тѣлами болѣе обширной системы. Нужно только отыскать центръ силъ, отъ которыхъ здѣсь происходитъ дѣйствіе, и тогда въ разработкѣ этого способа возрѣнія не представится никакихъ затрудненій.

Въ виду вышеприведеннаго различенія силъ, Лагранжъ устанавливаетъ и теорему, что живая сила системы всегда имѣетъ источникомъ активныя силы, и что пассивныя силы нисколько ее не измѣняютъ. Поэтому, если вообразить, что эти пассивныя силы устранены, то тѣла, свободно двигаясь между тѣми же самыми точками по произвольнымъ линіямъ, развивали бы ту же живую силу, какъ и тогда, когда-бъ они подчинены были сказаннымъ пассивнымъ силамъ. Это формулированіе не нуждается ни въ какомъ разъясненіи; ибо оно есть лишь точное выраженіе вышеприведеннаго перваго предварительнаго условія принципа.

108. Ударъ есть тотъ примѣръ или лучше тотъ типъ силоваго дѣйствія, въ которомъ сталкиваются правило и кажущееся исключеніе изъ закона сохраненія. Сравнительно малый промежутокъ времени взаимнаго дѣйствія еще не даетъ основанія къ исключенію этого класса взаимодѣйствія силъ изъ общаго закона иныхъ взаимныхъ реакцій, каковыя имѣютъ напр. мѣсто въ формѣ притяженій или отталкиваній на разстояніи, т.-е. безъ непосредственнаго прикосновенія. Во всякомъ случаѣ, въ ударѣ слѣдуетъ признать въ нѣкоторомъ родѣ разрывъ непрерывности взаимнаго отношенія; ибо разъ наступаетъ прикосновеніе, то наступаетъ и новый родъ отношеній, снова прекращающихся по отдѣленіи тѣлъ другъ отъ друга. Если съ этимъ сравнить отношеніе въ случаѣ притяженія, то здѣсь мы не найдемъ ни одного мгновенія, когда бы этотъ общій родъ взаимодѣйствія испытывалъ какую либо перемѣну. И, несмотря на это, различіе обоихъ случаевъ несущественно. А именно, съ одной стороны можно это до-удара и послѣ-удара разсматривать какъ начальный и конечный пункты отношенія, имѣющаго мѣсто во время прикосновенія, а въ такомъ разѣ нѣтъ никакого разрыва, а просто цѣльное ограниченное дѣйствіе. Съ другой стороны, подобное ограниченіе можно представить себѣ и въ случаѣ притяженія,

если его активному развитію дать начаться лишь по удаленіи преграды, посредствомъ которой до этого поддерживалось чисто статическое равновѣсіе, и если сверхъ того принять въ соображеніе, что весьма натуральный случай перерыва простого притягательнаго дѣйствія чрезъ прикосновеніе тѣлъ и слѣдовательно путемъ окончательнаго ихъ соединенія можетъ послѣдовать, сопровождаясь даже ударомъ. Поэтому всѣ взаимныя силовыя дѣйствія активнаго рода должны быть мыслимы съ точки зрѣнія возможности двоякой ихъ формы. Или эта активность развивается на разстояніи, и примѣсь такъ сказать статическихъ отношеній основывается здѣсь на антагонизмѣ различной величины движущихъ силъ безъ сопротивленія чрезъ прикосновеніе массъ; или же активность развивается при наличности препятствій, противопоставляемыхъ тѣлами другъ другу при соприкосновеніи, и въ такомъ случаѣ примѣшиваются статическія отношенія другаго рода, такъ какъ наступаетъ игра новыхъ силъ, обусловливаемыхъ строеніемъ тѣлъ.

Послѣдній случай, натурально, имѣетъ мѣсто и тогда, когда тѣла дѣйствуютъ другъ на друга, не соприкасаясь непосредственно, но чрезъ посредство нѣкоторой системы, слѣдовательно въ самомъ общемъ смыслѣ слова чрезъ посредство машинъ. Но посредствомъ такого рода вставокъ можно удару дать такую форму, чтобы его малая продолжительность въ отношеніи къ скоростямъ тѣлъ уже не являла бы собою особаго признака. Представимъ себѣ, напр., что между тѣлами, которыя иначе сталкивались бы непосредственно, вставлена относительно длинная, но легко уступающая винтообразная пружина, то ея сжатіе и растяженіе будутъ такимъ процессомъ, который уже никакъ нельзя назвать внезапнымъ. Вообще, при правильномъ выборѣ отношеній между величинами легко восполнить пропасть между обыкновеннымъ видимымъ ударомъ и другими динамическими процессами. Если поэтому Лагранжъ на внезапныя измѣненія скоростей въ системѣ смотритъ какъ на исключительные случаи, въ которыхъ принципъ сохраненія уже не имѣетъ мѣста, то эти исключенія и потеря живой силы въ извѣстномъ смыслѣ мотивируются собственно не этою внезапностью, а фактомъ измѣненій скорости, для которыхъ, повидимому, нельзя указать никакого соотвѣтствующаго возмѣщенія. При ударѣ совершенно упругихъ тѣлъ, по Лагранжу, сохраненіе живой силы должно имѣть мѣсто только потому, что здѣсь можно сдѣлать предположеніе, что развившіяся упругія силы, достигающія при наибольшемъ сплюсненіи максимальнаго значенія, съ этого момента начинаютъ уменьшаться и обращаются въ нуль¹. Это возстановленіе прежняго

¹ Мéc. anal. т. I. (1811). Динамика, Sect. III, Art. 36.

состоянія одно только и должно быть фактическимъ основаніемъ тому, почему теорема сохраненія можетъ быть примѣняема при сравненіи состояній до и послѣ удара. Аналитическое изложеніе этого пункта въ теоріи функцій ¹ еще обстоятельнѣе, чѣмъ въ главномъ произведеніи. Въ обоихъ упомянутыхъ мѣстахъ находится также выводъ и теоремы Карно объ опредѣленіи потери живой силы при ударѣ неупругихъ тѣлъ. Эта потеря соотвѣтствуетъ измѣненіямъ скорости или, какъ обыкновенно говорятъ, потеряннѣмъ (и приобрѣтѣннымъ) скоростямъ. Ее всего проще видѣть въ случаѣ совершенно неупругихъ тѣлъ, но принципъ ея опредѣленія не связанъ исключительно съ этимъ спеціальнымъ случаемъ, а имѣетъ силу при всякомъ дефектѣ совершенной упругости, т. е. при всякомъ отсутствіи полного возстановленія прежней формы. Поэтому необходимо ближе изслѣдовать теорему Карно въ томъ смыслѣ, какой ей придавалъ ея виновникъ, особенно въ виду того, что Карно много трудился надъ общими принципами механики.

109. Весьма просто смотрятъ на дѣло, относя фактическую убыль живой силы къ тѣмъ частямъ скоростей, которымъ поставлены преграды, не позволяющія имъ сколько-нибудь способствовать разсматриваемому дѣйствию въ смѣслѣ активнаго силоваго развитія. Эти части скоростей будутъ представлять сохраняющіяся и не восполняемыя измѣненія скоростей. Измѣненія, происходящія отъ простаго переноса, натурально, здѣсь не имѣются въ виду; скорѣе, вопросъ идетъ здѣсь лишь о тѣхъ измѣненіяхъ, которыя включаютъ уничтоженіе до нуля тѣхъ скоростей, которыя иначе производили бы свое дѣйствіе. Въ своей небольшой книгѣ, которую онъ сперва издалъ подъ заглавіемъ: «Essai sur les machines en général», а во второмъ изданіи далъ характерное заглавіе «Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement» (Paris 1803) Карно не только развиваетъ различные основные принципы механики, но иногда приходитъ и къ оригинальнымъ предложеніямъ. Въ числѣ послѣднихъ, его теорема о потерѣ живой силы при ударѣ нашла всеобщее признаніе, такъ какъ эта теорема даетъ въ руки простую форму представлять и выражать разсматриваемую потерю. Въ приведенномъ сочиненіи ² онъ формулируетъ ее такъ: При ударѣ твердыхъ тѣлъ сумма живыхъ силъ до удара равна ихъ суммѣ послѣ удара плюсъ сумма, которая имѣла бы мѣсто для отдѣльныхъ тѣлъ, еслибъ они двигались свободно и притомъ каждое просто съ потерянную скоростью.

Эту Карнотовскую теорему, выражающую, что скорости, став-

¹ Théorie des fonctions (1813), 3-е отд., гл. 7, чл. 44.

² Principes fondamentaux etc. Art. 175, стр. 145.

шія недѣятельными, даютъ въ предположеніи, что они дѣятельны, живую силу, которая, по предположенію, подлежала бы развитію, но не была развита и, слѣдовательно, была потеряна,—эту теорему Карно, относя ее къ тому, что виновникъ ея, слѣдуя старой терминологіи, называетъ твердыми тѣлами и что мы обозначаемъ какъ случай полного отсутствія упругости, весьма легко истолковать и аналитически, какъ это обстоятельно и сдѣлалъ Лагранжъ въ вышеприведенныхъ мѣстахъ. Впрочемъ, насъ касается болѣе самый руководящій способъ представленія. Рациональная механика, чтобы въ чистотѣ сохранить послѣдовательность своихъ заключеній, не должна допускать ничѣмъ не мотивированнаго исчезновенія силъ и скоростей. Но если въ частномъ случаѣ она предполагаетъ подобное исчезновеніе извѣстнаго рода дѣйствія, дѣйствія, каковымъ ограничивается эмпирическое наблюденіе и должно ограничиваться вычисляющее изслѣдованіе,—если, слѣдовательно, она допускаетъ, что нѣкоторую причину, которая должна бы была произвести какое-либо измѣненіе движенія, слѣдуетъ разсматривать безъ этого дѣйствія, какъ бы неизвѣстнымъ образомъ устраненною, то она должна помнить, что съ ея рационально строящейся точки зрѣнія такое допущеніе произвольно и случайно, что опытъ могъ дать къ нему фактическій поводъ, но что оно никоимъ образомъ не можетъ нанести ущербъ непрерывности чисто-рациональныхъ дедукцій, какъ таковыхъ. Допущеніе нѣ котораго невыясненнаго эмпирическаго факта въ разсужденія и въ вычисленія, слѣдовательно констатированіе потери живой силы никакъ не можетъ обосновать дѣйствительнаго исключенія изъ закона сохраненія, а только кажущееся. На дѣлѣ, именно теорема Карно служитъ хорошимъ указателемъ того общаго способа представленія, что живая сила, принципиально, сохраняется, и что всякой кажущейся потерѣ ея соответствуетъ сумма, элементы которой представляютъ какъ разъ тѣ живыя силы, которыя должны были возникнуть гдѣ-либо иначе и только не имѣются на-лицо въ тѣхъ рамкахъ, внутри коихъ наблюденіе обращено на самыя тѣла. Но переходъ въ иное мѣсто или превращеніе еще не есть безусловная потеря, но лишь потеря въ отношеніи къ опредѣленному роду дѣйствія. Если обратиться къ крайнему случаю, то совершенно неупругія тѣла имѣютъ послѣ удара общую скорость, которую они пріобрѣтаютъ, уравнивши разность своихъ скоростей. Скорость одного уменьшится, скорость другого увеличится. И то и другое можетъ имѣть мѣсто только посредствомъ силового развитія или, какъ мы теперь говоримъ, посредствомъ работы. Въ случаѣ совершенной упругости это увеличеніе и это уменьшеніе повело бы за собою соотвѣтствующія реакціи (или

работы), которая взаимнымъ процессомъ снова уничтожили бы эти измѣненія живой силы. Тамъ же, гдѣ такихъ реакцій не наступаетъ, т.-е. гдѣ, какъ въ нашемъ случаѣ неупругаго удара, не происходитъ никакого расширенія сдвинутыхъ частицъ, тамъ скорость, какую тѣла имѣютъ послѣ удара, не можетъ дать первоначальной живой силы. Тутъ долженъ быть недочетъ именно тѣхъ частей, которые соотвѣтствуютъ обоимъ измѣненіямъ скоростей. Слѣдовательно, если представить себѣ, что одному тѣлу сообщена соотвѣтствующая потерянная скорость, а другому — приобретенная, представивъ такимъ образомъ и восполнивъ недостающія упругія реакціи, то живая сила такой гипотетической системы будетъ именно такова, какой не замѣчается въ состояніи послѣ удара и каковую нужно, слѣдовательно, прибавить, чтобы можно было установить равенство живыхъ силъ для состояній до и послѣ удара. Таковъ смыслъ теоремы Карно, и это вмѣстѣ съ тѣмъ значитъ, что истраченные въ неизвѣстномъ направленіи живыя силы также нужно принимать въ расчетъ, если хотимъ, чтобы уравненіе выражало принципъ сохраненія со всею строгостью и во всей его неограниченной широтѣ. О каждой части живой силы долженъ быть данъ отчетъ, и каждой потерѣ ея въ одномъ направленіи должно соотвѣтствовать существованіе эквивалента въ другомъ направленіи. Введя соотвѣтствующія потерянныя скорости живыя силы какъ члены въ уравненіе, которымъ выражается сохраненіе, Карно далъ тѣлу такой оборотъ, который нуждался только въ небольшомъ дополненіи, чтобы и въ самомъ способѣ представленія отвѣчать современнымъ требованіямъ. А именно, говоря о потерянныхъ живыхъ силахъ, должно разумѣть совокупность тѣхъ дѣйствій, которыя какъ бы вышли изъ предѣловъ системы или, по крайней мѣрѣ, не участвуютъ въ произведеніи общей скорости массъ, а лишь въ произведеніи перемѣшеній частицъ, колебаній и т. п. Внутренняя послѣдовательность принциповъ при этомъ вполне сохраняетъ свои права, поскольку лишь необходимо принимать въ соображеніе эти побочныя дѣйствія посредствомъ символическихъ прибавокъ. А такимъ образомъ уясняются и естественные факты, причемъ получается возможность приведенія ихъ къ формѣ, доступной вычисленію, ибо въ случаѣ естественныхъ тѣлъ, являющихъ нѣкоторый смѣшанный характеръ между идеальными крайностями абсолютной упругости и полного ея отсутствія, величина недочета до совершенной упругости даетъ мѣру для опредѣленія, какое количество живой силы въ главномъ дѣйствіи послѣ удара можетъ проявляться не какъ массовая сила. Поэтому сказанная потеря должна быть представляема какъ молекулярное дѣйствіе, въ противотолож-

ность движенію цѣльныхъ массъ. Какъ бы то ни было, во всякомъ случаѣ ее слѣдуетъ представлять какъ нѣкоторое, хотя и неизвѣстное, дѣйствіе.

Карно, смотрѣвшій, подобно Даламберу, на пререканія объ оцѣнкѣ живыхъ силъ, просто какъ на споръ о словахъ¹, и сверхъ того державшійся преимущественно Лагранжевскаго способа воззрѣнія, разумѣется, не достигъ со своею теоремою признанія принципа сохраненія во всемъ его значеніи; но своимъ опредѣленіемъ формы, въ которой можно выразить потерю живой силы, очевидно, хотя и не имѣя этого въ виду, устранилъ препятствія, стоявшія на пути совершенно общему представленію принципа сохраненія. Поэтому въ историческомъ развитіи мы вмѣстѣ съ этою теоремою достигли того пункта, гдѣ дальнѣйшая разработка принципа сохраненія того же количества дѣйствія зависитъ уже только отъ выработки положительныхъ представленій о томъ, куда дѣваются различныя составныя части силы. Но указаніе на это будетъ положительнымъ образомъ дано лишь около середины 19-го столѣтія.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Характеристичныя главныя теоремы динамики въ роли принциповъ.

110. Кромѣ теоремы о живыхъ силахъ, въ теперешнихъ начертаніяхъ динамики обыкновенно выставляютъ еще нѣкоторыя общія свойства движенія, разработанныя въ періодъ отъ Ньютона до Лагранжа въ видѣ особыхъ характеристичныхъ началъ, коихъ пониманіе или изложеніе также не разъ давало поводъ къ подобнымъ же пререканіямъ, какъ и оцѣнка живыхъ силъ. Въ этомъ послѣднемъ отношеніи особенно выдавался принципъ наименьшаго дѣйствія благодаря тому, что вначалѣ пониманіе его носило метафизическій характеръ, да еще и нынѣ отличается неопредѣленностью и измѣнчивостью мыслей, связываемыхъ съ его именемъ. Если присоединить сюда и всѣ общія и принципиальныя представленія о максимальныхъ и минимальныхъ значеніяхъ силовыхъ суммъ и силовыхъ функцій, относящіяся къ движенію и къ равновѣсію, то мы очутимся хотя и въ принципиально весьма интересной, но въ далеко еще не вполне упорядоченной области. Чтобы представить принципъ наименьшаго дѣйствія въ различныхъ его формахъ и въ связи съ другими нача-

¹ Carnot, *Principes fondamentaux etc.* Art. 57, стр. 37.

лами, мы должны обозрѣть всю группу общихъ максимальныхъ и минимальныхъ свойствъ силовыхъ комбинацій.

Три остальные главные теоремы касаются движенія центра тяжести, алгебраической суммы взятыхъ по опредѣленному направленію количествъ движенія и сохраненія площадей. За исключеніемъ послѣдняго принципа, здѣсь уже нѣтъ никакихъ сомнѣній касательно болѣе узкаго или болѣе широкаго пониманія; сравнительно мало примѣнено здѣсь и метафизическихъ точекъ зрѣнія, и окончательнымъ главнымъ вопросомъ остается только вопросъ, насколько эти характеристичныя теоремы вмѣстѣ съ теоремою о сохраненіи живыхъ силъ способны выразить главные отношенія для движенія системы и представить въ этомъ отношеніи систематически связанную группу основныхъ свойствъ движенія произвольныхъ комбинацій тѣлъ. Потому плодотворнѣйшая точка зрѣнія при изслѣдованіи этихъ теоремъ будетъ та, которая имѣетъ въ виду главное содержаніе всей динамики. Если присоединить и д'Аламбертовъ принципъ, дающій правило для примѣненія законовъ статики въ области динамики, то окажется, что съ приведенными доселѣ принципіальными главными воззрѣніями этого періода динамика, въ существенныхъ своихъ развѣтвленіяхъ, была создана и вмѣстѣ съ тѣмъ приведена въ ясность. Указывая на эту область, въ извѣстномъ смыслѣ замыкающуюся систематикою Лагранжа, мы вмѣстѣ съ тѣмъ обозначаемъ и внутреннее сродство, существующее между воззрѣніями, выступающими въ исторической послѣдовательности и отчасти, повидимому, какъ бы случайно.

Всего скорѣе мы должны покончить съ тѣми принципами, относительно которыхъ не было никакихъ особенныхъ поводовъ ни къ неправильному ихъ пониманію, ни къ разнороднымъ обоснованіямъ. Сюда относится прежде всего простая теорема о движеніи, или, какъ еще говорятъ, о сохраненіи движенія центра тяжести; основаніе ея находимъ еще у Ньютона, а первый ея зародышъ слѣдуетъ даже искать собственно въ галилеевскихъ начаткахъ динамики.

III. Такъ какъ движущееся тѣло каждую свою точкой описываетъ не одинаковые пути, ибо вмѣстѣ съ поступательнымъ движеніемъ можетъ подлежать изслѣдованію и какое угодно вращательное, и даже между движеніями отдѣльныхъ точекъ всегда должна существовать извѣстная разница, то уже издавна стали отвлекаться отъ этого различія вмѣстѣ движущихся частей и, какъ скоро не было нужды въ болѣе точномъ различеніи, рассматривали тѣла какъ точки. Но чтобы этому способу изслѣдованія сообщить точную форму, то должно въ самомъ дѣлѣ указать въ тѣлѣ такую точку, для которой были бы безразличны эти второстепенныя и

внутренно относительныя движенія частей и которая имѣла бы свойство, что вся масса тѣла была бы въ ней какъ бы математически-пунктуально сконцентрирована и всѣ силы, дѣйствующія на различныя части тѣла, были бы параллельно самимъ себѣ въ нее или, лучше, въ эту сконцентрированную массу перенесены. Это перенесеніе массъ и силъ есть осязательное выраженіе главнаго свойства подобной точки, свойства—представлять движеніе тѣла какъ единого цѣлаго. На всякія чисто-внутреннія отношенія при этомъ не обращается вниманія, и потому можно сказать, что движеніе этой точки изображаетъ во внѣ направленную силу частей или, другими словами, движеніе или силу тѣла какъ такового.

Эта уже рано обозначившаяся потребность разсматривать движеніе отдѣльнаго связнаго тѣла какъ нѣчто цѣльное должна была еще ощутительнѣе выступить по отношенію къ системѣ нѣсколькихъ тѣлъ. Тогда какъ въ первомъ случаѣ взаимную связь частей можно было предполагать какъ связь чисто статическую, т.-е. какъ связь существенно неизмѣняемую и вопросъ относился только къ вращенію, во второмъ болѣе общемъ случаѣ ничто не мѣшало свободной игрѣ внутренняго взаимнаго силового развитія; разстоянія между частями системы могли измѣняться, и тѣмъ не менѣе нужно было и для этой системы, какъ для цѣлаго, подыскать понятіе, которое дало бы возможность точно представлять себѣ ея тотальное движеніе независимо отъ чисто внутреннихъ измѣненій. Теорема о движеніи центра тяжести въ этомъ именно примѣненіи и выказываетъ, какъ далеко она хватаетъ, а также ведетъ къ нѣкоторымъ интереснымъ слѣдствіямъ для пониманія всѣхъ существующихъ въ природѣ механическихъ силъ. Въ самомъ дѣлѣ, эта теорема гласитъ, что центръ тяжести системы обладаетъ такими свойствами, какъ будто бы всѣ массы были въ немъ сосредоточены и всѣ силы параллельно самимъ себѣ въ него перенесены. Въ этомъ предположеніи всѣ внутреннія силы, которыя всегда слѣдуетъ представлять себѣ между всякими двумя тѣлами какъ силы равныя и противоположныя, должны приводиться къ нулю, т.-е. уравниваться, и состояніе движенія центра тяжести можетъ зависѣть только отъ внѣшнихъ силъ. Если послѣднихъ нѣтъ, то центръ тяжести можетъ имѣть только движеніе по инерціи, т.-е. онъ будетъ или покоиться или двигаться равномерно по прямой линіи съ постоянною скоростью, по закону инерціи. Слѣдовательно вся система будетъ находиться въ состояніи коснѣнія или, другими словами, будетъ сохранять свое состояніе движенія, подъ которымъ подразумѣвается и случай покоя, безъ всякой перемѣны, совершенно такъ, какъ это соотвѣтствуетъ болѣе обычному примѣру косности отдѣльнаго тѣла.

Если рассматривать природу как цѣлое, то она образуетъ механическую систему, для которой невозможны внѣшнія силы, ибо послѣднія должны бы были привзойти въ природу извнѣ. Всѣ двигательные импульсы и всѣ причины равновѣсія въ этомъ универсальномъ механизмѣ исходятъ изъ тѣла самой системы и имѣютъ характеръ внутреннихъ силъ, которыя, будучи перенесены въ центръ тяжести, должны взаимно уничтожаться. Такимъ образомъ эта совокупность не можетъ находиться подъ вліяніемъ ускорительной силы; но и возможность простаго движенія по инерціи въ этомъ особомъ случаѣ устранена, такъ что на-лицо остается только другая сторона косности, именно сохраненіе покоя. Въ самомъ дѣлѣ, во всякой другой механической системѣ должно предполагать, какъ возможность, предварительное дѣйствіе внѣшней силы, отъ которой вся система получила косное движеніе. Поэтому совершенно справедливо выражаются, когда при отсутствіи дѣйствующихъ внѣшнихъ силъ о системѣ говорятъ, что ея центръ тяжести долженъ находиться въ покоѣ или двигаться по инерціи. Но если кромѣ наличнаго дѣйствія внѣшнихъ силъ исключить еще и предшествовавшее и законченное ихъ дѣйствіе, то этимъ устраняется и возможность движенія по инерціи. Последнее можетъ происходить только отъ накопленія нѣкоторой скорости, а эта скорость, которая должна быть присуща всей системѣ и ея центру тяжести, можетъ быть произведена только внѣшнею силою, ибо чисто внутреннія силы могутъ производить только внутреннія движенія и относительно центра тяжести взаимно уничтожались бы. Отсюда видно, что для природы или вообще для механической системы, мыслимой вполне изолированной и самодовлѣющею въ отношеніи къ настоящему и прошедшему, возможность движенія центра тяжести по инерціи и слѣдовательно перемѣщенія въ пространствѣ безусловно устранена.

112. Ньютонъ, во введеніи къ своему творенію о математическихъ началахъ естественной философіи ¹ установилъ теорему, что на состояніе инерціи центра тяжести системы тѣла не вліяютъ взаимныя дѣйствія тѣла другъ на друга, и вмѣстѣ съ тѣмъ указалъ на то, что въ этой теоремѣ объ инерціи системы, измѣняемой дѣйствіемъ внутреннихъ силъ, высказывается то же самое, что имѣетъ мѣсто и относительно отдѣльнаго тѣла и его центра тяжести. Поэтому Ньютоновское формулированіе включаетъ двѣ вещи. Впервыхъ, законъ инерціи получилъ болѣе широкое истолкованіе, такъ какъ къ понятію инерціи отдѣльнаго тѣла или твердой системы,

¹ Phil. nat. princ. math. Coroll. 4 къ аксіомѣ III прелиминарій.

т.-е. такой, въ которой не имѣютъ мѣста никакія измѣненія разстояній между частями, присоединяется представленіе объ инерціи системы, въ которой внутреннія дѣйствія измѣняютъ взаимныя разстоянія частей. Повторяя, выяснена неизмѣняемость положенія центра тяжести отъ внутренняго силового развитія. Это послѣднее воззрѣніе основывается на третьей Ньютоновской аксіомѣ движенія, что дѣйствіе равно противодѣйствію. Въ самомъ дѣлѣ, и теорема объ инерціи центра тяжести поставлена въ видѣ короллярія къ этому третьему основному закону движенія. Изимѣняемость положенія центра тяжести системы прежде всего доказывается для случая двухъ тѣлъ. Ихъ взаимодѣйствія, такъ какъ они должны быть равны на той и на другой сторонѣ, могутъ измѣнять разстоянія на той и другой сторонѣ лишь въ отношеніи, которое первоначальному центру тяжести и впредь указываетъ точку, раздѣляющую это разстояніе обратно пропорціонально массамъ. Онѣ сохраняетъ, слѣдовательно, свое необходимое свойство, т.-е. условія, опредѣляющія его мѣсто относительно обоихъ тѣлъ, не измѣняются отъ взаимнаго дѣйствія послѣднихъ. При этомъ, натурально, предполагается, что дѣйствіе пропорціонально массамъ; но внутреннія силы и нельзя мыслить дѣйствующими иначе. Притяженія представляютъ здѣсь чистѣйшій примѣръ. Хотя бы еще и ничего не знали объ абсолютной скорости и о силовыхъ измѣненіяхъ при взаимномъ притяженіи двухъ тѣлъ, все же, слѣдуя этому Ньютоновскому закону о неизмѣняемости положенія центра тяжести, можно бы было для всякаго измѣненія положенія одного тѣла вычислить пропорціональное перемѣщеніе другого относительно центра тяжести, каковое должно бы было имѣть мѣсто въ то же самое время. Если взять примѣръ удара, то должно съ самаго начала, т.-е. еще до удара, отдѣлить движеніе центра тяжести отъ необщаго и потому чисто относительнаго движенія, въ силу котораго тѣла различаются другъ отъ друга количествами движенія, и такимъ образомъ распознать движеніе по инерціи всей системы и ея центра тяжести. Такимъ образомъ изолируютъ, такъ сказать, внѣшнюю аффекцію системы и остаются лишь относительныя дѣйствія, играющія въ этомъ случаѣ роль внутреннихъ силъ, пропорціональныхъ массамъ. Будутъ ли онѣ, какъ въ случаѣ неупругаго удара, взаимно уничтожаться до нуля и при взаимныхъ перемѣщеніяхъ, или, какъ при упругомъ ударѣ, развивать равныя между собою дѣйствіе и противодѣйствіе, онѣ ни въ какомъ случаѣ не измѣняютъ положенія центра тяжести относительно этихъ тѣлъ. Слѣдовательно, примѣръ удара освѣщаетъ объ ньютоновскія точки зрѣнія заразъ, ибо за исключеніемъ единственнаго случая, когда количества движенія съ той и съ другой стороны равны или, дру-

гими словами, данныя скорости обратно пропорціональны массамъ, имѣтъ мѣсто движеніе по инерціи центра тяжести и системы до, при и послѣ удара, тогда какъ ни до удара, ни при ударѣ, ни послѣ него относительное положеніе центра тяжести между тѣлами нисколько не измѣняется. Этимъ объясняется и Ньютоновское выраженіе, что центръ тяжести, если отвлечься отъ внѣшнихъ силъ, или покоится или движется равномерно по прямой линіи. Последнее движеніе можетъ происходить только отъ излишней и потому отъ извнѣ приводящей скорости. Ньютонъ уясняетъ еще свое представленіе, сообщая прежде всего двумъ тѣламъ общую скорость и такимъ образомъ заставляя образуемую ими систему, вмѣстѣ съ точкою дѣленія разстоянія между ними, опредѣляемою по обратному отношенію ихъ массъ, двигаться съ тою самою скоростью. Кстати замѣтить, здѣсь видно, что чрезвычайно важно дѣлить всѣ силы по отношенію къ системѣ на внутреннія и внѣшнія. И всѣ аффекціи, т.-е. состоянія движенія по косности и покой всегда можно разсматривать, принимая въ расчетъ, сводится ли ихъ существованіе къ взаимодействію внутреннихъ силъ, или къ причинѣ, лежащей внѣ системы. Часто также достаточно количества движенія разсматривать такъ, какъ бы они были порождены взаимными дѣйствіями. Два тѣла, имѣющія непосредственно при соудареніи равныя, но противоположныя количества движенія, могли бы приобрести наприм. эти количества движенія благодаря предшествовавшему процессу притяженія. Натурально, при этомъ притяженіе не прекращалось бы; но, несмотря на это, мы имѣли бы просто случай удара съ отдѣльными скоростями безъ настоящихъ силъ, дѣйствовавшихъ между тѣлами системы. Слѣдовательно, достаточно, если вступающія во взаимодействіе количества будутъ лишь таковы, чтобы они могли происходить отъ внутреннихъ силъ.

113. Новая теорема о движеніи центра тяжести содержитъ однимъ важнымъ элементомъ больше, чѣмъ начало, сформулированное Ньютономъ. Эта теорема выходитъ за предѣлы частнаго случая дѣйствія однихъ только внутреннихъ силъ. Въ предположеніи внѣшнихъ силъ, центръ тяжести всякой измѣняемой системы движется всегда такъ, какъ будто бы всѣ массы и силы были перенесены въ него, а самая система совсѣмъ не существовала бы. Хотя нѣкоторыя стороны и случаи этого предложенія всегда ясно подмѣчались, ибо всякое движущееся тѣло какъ таковое представляло систему, въ которой движеніе центра тяжести всего натуральнѣе было разсматривать какъ суммарное, такъ сказать, движеніе тѣла, тѣмъ не менѣе, прошло слишкомъ много времени, прежде чѣмъ теорема о движеніи центра тяжести разработана была во всемъ своемъ уни-

версальномъ значеніи. Въ этой совершеннѣйшей формѣ мы находимъ ее впервые только у Лагранжа ¹, тогда какъ д'Аламберъ еще занимался частнымъ случаемъ, когда отдѣльныя тѣла побуждаются неизмѣнными ускоряющими силами одинаковаго направленія въ пространствѣ или направленными къ неподвижному центру. Но и здѣсь д'Аламберу не удалось еще найти обыкновенной формы этого предложенія. Насколько малая права гражданства получила эта болѣе широкая концепція даже во время Лагранжа, доказывается отношеніемъ къ дѣлу самого автора теоріи функций: въ этомъ твореніи ² онъ высказываетъ теорему еще въ формѣ Ньютоновскаго ограниченія и, несмотря на то, что вычисленіе ведетъ дальше, отмѣчаетъ теорему въ этой узко опредѣленной формѣ. Аналитическій выводъ или соотвѣтственное толковое доказательство по Ньютоновскому способу не представляетъ никакихъ затрудненій, если только съ самаго начала взять исходнымъ пунктомъ строгое опредѣленіе центра тяжести, которое не имѣло бы ничего общаго съ тяжестью. Только массы и заданныя для математическаго мгновенія взаимныя ихъ положенія, слѣдовательно, совокупность массъ и извѣстныхъ разстояній въ пространствѣ, — таково единственное предположеніе для опредѣленія этой особой точки, которую получимъ, раздѣливъ разстояніе между двумя какими-либо тѣлами обратно пропорціо-нально ихъ массамъ, рассматривая найденную такимъ образомъ точку дѣленія, какъ носительницу обѣихъ массъ, оперируя надъ этою точкою и третьимъ тѣломъ такимъ же точно образомъ и распро-страняя эту операцію на всѣ остальные части системы. Этотъ центръ массъ, какъ точнѣе его назвали, исключительно есть функція отношеній между массами и геометрическою фигу-рой ихъ группировки. Но непосредственно эти абсолютныя массы и соотвѣстныя абсолютныя разстоянія и опредѣляютъ эту замѣчательную точку, безъ всякаго отношенія къ какимъ-либо опредѣленнымъ силамъ. Хотя при этомъ массы прямо мыслятся какъ не необходимо аффицируе-мая тяжестью или какою иною силою, тѣмъ не менѣе только мысль о нѣкоторой произвольной возможности силовыхъ аффекцій и со-общаетъ представленію этой точки естественный смыслъ. Всякая сила, которую только можно вообразить себѣ приложенною, какъ бы разнообразно ни могла она дѣйствовать, тѣмъ не менѣе, какъ скоро она дѣйствуетъ на всѣ части и во всѣхъ частяхъ матеріи, будетъ пропорціональна количеству матеріи. Таково болѣе глубокое принципиальное основаніе того, почему просто центръ массъ,

¹ Méc. anal., t. I (1811). Динамика Sect. III, особенно Art. 4.

² Théorie des fonctions (1813), третій отд. гл. VI, чл. 33.

какова бы ни была форма особыхъ силъ, можемъ имѣть свойства, содержащіяся въ рассматриваемой здѣсь теоремѣ. Поэтому обычное подсовываніе параллельныхъ силъ при выводѣ центра тяжести и *разсмотрѣніе послѣдняго какъ центра параллельныхъ силъ по примѣру отношенія на рычагѣ* — для высшей механики бесполезно, а пожалуй даже и стѣснительно для строгости отвлеченія. Не группы параллельныхъ силъ, которыя можно было бы поворачивать, а непосредственно массы, какова бы ни была частная форма совершенно случайныхъ и все равно какихъ силовыхъ приложений, должны были образовать исходный пунктъ для опредѣленія понятія и для нахождения того центра массъ, который, по поводу концепціи понятія о немъ, названъ центромъ тяжести.

Если выходить изъ понятія центра массъ, то ясно, что всякая сила можетъ частію измѣнять взаимное разстояніе тѣла относительно другихъ тѣлъ, а частію производить не вступающее во взаимодействие, т.-е. свободное перемѣщеніе системы. Такія перемѣщенія надо рассматривать независимо. Стремленія къ таковымъ слагаются вмѣстѣ, и оказывается, что ими должно обусловливаться движеніе центра тяжести. Взаимныя же дѣйствія, производя пропорціональныя массамъ, но обратныя измѣненія разстояній, измѣняютъ форму системы только въ абсолютныхъ размѣрахъ, но не пропорціонально разстояніямъ относительно точекъ дѣленія. Такимъ образомъ, въ отношеніи къ извѣстнымъ составнымъ частямъ силъ центръ тяжести остается неизмѣннымъ; въ отношеніи къ остальнымъ составнымъ частямъ, онъ можетъ двигаться, напр., по нѣкоторой кривой, совершенно такъ, какъ бы эти составныя части слагались непосредственно въ немъ. Вмѣсто того, чтобы различать обѣ эти составныя части, т.-е. взаимныя и внѣшнія дѣйствія, можно бы было также прямо представлять себѣ приложенными всѣ силы безъ различія, ибо и въ этомъ случаѣ внутреннія силы тотчасъ же уничтожаются, какъ равныя и противоположныя двигательныя импульсы.

114. Не излишне будетъ упомянуть и о весьма быстромъ аналитическомъ доказательствѣ, въ которомъ исходятъ отъ одного свойства центра тяжести въ конечныхъ выраженіяхъ и двукратнымъ дифференцированіемъ приходятъ къ уравненію движенія центра тяжести, содержащему нашу теорему. Полная масса, умноженная на разстояніе центра тяжести ея отъ нѣкоторой произвольной плоскости, равна суммѣ произведеній изъ отдѣльныхъ массъ на соответствующія разстоянія отъ той же плоскости. Эта теорема, взятая относительно трехъ плоскостей координатъ и рассматриваемая для всякаго произвольнаго положенія относительно этихъ плоскостей, слѣдовательно для всякаго пункта или мгновенія движенія

подобной системы, даетъ три уравненія между положеніемъ центра тяжести и соотвѣтствующими каждый разъ положеніями отдѣльныхъ массъ или, какъ обыкновенно говорятъ, между координатами центра тяжести и координатами отдѣльныхъ матеріальныхъ точекъ. Изслѣдованіе формы одного изъ этихъ уравненій имѣетъ силу и для двухъ другихъ, ибо послѣднія лишь повторяютъ для остальныхъ двухъ измѣреній пространства то, что относится къ одной координатной оси. Дифференцируя дважды, причемъ разстоянія отъ плоскости, т.-е. абсциссы, разсматриваются какъ величины, измѣняющіяся со временемъ, получаемъ уравненіе, въ которомъ вторыя производныя (пространства по времени), умножаемыя на соотвѣтствующія массы, могутъ представлять равнодѣйствующія силы для отдѣльныхъ частей системы. Во второй же части уравненія имѣемъ полную массу системы, помноженную на производную движенія центра тяжести по разсматриваемой оси. Слѣд., уравненіе гласитъ, что движеніе центра тяжести таково, какъ еслибы сумма силъ, носительницами коихъ служатъ различныя массы, непосредственно дѣйствовала на центръ тяжести. Въ подобномъ уравненіи содержится точное выраженіе принципа.

Впрочемъ, можно вывести законъ движенія центра тяжести и непосредственно, безъ дифференцированія, изъ основной формулы разстояній, истолковывая это уравненіе прямо какъ конечное уравненіе движенія. Въ такомъ случаѣ выраженіе закона, по внѣшней формѣ, приметъ, конечно, нѣсколько иной видъ. Именно, съ этой точки зрѣнія, движеніе центра тяжести всегда должно быть таково, чтобы оставаться одинаковымъ, когда на мѣсто всей массы, испытывающей опредѣленное перемѣщеніе, будутъ подставлены отдѣльныя массы съ соотвѣтствующими перемѣщеніями и эти произведенія будутъ соединены вмѣстѣ. Произведенія эти не суть настоящія количества движенія, ибо скорости должны оставаться здѣсь совершенно произвольными, неопредѣленными величинами. Но именно въ виду этой неопредѣленности, можно ихъ сложеніе также исполнить особымъ образомъ, и такимъ образомъ о свойствѣ центра тяжести въ движеніи получается представленіе, которое, какъ и самое понятіе центра тяжести, также связано только съ массами и нѣкоторыми разстояніями и на всякія возможныя силы или движенія по косности позволяетъ смотрѣть такъ, какъ будто бы онѣ стремились произведенныя ими перемѣщенія отдѣльныхъ массъ произвести непосредственно въ центрѣ тяжести и, дѣйствуя въ такомъ родѣ, въ немъ комбинировались.

115. Второй принципъ, въ виду своего мѣста въ исторіи развитія, всего непосредственнѣе примыкающій къ тому, что доселѣ

изложено, хотя какъ таковой еще и не выставленъ особо у Лагранжа и не включенъ въ рядъ характеристичныхъ главныхъ положеній, но коренится уже въ Ньютоновскихъ способахъ представленія и, если отвлечься отъ особаго его содержанія и отъ его значенія для позднѣйшаго полнаго сочетанія всѣхъ принципиальныхъ главныхъ пунктовъ механики, имѣетъ и особый историческій интересъ. Это—какъ бы двойникъ принципа сохраненія живыхъ силъ, ибо онъ показываетъ, въ какой формѣ дѣйствительно дозвоительно утверждать сохраненіе простыхъ количествъ движенія, т.-е. произведеній изъ массъ на скорости, не подпадая Декартовскому заблужденію, въ силу котораго предполагалось сохраненіе того же количества, не принимая въ расчетъ взаимной компенсаціи, т.-е. не обращая вниманія на противоположность направленій и на смыслъ скоростей.

Уже Ньютонъ ¹ довольно вѣрно замѣтилъ, что развитіе внутреннихъ силъ не измѣняетъ алгебраической суммы количествъ движенія, которая получается, если взять количества, совмѣстно дѣйствующія въ томъ же смыслѣ по тому же направленію, а противоположныя, съ той же точки зрѣнія, вычесть. Полученная такимъ образомъ сумма и разность сохраняется безъ перемѣны. Вся теорема, непосредственно предшествующая у Ньютона теоремѣ о сохраненіи состоянія движенія центра тяжести, точно также установлена просто какъ королларій къ основной аксіомѣ равенства и противоположности дѣйствія и противодѣйствія. Она поясняется примѣромъ удара и при этомъ распространяется даже на случай, когда линіи, по которымъ тѣла набѣгаютъ одно на другое, образуютъ уголъ. Самый принципъ формулированъ въ совершенно общемъ видѣ, хотя и не упоминается объ оси, на которую можно вообразить проложенными количества движенія. Втихомолку предполагается, что количество движенія должно относить къ общему направленію. Во первыхъ, всего естественнѣе, это будетъ то направленіе, по которому они дѣйствительно суммируются и уничтожаются. Ньютоновъ примѣръ удара подъ угломъ опять разъясняетъ это, такъ какъ одна часть количества движенія при необходимомъ разложеніи падаетъ въ общую плоскость касанія обоихъ тѣлъ и, въ силу такой точки зрѣнія на разложеніе, остается такою же, какою она, съ этой же точки зрѣнія, была и до косога удара. Здѣсь часть количествъ движенія отнесена къ опредѣленному направленію, именно къ направленію равнодѣйствующей, лежащей въ этой плоскости. А другую часть, относительно которой всегда возникаетъ вопросъ о нѣ-

¹ Phil. nat. princ. math. Введеніе coroll. 3 къ третьей аксіомѣ движенія.

которой разности, нужно брать по линіи перпендикулярной въ точкѣ касанія къ общей касательной плоскости. Во всѣхъ кон-
кретныхъ случаяхъ получится естественнѣйшимъ образомъ направ-
леніе, по которому слѣдуетъ представлять себѣ количества движе-
нія слагающимися или вычитающимися, чтобы связать это представ-
леніе съ дѣйствительными процессами.

Но въ силу того же самаго основанія, по которому можно
разлагать силы въ эквивалентныя группы по произвольнымъ направ-
леніямъ, возможно и разложеніе скоростей, а слѣдовательно и
проектированіе количествъ движенія. Такое проектированіе можно
разсматривать такъ же точно, какъ и редуцированіе силы къ дан-
ному направленію. Но разъ нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что количества
движенія, въ направленіи ихъ естественнаго дѣйствія и фактиче-
скаго прямого антагонизма всегда даютъ ту же сумму согласныхъ
и ту же разность противоположныхъ составныхъ частей, какъ это
прямо такъ и формулировано у Ньютона, то отсюда также слѣ-
дуетъ, что разсматриваемыя количества, остающіяся равными въ
различнѣйшихъ состояніяхъ, должны воспроизводить это равенство
и въ своихъ проложеніяхъ на произвольную линію, ибо при этомъ
рѣчь идетъ лишь о чисто математически пропорціональномъ измѣ-
неніи первоначально данныхъ равными величинъ. Поэтому, съ виду
болѣе общее выраженіе принципа, какъ его обыкновенно понимаютъ
нынѣ, есть лишь математическая разработка Ньютоновскаго форму-
лированія и, разсматриваемое чисто механически, въ сущности
совсѣмъ не расширяетъ этого начала. Еще и нынѣ, какъ дѣлалъ и
Ньютонъ, нужно обратиться къ равенству дѣйствія и противодѣй-
ствія, если хотимъ доказать теорему, что алгебраическая сумма
количествъ движенія по произвольному направленію всегда остается
та же, какова бы ни была игра внутреннихъ силъ. Первоначально
данное весьма простое основаніе, что сообщенію нѣкотораго эле-
мента или части количества движенія соотвѣтствуетъ равное сооб-
щеніе въ противоположномъ направленіи, и что то же самое отно-
сится и къ потерямъ, есть ничто иное какъ ссылка на равенство
дѣйствія и противодѣйствія, и еще и теперь служить простѣйшимъ
способомъ доказательства нашей теоремы. Всякую внутреннюю силу
представляютъ двусторонне и дѣйствующею по линіи соединенія
ея носителей. Она не можетъ ни увеличить, ни уменьшить свобод-
наго избытка количествъ движенія, части же, содержащіяся въ
разности, хотя она, повидимому, и можетъ абсолютно уничтожить,
какъ въ случаѣ неупругаго удара, но первоначальную разность даже
и тутъ измѣнить не можетъ.

116. Если кромѣ того на тѣла системы дѣйствуютъ и внѣшнія

силы, то онѣ вызовутъ новыя количества движенія, которыя также можно проэктировать на произвольно выбранную прямую; здѣсь онѣ представляютъ приращеніе количества движенія по этому направленію. Поэтому, въ настоящее время, это начало выражаютъ еще и такъ, что тотчасъ же исходятъ отъ допущенія непрерывно дѣйствующихъ внѣшнихъ силъ, а приращеніе количества движенія, произведеннаго этими силами въ произвольномъ направленіи въ пространствѣ, приравниваютъ тому измѣненію количества движенія, которое эти силы произвели бы, еслибы, приведенныя къ разсматриваемому направленію, дѣйствовали бы непосредственно по этому направленію. При этомъ всѣ внутреннія отношенія, посредствомъ которыхъ извѣстныя составныя части внѣшнихъ силъ уничтожаются, прямо отпадаютъ какъ не имѣющія значенія. Вся теорема представляется такимъ образомъ ничто иное какъ редукцію и сложеніе существующихъ или имѣющихъ народиться количествъ движенія системы въ произвольномъ направленіи. Существенную точку опоры образуетъ здѣсь не какая-либо опредѣленная прямая, но общее направленіе, представляемое этою линіей въ пространствѣ, и которое можетъ быть представлено также и всякою другою ей параллельною линіей. Вообразимъ себѣ совокупность всевозможныхъ, наполняющихъ пространство, линій, имѣющихъ то же направленіе, и мы будемъ имѣть образъ абстрактнаго, отъ особаго положенія независимаго, понятія направленія въ пространствѣ. Для такого направленія эти проэкции всегда равны, какія бы линіи ни взяты представителями взятаго направленія.

Если нѣтъ внѣшнихъ силъ, то болѣе широкое выраженіе теоремы для этого частнаго случая гласитъ, что приращеніе количества движенія должно быть равно нулю или, другими словами, что наличная алгебраическая сумма количествъ движенія постоянно должна быть одна и та же. Такимъ образомъ снова выступаетъ законъ постоянства или сохраненія количествъ движенія, исчисленныхъ сообразно ихъ знакамъ. Натурально, и особый случай, когда внѣшнія силы по какому-либо изъ разсматриваемыхъ направленій взаимно уничтожаются, получилъ бы соотвѣтствующую этому случаю форму. Онѣ имѣли бы въ этомъ случаѣ въ точности характеръ внутреннихъ силъ, попарно уничтожающихся и не вызывающихъ никакихъ количествъ движенія.

Впослѣдствіи обнаружится, какую роль принципъ независимости количествъ движенія отъ внутреннихъ силъ, т.-е. основная теорема сохраненія ихъ алгебраической суммы по произвольному направленію въ пространствѣ, какую роль этотъ принципъ могъ бы играть въ статикѣ и динамикѣ. Пока упомянемъ только о томъ, что

уже у Галилея, если и не количества движенья, то все же скорости, которыя онъ воображалъ порожденными дѣйствіемъ тяжести въ одной и той же массѣ по различнымъ направленіямъ, наприм. на различно наклоненныхъ плоскостяхъ, представляли законъ приращенія количествъ движенья,—приращенія, вызываемаго внѣшней силою въ одно и тоже время въ различныхъ направленіяхъ.

То же самое замѣчаніе, какое, говоря о законѣ движенья центра тяжести, можно было сдѣлать о внутреннихъ и внѣшнихъ силахъ и о простыхъ движеньяхъ по косности, вполне примѣняется и къ закону измѣненія или сохраненія количествъ движенья по произвольному направленію. Каждое существующее количество движенья, котораго происхожденіе не сводимо къ внутреннимъ силамъ, или которое не дано вмѣстѣ съ равною и противоположною величиною, можно трактовать какъ внѣшнюю причину, ибо оно, по крайней мѣрѣ, въ прошломъ, должно было имѣть источникомъ чуждую системѣ силу. Но мы уже выше замѣтили, что природа, какъ цѣлое, не можетъ содержать никакихъ внѣшнихъ силъ, т.-е. никакихъ силъ, которыя имѣли бы источникъ внѣ природы, и слѣдовательно всѣ силы должно мыслить исходящими отъ нѣкотораго тѣла въ природѣ, то и на всякія когда-либо имѣющіяся на лицо скорости и количества движенья должно смотрѣть лишь какъ на продукты прежнихъ силовыхъ дѣйствій. Но въ такомъ случаѣ, по закону дѣйствія и противодѣйствія, и имъ должно соотвѣтствовать сопряженное измѣненіе въ противоположномъ направленіи. Это измѣненіе количества движенья не могло быть одностороннимъ, а потому и теперь для всякаго количества движенья, повидимому, изолированнаго и какъ бы появившагося изъ ничего, которое встрѣчаемъ въ какой-либо ограниченной системѣ внѣ ея и немотивированнымъ, должно въ универсальной системѣ природы существовать количество ему противоположное и его уничтожающее. Такимъ образомъ для цѣлага природы устранена всякая возможность, чтобы въ какомъ-либо направленіи въ пространствѣ алгебраическая сумма количествъ движенья оказалась не нулемъ. Это вполне согласуется и съ идеей о центрѣ тяжести природы, какъ мы развили ее выше. Этотъ центръ тяжести и этотъ центръ массы не могъ бы абсолютно покоиться, какъ необходимо въ силу упомянутой дедукціи, еслибы въ какомъ либо направленіи въ пространствѣ существовало количество движенья, которое для системы имѣло бы значеніе движенья по косности. Поэтому, неопредѣленная идея Картезія дала мѣсто неожиданному, но весьма раціональному факту, а именно что не сумма абсолютныхъ количествъ движенья, но алгебраическая сумма въ какомъ угодно направленіи въ пространствѣ взятыхъ количествъ

движенія сохраняется безъ всякаго увеличенія и уменьшенія, ибо она всегда во всѣхъ направленіяхъ пространства должна быть равна нулю. Декартъ представлялъ себѣ, что разъ созданная сумма количествъ движенія сохраняется неизмѣнною, причемъ онъ предполагалъ исчислять каждое количество какъ абсолютное, не принимая въ расчетъ ни противоположнаго ему, ни знака. Но въ этой формѣ его идея есть идея фактически ложная, ибо абсолютная сумма количествъ движенія можетъ быть весьма различна. Впрочемъ, если разсматривать указаннымъ способомъ количества движенія въ какомъ-либо произвольномъ направленіи, различая количества, направленные въ одну и въ противоположную сторону по этому направленію, то обѣ суммы должны быть равны между собою, т.-е. результирующее количество движенія должно быть нулемъ. Поэтому, желая быть въ согласіи съ метафизическою формою Картезіева понятія, можно во всякомъ случаѣ сказать, что сохраняется одно и то же первоначально созданное количество, причемъ будемъ имѣть то преимущество, что понятіе этого первоначально созданнаго количества не ведетъ за собою никакого логическаго недоразумѣнія, ибо предметъ его равенъ нулю, а потому для него самого по себѣ безразличны точки зрѣнія первоначальнаго производенія или уничтоженія. Нѣтъ никакого противорѣчія въ мысли, что во всѣхъ измѣненіяхъ этотъ нуль результирующаго количества движенія всегда имѣлся на-лицо и всегда будетъ на-лицо.

117. Третій, весьма знаменитый и даже въ новѣйшее время лежащимъ освѣщеніемъ еще шире разъясненный принципъ есть принципъ, наиболѣе извѣстный подъ именемъ теоремы о сохраненіи площадей, хотя, разсматриваемый не столь внѣшнимъ образомъ, называется также началомъ сохраненія моментовъ вращенія. Въ нѣкоторомъ отношеніи онъ составляетъ дополненіе къ теоремѣ о движеніи центра тяжести или, если угодно, также къ теоремѣ о взятыхъ въ произвольномъ направленіи количествахъ движенія. Какое значеніе эти два начала имѣютъ для поступательнаго движенія, такое точно значеніе принципъ площадей имѣетъ для вращательнаго. И въ послѣдствіи весьма легко можно будетъ показать, что извѣстныя шесть уравненій, какъ они выражаютъ сколько условія равновѣсія, столько же въ болѣе общей формѣ и необходимыя отношенія движенія произвольной, какъ твердой такъ и измѣняемой системы, что эти уравненія имѣютъ содержаніе сказанныхъ принциповъ точнымъ коррелятомъ. Строго говоря, въ этихъ шести уравненіяхъ есть лишь два вида отношеній, и лишь три измѣренія пространства и обусловливаемое ими отношеніе къ тремъ координатнымъ осямъ утраиваетъ каждое изъ обоихъ основныхъ отношеній.

Одно изъ этихъ послѣднихъ касается равновѣсія и движенія, поскольку рѣчь идетъ о поступательномъ движеніи системы; другое имѣетъ предметомъ ту сторону равновѣсія и движенія, при которой вопросъ касается вращенія системы. Принципъ площадей и формулируетъ этотъ второй родъ отношеній. Замѣчательно, что это вмѣстѣ съ тѣмъ старѣйшій изъ всѣхъ характеристичныхъ основныхъ принциповъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ существеннѣйшія разъясненія его даны лишь въ текущемъ столѣтіи.

Просто какъ фактъ наблюденія принципъ площадей въ простой формѣ существовалъ уже у Кеплера, а въ элементарномъ изложеніи простѣйшихъ основаній онъ лишь въ текущемъ столѣтіи, въ рукахъ Пуансо, находитъ подобающее себѣ мѣсто въ числѣ первыхъ элементовъ статики и динамики. Но какъ Пуансотовское направленіе имѣетъ совершенно общее и для пониманія всѣхъ принциповъ механики рѣшительное значеніе, то мы отложимъ болѣе обстоятельное разъясненіе этой фазы развитія основныхъ представленій механики, а вмѣстѣ съ этимъ и окончательное освѣщеніе принципа площадей, до слѣдующаго отдѣла, ибо мы пока не выходимъ за предѣлы періода, оканчивающагося Лагранжемъ, и лишь тамъ и сямъ даемъ антиципирующія ссылки на эту новую точку зрѣнія. Какъ бы то ни было, Пуансо уже въ самомъ началѣ текущаго столѣтія установилъ свою теорію силовыхъ паръ и этимъ самымъ приписалъ моментамъ вращенія тотъ смыслъ, какой они могутъ имѣть только въ свободномъ движеніи. И тотчасъ же онъ истолковалъ принципъ площадей какъ предложеніе объ этихъ моментахъ, понимаемыхъ съ совершенно новой точки зрѣнія. Завершеніе этого новаго способа представленія послѣдовало, впрочемъ, лишь вмѣстѣ съ новою теорією вращенія Пуансо, появившеюся 30-ю годами позднѣе, а какъ сверхъ того эти новыя точки зрѣнія и способы представленія получили права гражданства лишь значительно позднѣе, то мы имѣемъ право и то, что случилось еще при жизни Лагранжа, отнести къ позднѣйшей стадіи развитія.

Какъ и всѣ доселѣ въ этомъ отдѣлѣ разсмотрѣнныя фундаментальныя предложенія, и принципъ моментовъ вращенія былъ понимаемъ то уже, то шире, смотря потому, обращали ли вниманіе на сохраненіе или на приращеніе моментовъ вращенія количествъ движенія или, короче говоря, количествъ вращенія. Но господствующая идея всегда оставалась связанною съ сохраненіемъ моментовъ, т.-е. съ болѣе узкимъ пониманіемъ. Натурально, моменты вращенія настолько же независимы отъ внутреннихъ силъ, какъ и взятыя въ произвольномъ направленіи количества движенія, о которыхъ съ этой точки зрѣнія является вопросъ, когда рѣчь идетъ о поступа-

тельномъ перемѣщеніи системы. Впрочемъ, если вообще должно имѣть мѣсто вращеніе, то избытокъ моментовъ вращенія въ одномъ направленіи (т.-е. или для вращенія вправо, или для вращенія влѣво), долженъ существовать въ формѣ коснѣющихъ количествъ движенія. Начало равенства дѣйствія и противодѣйствія, для котораго можно бы было ожидать въ точности соотвѣтствующаго примѣненія и для случая разницы направленія моментовъ вращенія, до сихъ поръ не привело въ этомъ направленіи ни къ какимъ особымъ разъясненіямъ, такъ какъ на произвожденіе дѣйствительныхъ вращеній въ такомъ родѣ, чтобы въ игрѣ непрерывныхъ силъ выступала симметрія дѣйствія и противодѣйствія, до сихъ поръ еще не было обращено никакого вниманія. Поэтому и мы непосредственно примкнемъ къ обычному пониманію принципа площадей, тѣмъ болѣе, что такой способъ пониманія имѣетъ за себя уже первые историческіе факты.

Одинъ изъ трехъ Кеплеровскихъ законовъ гласитъ, что радіусы векторы, соединяющіе какую нибудь планету съ солнцемъ, описываютъ площади пропорціональныя временамъ или, что то же, всегда равныя для единицы времени, такъ что никогда не бываетъ ни увеличенія, ни уменьшенія этихъ площадей. Это постоянство описываемыхъ въ равныя времена секторовъ было для Кеплера эмпирическимъ фактомъ, имѣвшимъ силу для каждой планеты въ отдѣльности безъ всякаго отношенія къ остальнымъ. Равнымъ образомъ Кеплеръ, какъ мы видѣли въ § 77, былъ еще весьма далекъ отъ механическаго расчлененія, даже вообще отъ чисто механическихъ точекъ зрѣнія. Но способъ выраженія Кеплера сдѣлался образцомъ и для наименованія и для способа представленія принципа, такъ какъ постоянство описываемыхъ въ равныя времена площадей осталось характеристичнымъ признакомъ основного воззрѣнія, въ высшей степени важнаго для механики, и слѣды этого источника, по крайней мѣрѣ отчасти, дошли до нашихъ дней какъ въ имени, такъ и въ самой вещи.

118. Ньютонъ доказываетъ Кеплеровскій фактъ какъ механическую необходимость, посылка которой состоитъ въ томъ, что сила, дѣйствующая на обѣгающее тѣло, исходитъ постоянно изъ одного и того же центра. Для центростремительныхъ силъ теорема площадей доказана и даже поставлена во главѣ ¹ теоріи этихъ силъ. Этимъ Кеплеровскій фактъ былъ превращенъ въ теорему механики, и все дальнѣйшее развитіе касалось только расширенія предположеній, при которыхъ площади, причитающіяся на каждый элементъ

¹ Phil. nat. princ. math. Книга I, Отд. II, первая теорема.

массы или на каждую единицу массы, каковая мыслится сама по себѣ какъ конечная точка радіуса—вектора, даютъ въ равныя времена равныя суммы. Суммирование площадей, приходящихся на различныя тѣла или части массъ, было существеннымъ расширеніемъ этого принципа, и чтобы ввести въ вычисленіе неравенство массъ, площади умножались на массы. Но точно также можно бы было мыслить, что всякая единица массы или всякая частица матеріи, которую можно представлять себѣ равною всѣмъ остальнымъ, движется сама по себѣ, причемъ въ этомъ случаѣ ей соотвѣтствовала бы особая площадь. Это при случаѣ и было сдѣлано, наприм. Пуансо; но объ этомъ рѣчь впереди. Необходимо только было прямо выставить, что суммирование площадей для различныхъ точекъ системы, даже отвлекаясь отъ соображенія о массовыхъ различіяхъ, представляетъ существенное расширеніе принципа. Для отдѣльнаго тѣла не нужно и никакой проэкции площадей на произвольную плоскость. Но для нѣсколькихъ тѣлъ, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ, принципъ площадей и нельзя формулировать иначе, какъ взявъ какую-либо плоскость въ пространствѣ за плоскость проэкции. Въ такомъ случаѣ описываемые секторы какъ бы редуцируютъ на эту плоскость или, лучше, на ея направленіе въ пространствѣ, ибо дѣло не въ особомъ положеніи плоскости, а въ совершенномъ заполненіи пространства плоскостями одинаковаго направленія. То, что здѣсь подлежитъ суммированію, это—соотвѣтствующія массамъ площади или, что сводится въ сущности къ тому же, моменты вращенія, брать ли ихъ, принимая во вниманіе силы, или уже существующія количества движенія. Точкѣ, изъ которой въ плоскости проэкции выходятъ радіусы-векторы, въ системѣ соотвѣтствуетъ перпендикуляръ въ этой точкѣ, къ которому относятся вращенія какъ къ ихъ оси. Для всякой системы можно выбрать произвольную линію опредѣленнаго положенія внутри или внѣ системы, какъ ось, и этимъ вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляется и направленіе проложеній, т.-е. направленіе всѣхъ плоскостей, на которыя въ этомъ случаѣ проэктируютъ. Самая ось пролагается въ точку, ибо всѣ разсматриваемыя плоскости должны быть къ ней перпендикулярны. Но если исходомъ сдѣлать вмѣсто оси тотчасъ плоскость проэкции, то разнообразіе соотвѣтственныхъ осей исключается, ибо точка, къ которой относятся данныя въ системѣ вращенія, опредѣляетъ своею проэціей исходную точку радіусовъ-векторовъ естественно, а не произвольно.

Такимъ образомъ, вообще можно формулировать совершенно общую теорему о моментахъ вращенія относительно нѣкоторой произвольной оси, т.-е. можно установить законъ площадей въ са-

мой общей формѣ, или въ формулированіи главной теоремы можно не выходить изъ рамокъ тѣхъ предположеній, при которыхъ сумма площадей относительно произвольной плоскости остается величиною постоянною. Это постоянство можно и въ этомъ случаѣ выразить, сказавъ, что сумма площадей, описываемыхъ въ равные промежутки времени, остается безъ измѣненія, какую бы часть времени ни взяли, или также сказавъ, что эта сумма возрастаетъ пропорціонально времени.

119. Болѣе общія идеи, въ которыхъ принципъ площадей частію прямо, частію косвенно уже понимался весьма широко, выступили вмѣстѣ около 1745 г. или вскорѣ послѣ этого. Въ интересахъ возможно полнаго изложенія, мы должны начать указаніемъ на обширный мемуаръ Эйлера, занимающій первое мѣсто ¹ въ первомъ томѣ его небольшихъ работъ. Здѣсь разсматривается вращательное движеніе тѣлъ, заключенныхъ въ трубку, а косвенная цѣль—установленіе принципа площадей или моментовъ вращенія. Въ томъ же году (1746) и на ту же тему въ Запискахъ Берлинской Академіи (т. I) появилась работа Даниіла Бернулли ², изъ которой непосредственно можно вывести разсматриваемый принципъ. Форма, всего лучше соотвѣтствующая старой традиціи зачатковъ этого принципа, удержана въ работахъ d'Arcy, который представляетъ его прямо какъ принципъ въ мемуарахъ Парижской Академіи ³, появившихся въ 1752 г., но относящихся къ 1747 году, причемъ исходнымъ пунктомъ взяты площади.

У d'Arcy проекція на одну и ту же плоскость суммы произведеній массъ на соотвѣтствующія площади, описанныя около неподвижнаго центра, пропорціональна времени. Въ этой формѣ еще и нынѣ выражаютъ законъ сохраненія площадей. Здѣсь начало уже распространено на нѣсколько тѣлъ, вращающихся около общаго центра, и на неравныя массы.

У Эйлера и Даниіла Бернулли истина, о которой здѣсь идетъ рѣчь, является въ чисто аналитическомъ одѣяніи. При разработкѣ задачи о заключенныхъ вращающихся тѣлахъ, между прочимъ, оказалось вообще, что при движеніи группы тѣлъ около центра сумма произведеній массы, скорости вращенія и разстоянія остается по-

¹ Эйлеръ, *Opuscula varii argumenti* (т. I), 1746, первый отдѣлъ: *Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum*.

² *Nouveau problème de mécanique résolu par D. Bernoulli*.—Поводомъ послужила предложенная ему Эйлеромъ задача объ одномъ заключенномъ тѣлѣ, которая повела къ болѣе общей обратной задачѣ, въ рѣшеніи которой участвовалъ и Клеро.

³ *Problème de dynamique*, три вмѣстѣ напечатанные мемуара, стр. 344—362.

стоянною, когда никакія внѣшнія силы не дѣйствуютъ, такъ какъ она не зависитъ отъ внутреннихъ силъ. При этомъ, натурально, подъ скоростью вращенія разумѣютъ круговой элементъ, описываемый около центра или оси движенія въ элементъ времени, который должно брать постояннымъ. Если же элементъ времени взять вмѣстѣ съ тѣмъ за единицу времени, то скорость обращенія выразится непосредственно соотвѣтствующимъ круговымъ элементомъ. Но послѣдній, т.-е. малая дуга круга, умноженная на разстояніе (отъ центра или оси) даетъ удвоенную площадь описаннаго сектора или его проекціи. Такимъ образомъ, аналитически охарактеризованное произведеніе Эйлера превращается въ отчасти геометрическое выраженіе $d'Arcu$. На мѣсто обоихъ фактовъ скорости и разстоянія вездѣ выступаетъ соотвѣтствующая площадь. Эйлеръ пользовался болѣе и болѣе входившимъ въ обычай въ механикѣ понятіемъ момента, и потому его теорему можно коротко формулировать такъ, что моменты вращенія количествъ движенія, если отвѣчаться отъ внѣшнихъ силъ, постоянно сохраняютъ одинаковую сумму. Скорость вращенія существуетъ для строго-математическаго пункта и потому произведеніе изъ разстоянія на массу и эту скорость, или, другими словами, моментъ вращенія уже самъ по себѣ есть величина, которую должно мыслить независимо отъ теченія какого-либо, хотя бы и какъ угодно малаго, времени. Напротивъ, площади обыкновенно представляютъ себѣ различной величины, т.-е. возникающими, и даже элементъ площади, соотвѣтствующій элементу круга, какъ выраженіе дифференціальной формы, не представлялъ бы строго наглядно ту абстрактную величину, о которой здѣсь идетъ рѣчь. Этимъ объясняется, что $d'Arcu$ долженъ былъ дифференціальному выраженію предпочесть конечное, и что вообще всѣ, кто держался плоскостей какъ нагляднаго образа, вынуждены высказывать ихъ пропорціональность времени. Съ аналитической точки зрѣнія, это есть уже интегральная форма пониманія принципа. Если хотя бы избѣжать ея, то во всякомъ случаѣ можно сказать, что приращеніе площадей, описанныхъ въ тѣ же послѣдовательныя времена, равно нулю. Можно бы было также сказать, что производящій площади факторъ даетъ для каждой точки постоянную величину разсматриваемой суммы.

Данныя скорости по косности отнюдь не внѣшнія силы и обыкновенно не считаются чѣмъ-то внѣшнимъ системѣ. Существенна — ихъ независимость отъ игры внутреннихъ силъ, и въ этомъ-то именно и состоитъ ихъ сохраненіе. Такимъ образомъ въ различныхъ изложеніяхъ, подъ какою бы то ни было аналитическою или геометрическою формою, сумма моментовъ количествъ движенія

относительно оси остается постоянною, когда нѣтъ никакихъ внѣшнихъ силъ, или, что сводится къ тому же, когда моменты внѣшнихъ силъ относительно этой оси приводятся къ нулю. Въ одномъ особомъ случаѣ послѣднее всегда и имѣетъ мѣсто, а именно когда внѣшнія силы даютъ равнодѣйствующую, постоянно направленную къ одному и тому же центру. Въ такомъ случаѣ, какъ бы ни проводить плоскости проэкціи чрезъ этотъ центръ, сумма проектированныхъ моментовъ количествъ движенія относительно этого центра или, иначе говоря, сумма площадей, вычисленныхъ соразмѣрно массамъ, остается постоянною, т.-е. не будетъ испытывать ни увеличенія, ни уменьшенія со временемъ для равныхъ промежутковъ времени. Итакъ, рѣшительное предварительное условіе для примѣненія принципа площадей есть отсутствіе измѣняющаго дѣйствія внѣшнихъ силъ. Моменты этихъ внѣшнихъ силъ относительно оси, къ которой этотъ принципъ долженъ быть примѣненъ, должны имѣть сумму равную нулю. Кстати замѣтить, эти силовые моменты нельзя смѣшивать съ моментами количествъ движенія. Ихъ нужно выражать произведеніемъ силы, т.-е. ускоренія помноженнаго на массу, на разстояніе отъ оси. Впрочемъ, можно также присоединить еще факторомъ элементъ времени, ибо этимъ вмѣсто силового выраженія, отнесеннаго къ единицѣ, введенъ будетъ мгновенный, продолжительности элемента времени соотвѣтствующій импульсъ силы. Естественнo, эти импульсы должны взаимно уничтожаться, если въ теченіе времени не должны возникать количества движенія.

Но упомянутые импульсы и составляютъ то, съ помощію чего можно получить весьма удобное выраженіе не для принципа сохраненія, но для расширеннаго принципа приращенія моментовъ количествъ движенія относительно произвольной оси. Въ самомъ дѣлѣ, если предположеній этого постоянства нѣтъ, какъ въ случаѣ когда разсматриваются внѣшнія силы относительно нѣкоторой оси, то импульсы, посредствомъ которыхъ эти силы измѣняютъ величины моментовъ вращенія, т.-е. моменты количествъ движенія относительно оси, вызовутъ въ теченіе опредѣленнаго промежутка времени опредѣленное приращеніе, т.-е. сумму моментовъ количествъ движенія, соотвѣтствующую дѣйствію этихъ силъ въ теченіе этого времени. Слѣдовательно, постоянство суммъ моментовъ является лишь частнымъ случаемъ. Но когда дѣйствуютъ и эти измѣняющія силы, можно этотъ процессъ разсматривать такъ, какъ будто эта постоянная сумма всегда лежала въ основаніи, а сумма моментовъ количествъ движенія, возникшая отъ дѣйствія силовыхъ побудовъ, съ нею только слагалась приданіемъ или вычитаніемъ. Такой способъ представленія соотвѣтствуетъ простой и всеобщей идеѣ кос-

нѣнія вообще и сохраненія алгебраической суммы количествъ движенія специально. Онъ даже соотвѣтствуетъ вообще способу, по которому количества движенія слагають подобно силамъ и устанавливаютъ строгій аналогъ этого сложения и для осевыхъ моментовъ количествъ движенія.

Итакъ, чтобы охарактеризовать наиболѣе широкое пониманіе разсматриваемыхъ здѣсь идей, представимъ себѣ произвольную, все равно—твердую ли, или измѣняемую систему и внутри или внѣ ея произвольную линію, какъ ось, къ которой относятъ движенія отдѣльныхъ тѣлъ и, по скольку эти движенія можно понимать какъ вращенія около оси, разсматриваютъ какъ моменты. Теперь можно утверждать вообще, что суммы моментовъ количествъ движенія относительно упомянутой произвольной оси или, что то же, проэкціи этихъ моментовъ на нѣкоторую перпендикулярную къ оси плоскость или, по третьей варіаціи этого представленія, произведенія площадей на дифференціальныя площади, соотвѣтствующія каждому элементу времени, въ теченіе нѣкотораго времени получаютъ приращеніе, соотвѣтствующее дѣйствию этихъ измѣняющихся силъ въ теченіе этого времени. Это дѣйствіе состоитъ въ измѣненіи количествъ движенія и зависящихъ отсюда моментовъ. Полное измѣненіе представляется интеграломъ, выражающимъ сумму элементарныхъ импульсовъ этихъ силъ для разсматриваемой комбинаціи моментовъ движущихъ силъ около оси. Впрочемъ, если хотять устранить необходимую для уравниенія двойственность точки зрѣнія, то можно также непосредственно представить себѣ, что данная для момента времени сумма моментовъ количествъ движенія около оси увеличивается совершенно такъ, какъ будто бы эти внѣшнія силы алгебраически прибавляли произведенныя ими количества моментовъ. Черезъ это аналогія съ принципомъ, имѣющимъ мѣсто для количествъ переноснаго движенія, становится совершенно оче-видною.

120. Обработка принципа площадей у Лагранжа ¹ не представляетъ ничего особеннаго. Сведеніе теоремы къ общей основной формулѣ механики имѣетъ здѣсь мѣсто какъ и для другихъ принциповъ, и едва ли нужно замѣчать еще разъ, что авторъ Аналитической Механики совершенно правильно видитъ лишь простые результаты вычисленія и первыхъ элементарныхъ принциповъ вездѣ, гдѣ до него другіе думали, что открыли совершенно особыя отношенія, даже иногда дѣйствительныя цѣли въ природѣ, или, по

¹ Мѣс. anal. т. I (1811), Динамика Sect. III, § 2, особенно Art. 9. Сравни также *Théorie des fonctions*, ч. III, гл. 6, особенно Art. 37.

меньшей мѣрѣ, смотрѣли на относящіяся сюда воззрѣнія какъ на замѣчательныя разоблаченія особыхъ свойствъ строя или дѣйствія природы. Онъ выставяетъ принципъ площадей съ тою степенью всеобщности, съ какою его можно высказать, когда нѣтъ никакихъ внѣшнихъ силъ, или еслибы внѣшнія силы въ отношеніи къ вращенію нейтрализовались бы.

Въ виду великаго значенія, какое позднѣйшее Пуансотовское преобразованіе моментовъ вращенія въ пары силъ имѣло для нагляднаго уясненія нашего принципа и для упрощенія его вывода, нельзя обойти здѣсь того факта, что уже въ приведенной статьѣ Эйлера ² находятся слѣды, которые весьма дозвоительно разсматривать какъ нѣкоторое приближеніе къ понятію силовыхъ паръ, не желая этимъ сказать болѣе того, что природа дѣла уже прежде направила мысли на тотъ путь, на которомъ Пуансо пришелъ къ столь любопытному упрощенію и исправленію механическихъ заключеній. Эйлеръ рѣшительно высказывается тамъ, что реальный моментъ вращенія можно мыслить происходящимъ не отъ одной, но отъ двухъ силъ, равныхъ между собою, противоположныхъ и параллельныхъ. «Одна единственная сила,—буквально говоритъ онъ,— не можетъ исчезать и вмѣстѣ съ тѣмъ имѣть реальный моментъ, развѣ это будетъ бесконечно малая сила, дѣйствующая на рычагъ въ бесконечномъ разстояніи». То, что должно исчезать, это — переносное дѣйствіе, и Эйлеръ показываетъ, что обѣ равныя, противоположныя и параллельныя силы, перенесенныя параллельно самимъ себѣ въ одну и ту же точку приложенія, не производятъ никакого прогрессивнаго движенія, такъ что дѣйствіе ихъ ограничивается моментомъ вращенія. Итакъ, онъ былъ очень близокъ къ воззрѣнію на моменты вращенія какъ на самостоятельныя дуалистическія силовыя комбинаціи и лишь то обстоятельство, что онъ всегда при этомъ представлялъ себѣ неподвижную ось какъ данную, помѣшало ему еще ближе подойти къ такому понятію о силовой парѣ, которое должно быть мыслимо независимымъ отъ какой-либо оси.

Если допустить понятіе силовыхъ паръ, съ самаго начала комбинируя вмѣсто моментовъ вращенія парныя силы, не принимая во вниманіе только еще подлежащую нахожденію ось, комбинируя ихъ по тѣмъ же законамъ какъ и простыя силы, слѣдовательно по правилу параллелограмма, и находя въ концѣ концовъ равнодѣйствующую силовую пару, то принципъ площадей приметъ соотвѣтству-

¹ Opuscula (1746), статья I de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, § 83 (стр. 113).

ющее выражение, въ извѣстномъ отношеніи еще болѣе совершенное. Извѣстно, что мѣрою пары силъ здѣсь служить произведеніе изъ взаимнаго разстоянія обѣихъ силъ на ихъ общую величину. Парное сочетаніе относится, натурально, не только къ силамъ въ собственномъ смыслѣ слова, но и къ количествамъ инерціи. Если теперь при сложеніи совсѣмъ не окажется пары внѣшнихъ силъ въ собственномъ смыслѣ слова, то получится именно только пара силъ инерціи, т.-е., другими словами, пара количествъ движенія, и она, очевидно, должна оставаться постоянною, ибо по предположенію внѣшнія силы ничего не измѣняютъ, а внутреннія силы также не могутъ оказать какого-либо вліянія въ одномъ направленіи, не уравнивъ вмѣстѣ съ тѣмъ въ противоположномъ направленіи убыль количества движенія прибавкою его, такъ чтобы алгебраическая сумма осталась безъ перемѣны. Въ самомъ дѣлѣ, принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія долженъ имѣть мѣсто столько же при силовыхъ парахъ, сколько и при простыхъ силахъ. Бѣлая опредѣленность принципа площадей, тотчасъ обнаруживающагося при сложеніи паръ, состоитъ въ томъ, что легко познается не только постоянство суммы площадей, моментовъ или паръ, но и неизмѣнность направленія плоскости, для котораго сумма эта вытекаетъ какъ результатъ обыкновеннаго сложенія. Правда, проэкція на всѣ возможныя плоскости должна давать постоянство этой суммы; но сама собою получающаяся плоскость есть та, къ которой дѣйствительная ось вращенія должна быть перпендикулярна, и сохраненіе этого существенно-важнаго направленія относится собственно также къ принципу площадей. Послѣдній, какъ мы, въ виду изложеннаго, всего проще можемъ сказать, есть въ сущности одна изъ сложныхъ формъ, какую обыкновенное начало косности или инерціи принимаетъ въ примѣненіи къ цѣлой системѣ. Но для полнаго опредѣленія инерціи недостаточно заданія только количества движенія, но нужно дать также и направленіе движенія. Позднѣе мы увидимъ, что та постоянная плоскость, въ которой должно представлять себѣ результирующее парное количество движенія по его направленію, также по весьма простымъ основаніямъ есть та плоскость, въ которой площади имѣютъ maximum, т.-е. гдѣ онѣ больше, чѣмъ при проложеніи на всякую другую плоскость.

121. Самое неопредѣленное изъ всѣхъ началъ, посредствомъ которыхъ характеризуется дѣйствіе силъ въ произвольной системѣ, есть начало наименьшаго дѣйствія. Мы уже говорили о немъ въ § 47 какъ о совершенно ясной основѣ, какою оно является въ качествѣ Ферматова начала въ выводѣ оптическаго закона преломленія, и вмѣстѣ съ тѣмъ видѣли тамъ, что его виновникъ смотрѣлъ во-

обще на природу какъ на «великую работницу», которая, исполняя свои задачи, всегда избираетъ кратчайшіе пути, т.-е. обходится возможно-малою затратою силы. Идея, что природа дѣйствуетъ въ смыслѣ наименьшаго сопротивленія, т.-е. дѣйствуетъ такъ, чтобы всякое возможное измѣненіе ея состоянія вело бы за собою преодоленіе возможно большаго сопротивленія и слѣдовательно развитіе возможно большаго количества дѣйствія,—идея эта, по крайней мѣрѣ, формально напоминающая образы нѣкоторыхъ античныхъ натурфилософемъ, около середины 18-го столѣтія взята была Мопертюи за исходный пунктъ, дабы въ области собственно механики выставить новый законъ или начало. Но и Мопертюи прежде всего также сдѣлалъ изъ него оптическое приложеніе къ отраженію и преломленію, и такое историческое слѣдованіе примѣру Фермата, здѣсь обнаруживающееся, объясняетъ намъ нѣкоторымъ образомъ то обстоятельство, что абстрактно-механическаго пониманія начала, о каковомъ Ферматъ не могъ еще и думать, опредѣленно оформить еще не удалось.

Ферматовскій кратчайшій путь, какому природа слѣдуетъ въ преломленіи лучей, означаетъ,—какъ это показываетъ относящееся сюда уравненіе,—очевидно, не иное что, какъ кратчайшее время. Если опредѣлить скорости свѣта въ срединѣхъ такъ, чтобы время, употребленное на прохожденіе пути между двумя точками, было меньше, чѣмъ сколько потребовалось бы на прохожденіе отъ одной изъ этихъ точекъ до другой по иному пути, то вычисленіе дастъ скоростныя отношенія, согласныя съ опытомъ, именно, обратныя отношенія дѣйствительныхъ показателей преломленія. Такимъ образомъ Ферматъ, во всякомъ случаѣ, обнаружилъ правильное свойство, именно существованіе минимума времени, хотя его точка зрѣнія цѣли, какъ несостоятельная, и должна быть отвергнута.

Мопертюи же примкнулъ именно къ этой несостоятельной точкѣ зрѣнія и, сверхъ того, какъ показываетъ его Парижскій мемуаръ, въ основаніе положилъ опровергаемую опытомъ идею о скоростяхъ свѣта, по Декарту, относящихся будто бы прямо пропорціонально показателямъ преломленія и имѣющихъ большую величину въ срединѣхъ болѣе плотныхъ, и такимъ образомъ своею философскою путаницею только испортилъ лучшіе Ферматовскіе зачатки.

У Мопертюи, при его склонности къ туманнымъ метафизическимъ, даже теологическимъ точкамъ зрѣнія, это были болѣе или менѣе шаткія представленія, и смыслъ ихъ точнѣе опредѣлялся только въ отдѣльныхъ примѣненіяхъ. Основываясь на этомъ же началѣ, онъ хотѣлъ установить «законъ покоя» для равновѣсія. Только примѣне-

нія его къ удару и къ равновѣсію на рычагѣ показываютъ точнѣе, что онъ думалъ. Впрочемъ, формулированія его и доселѣ не могли привести къ строгому отграниченію неоспоримаго начала, и это доказывается замѣчаніемъ Якоби ¹, что не должно принимать обыкновеннаго выраженія этого принципа, даже и у Лагранжа. Хотя Якоби и объявляетъ, что принципъ наименьшаго дѣйствія несправедливо оставленъ въ пренебреженіи ², и хочетъ понимать его въ смыслѣ наименьшей силовой затраты ³, снова такимъ образомъ возвращаясь къ натурфилософской идеѣ, совершенно отвергнутой Лагранжемъ, тѣмъ не менѣе несомнѣнно, что только шаткость идей Мопертюи, уже у Лангража ⁴ нашедшая себѣ порицаніе, виновна въ позднѣйшихъ разногласіяхъ, даже въ полномъ пренебреженіи или умолчаніи объ этомъ принципѣ въ новѣйшихъ и совсѣмъ недурныхъ начертаніяхъ и учебникахъ ⁵.

Работы Мопертюи, мемуаръ для Французской Академіи (1744) и другой въ Запискахъ Берлинской Академіи за 1746 г., если по возможности отвлечься отъ не идущихъ къ дѣлу телеологическихъ точекъ зрѣнія и обратить вниманіе только на главную идею съ главными примѣненіями чисто-механическаго свойства, можно изложить въ весьма немногихъ словахъ. Общій принципъ формулированъ у Мопертюи такъ: «Когда въ природѣ происходитъ измѣненіе, то потребное для этого измѣненія количество дѣйствія есть возможно наименьшее» (*La quantité d'action... est la plus petite qu'il soit possible*) ⁶. Тотчасъ же присовокупляется, что подъ количествомъ дѣйствія должно разумѣть произведеніе трехъ факторовъ: массы, скорости и пройденнаго съ этою скоростью пространства. Это такъ-называемое количество дѣйствія, состоящее, слѣдовательно, изъ произведеній вида mvs , въ которыхъ m означаетъ массу, v —скорость и s —пройденное пространство, должно такимъ образомъ, поскольку оно потребно для измѣненія состоянія движенія, быть минимальнымъ, т.-е. быть меньше всякихъ другихъ такъ-называемыхъ количествъ дѣйствія, которыя возникли бы въ отношеніи къ тому же измѣненію въ предположеніи другихъ соотношеній.

Чѣмъ глубже вдумываться въ этотъ яко бы высшій законъ природы, тѣмъ туманнѣе представляется его формулированіе у Мопер-

¹ Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866, стр. 45.

² Ibid, стр. 2.

³ Ibid, стр. 45.

⁴ Méc. analyt. т. I (1811). Dynamique. Sect. 1, art. 17.

⁵ Délaunay, Traité de mécanique rationnelle. 5 изд. Paris, 1873.

⁶ Histoire de l'académie de Berlin за 1746, стр. 290, въ статьѣ: Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique.

тн. Нужно точнымъ образомъ имѣть въ виду то, что онъ разумѣть подъ происходящимъ въ природѣ измѣненіемъ, которому долженъ соотвѣтствовать этотъ *minimum*. У него это измѣненіе есть разность между двумя такъ-называемыми количествами дѣйствія, изъ коихъ одно соотвѣтствуетъ состоянію до, другое состоянію послѣ процесса, будетъ ли послѣдній—дѣйствительнымъ или лишь представляемою, взятою въ помощь возможностью. Поэтому при ударѣ это измѣненіе, какъ говоритъ авторъ ¹, состоитъ въ томъ, что на мѣсто первоначальныхъ скоростей послѣ удара выступаютъ другія скорости и пути. Слѣдовательно, произведенія вида *mvs* измѣняются, однако, такъ, что скорость есть единственный факторъ, измѣняющійся независимо, тогда какъ относимое къ тому же времени пространство, въ сущности, есть лишь повтореніе выраженія скорости, и даже будетъ совершенно вѣрно, если для него за основаніе взять единицу времени. Такимъ образомъ, это измѣненіе, очевидно, состоитъ въ томъ, что теперь называютъ потерянными и приобретенными скоростями. Это—тѣ скорости, которыя являются, когда, принимая въ расчетъ знаки, ищутъ разности для каждаго тѣла какъ при упругомъ, такъ и при неупругомъ ударѣ. Квадраты этихъ разностей, умноженные на соотвѣтствующія массы, даютъ суммы, которыя и разсматриваются какъ *minimum*, и ихъ дифференціалъ поэтому приравняется нулю. Дифференцированіе, или какъ нынѣ нужно говорить, варіированіе, имѣетъ мѣсто относительно предполагаемыхъ неизвѣстными новыхъ скоростей, которыя, впрочемъ, и при упругомъ ударѣ приводятся къ одному неизвѣстному, ибо относительная скорость, по закону ея сохраненія, предполагается постоянною, т.-е. равною скорости до удара. Такимъ образомъ, изъ новаго дифференціального уравненія Мопертюи получаетъ величину новыхъ скоростей. Проще всего дѣло представляется при неупругомъ ударѣ, гдѣ разсмотрѣнію подлежитъ только одна новая скорость, именно общая скорость обоихъ тѣлъ. Здѣсь же всего яснѣе обнаруживается, что на дѣлѣ Мопертюи только и сдѣлалъ, что функцію, выражающую сумму потерянныхъ живыхъ силъ, разсматривалъ какъ своего рода *minimum*, и ея дифференціалъ, взятый по неизвѣстной общей скорости, приравнялъ нулю. При всякой другой резюльтирующей скорости функція, выражающая по нашему способу выраженія потерю живой силы, а по воззрѣнію Мопертюи—количество дѣйствія, потребное для измѣненія количествъ дѣйствія, оказалась бы больше, или, говоря точнѣе, не имѣла бы уже свойства обращать дифференціальное выраженіе, изъ нея выводимое,

¹ Ibid., стр. 290 и сл.

въ нуль. Мопертюи считалъ свою идею принципомъ природы, яко бы доказывающимъ соотвѣтствующую разумность въ управленіи природою, а съ механической стороны имѣющимъ яко бы еще то преимущество, что онъ выше принципа сохраненія живыхъ силъ, ибо имѣеть, будто бы, совершенно общее значеніе, какъ, наприм. для неупругаго удара, и даже не только для движенія, но и для равновѣсія.

122. Прежде чѣмъ перейти къ критикѣ только-что упомянутыхъ притязаній, мы должны еще коснуться примѣненія къ случаю равновѣсія. Подобно тому какъ въ динамикѣ Мопертюи ограничивается ударомъ и въ пополненіе къ своимъ метафизическимъ, въ большинствѣ случаевъ, совѣмъ не механическимъ изслѣдованіямъ не даетъ ничего, кромѣ изложенія этого примѣра, такъ онъ полагалъ, что совершенно достаточно, если онъ разсмотритъ случай рычага какъ ручательство пригодности своего принципа для всей статики. Точка опоры и слѣдовательно длина одного изъ плечъ принимается за неизвѣстное и, въ видахъ *minimum'a*, за переменное неизвѣстное. Для самаго состоянія равновѣсія скорость и пройденный путь строго равны нулю. Поэтому такъ-называемое количество дѣйствія можетъ быть мыслимо только въ предположеніи нѣкотораго малаго измѣненія. Въ такомъ разѣ, въ одно и то же время пробѣгаемыя дуги представляютъ вмѣстѣ и скорости, и пространства. Массы, помноженные на скорости и пространства, т. е. опять на квадраты пропорціональныхъ скоростей или, что не измѣняетъ пропорціональности, на квадраты плечъ, даютъ сумму, которая, по представленію Мопертюи, должна быть *minima*. Ее дифференцируютъ относительно длины одного изъ плечъ, слѣдовательно, этимъ самымъ, по относительной скорости, и дифференціалъ приравниваютъ нулю. Этимъ дифференціальнымъ уравненіемъ дается извѣстный законъ рычага, ибо его рѣшеніе показываетъ, что грузы должны быть обратно пропорціональны длинамъ плечъ.

Во всякомъ случаѣ нужно признаться, что не совѣмъ ясно, почему въ случаѣ равновѣсія потребное для измѣненія количество дѣйствія должно быть, послѣдовательно и вполне аналогично случаю удара, мыслимо какъ разность двухъ состояній движенія. Правда, можно, какъ это и сдѣлано, уподобить покой малому движенію и, какъ въ первоначальномъ состояніи количество дѣйствія строго равно нулю, тотчасъ за этимъ слѣдующее состояніе во всѣхъ его величинахъ разсматривать какъ измѣненіе, которому должно бы соотвѣтствовать минимальное количество дѣйствія. Если, затѣмъ, самое измѣненіе взять бесконечно малымъ, то при помощи закона непрерывности можно будетъ перенести отношенія на предѣльное

состояніе абсолютнаго равновѣсія. При этомъ даже совершенно ясно, что, выражаясь сообразно съ современнымъ нашимъ способомъ представленія, нужно варіировать самыя дифференціальныя пространства, дабы опредѣлить тѣ ихъ отношенія, которыя соотвѣтствуютъ minimum'у. При всемъ томъ все-таки кое-чего не хватаетъ для яснаго уразумѣнія, какимъ образомъ въ совершенно общемъ видѣ слѣдуетъ трактовать незначительное измѣненіе въ положеніяхъ какой угодно системы. Начало виртуальныхъ скоростей вывело бы здѣсь изъ затрудненія несравненно прямѣе и яснѣе, да и уравненіе, относящееся къ возможному, т.-е. виртуальному количеству дѣйствія, должно было бы быть способнымъ тотчасъ же къ преобразованію въ уравненіе виртуальныхъ скоростей. Хотя требуемая въ этомъ отношеніи разъясненія выводятся и довольно легко, тѣмъ не менѣе примѣромъ Мопертюи и его способомъ представленія предметъ никоимъ образомъ въ достаточной мѣрѣ не уясненъ. Его «законъ покоя» долженъ состоять въ томъ, что условія равновѣсія удовлетворены, когда требуемое для его нарушенія количество дѣйствія въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ точнымъ состояніемъ равновѣсія есть minimum. Такимъ образомъ, пріемъ этотъ, въ сущности, основанъ на изслѣдованіи, по закону непрерывности, неограниченно приближительнаго состоянія движенія вмѣсто строгаго равновѣсія; и такимъ образомъ этому динамическому принципу придается такое значеніе, какъ еслибы рѣчь шла непосредственно о нѣкоторомъ процессѣ движенія.

123. Въ томъ же 1744 г., но нѣсколько позднѣе Парижскаго мемуара Мопертюи, обнародовалъ Эйлеръ, какъ дополненіе, которымъ онъ закончилъ свой мемуаръ о методѣ нахожденія кривыхъ съ максимальными и минимальными свойствами, работу о томъ, какъ можно опредѣлять движеніе брошенныхъ тѣлъ по методѣ наибольшихъ и наименьшихъ. При этомъ онъ разсматривалъ не только параболическое движеніе брошеннаго тѣла, но вообще движенія подъ вліяніемъ центральныхъ силъ, дѣйствующихъ какъ функции разстояній. Во вступленіи къ вышеупомянутому берлинскому мемуару Мопертюи ссылается на то, что и Эйлеръ занялся тѣмъ же принципомъ. Въ самомъ дѣлѣ, нѣмецкій аналитикъ исходилъ изъ метафизическихъ точекъ зрѣнія; но не нужно забывать, что онъ помѣстилъ принципъ наименьшаго дѣйствія въ концѣ сочиненія содержавшаго основанія позднѣе расширеннаго и систематизированнаго Лагранжемъ варіаціоннаго исчисленія. Максимальная и минимальная метода, понимаемая въ весьма узкомъ смыслѣ, представляла уже у Фермата зародышъ дифференціального исчисленія; взятая въ наиболѣе широкомъ смыслѣ, она должна была сдѣлаться

методомъ варіацій и такимъ образомъ дать какъ бы новый родъ дифференцірованія или, по крайней мѣрѣ, новую точку зрѣнія на это исчисленіе. Разъ начали, какъ Эйлеръ въ упомянутой статьѣ, всюду въ разсмотрѣнныя кривыя варіировать отношенія величинъ, имѣя въ виду извѣстныя maxima и minima, не далеко было и до того, чтобы и естественныя, механическими силами производимыя, кривыя начали изслѣдовать въ этомъ же смыслѣ, всматриваясь, нельзя ли въ функціяхъ, отъ которыхъ зависятъ эти кривыя, натолкнуться въ какомъ-либо механическомъ отношеніи на какія-либо максимальныя или минимальныя свойства.

Въ дѣйствительности и Эйлеръ не особенно заботился о метафизической сторонѣ своихъ исходныхъ пунктовъ и результатовъ. Онъ сознается даже, что его способъ представленія не слишкомъ его удовлетворяетъ, и что онъ не можетъ ни обобщить его, ни даже отграничить область его приложений. Онъ держится своихъ частныхъ случаевъ, и ясно видно, что онъ можетъ поручиться только за то, что непосредственно ему видно въ опредѣленности аналитическихъ формулъ. То, что онъ такимъ образомъ выражаетъ, несравненно точнѣе того, что Мопертюи развиваетъ, даже слѣдуя этому примѣру. И Лагранжъ ¹ признаетъ это, восхваляя Эйлеровскую концепцію принципа какъ болѣе ясную, даже отличая ее отъ воззрѣній Мопертюи какъ совершенно иного рода идею, ведя и свои обобщенія въ этомъ же направленіи.

Слѣдуя Эйлеру ², разсмотрѣнію подлежитъ подобное же произведеніе, какъ и у Мопертюи, но въ дифференціальной формѣ. Масса, скорость и элементъ кривой (слѣд., по нашему обозначенію, $mvds$) образуютъ произведеніе, котораго интеграль, взятый между двумя точками (или соотвѣтственными предѣлами времени) долженъ имѣть то свойство, что его варіація можетъ быть приравнена нулю. Эйлеръ постоянно выражается, говоря, что этотъ интеграль долженъ быть наименьшимъ. Лагранжъ подсовываетъ въ приведенномъ мѣстѣ свою альтернативу между maximum'омъ и minimum'омъ, и этимъ хотя и исправляетъ Эйлера, но не даетъ о его концепціи никакого точнаго представленія. Эйлеръ держался исключительно minimum'а, какъ это и отвѣчало его понятію о наименьшемъ дѣйствіи. Лагранжъ, для котораго главнымъ дѣломъ были не логическія понятія, а вычисленіе, соотвѣтственно этому заботился только о томъ, что отвѣчало возможности приравнять варіацію нулю. Но эта

¹ Méc. anal. T. I (1811). Dynam. Sect. I, Art. 17.

² Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietate gaudentes. 1744, Additamentum II: De motu projectorum in medio non resistente per methodum maximorum ac minimorum determinando.

возможность настолько же есть признакъ максимума, насколько и минимума. Но если взять принципъ въ такой аналитической всеобщности, то онъ вполне теряетъ свою метафизическую основу и отрывается отъ своей, такъ сказать, логической исходной точки; ибо что же можетъ больше противорѣчить мысли о наименьшемъ количествѣ дѣйствія, если не возможность maximum'a этого количества!

Эйлеръ исходитъ отъ количества движенія и называетъ упомянутое произведеніе, въ которомъ количество движенія умножается на элементъ кривой, коллективнымъ движеніемъ (*motum collectivum*) ¹ для этого элемента. Интеграль этого элементарнаго коллективнаго движенія между двумя произвольными точками долженъ быть minimum, такъ чтобы никакая другая кривая, описанная между этими двумя точками, не имѣла этого свойства и не могла бы удовлетворять условіямъ опредѣляющихъ оное силъ.

Но дабы быть въ соотвѣтствіи и съ тою точкою зрѣнія, по которой живыя силы представляютъ дѣйствіе этого рода, Эйлеръ даетъ указанному произведенію другую форму: на мѣсто элемента кривой, который, будучи раздѣленъ на элементъ времени, даетъ скорость, онъ подставляетъ эту скорость, умноженную на элементъ времени. Подставивъ такимъ образомъ $v dt$ вмѣсто ds въ $m v ds$, онъ получаетъ $m v^2 dt$, т.-е. то, что онъ называетъ мгновенною живою силою. Итакъ, сумма или лучше интеграль этихъ мгновенныхъ живыхъ силъ между двумя произвольными предѣлами времени долженъ быть minimum, или, говоря точнѣе, варьяція его должна имѣть свойство обращаться въ нуль. Этотъ оборотъ приближалъ, съ виду, разсматриваемый принципъ къ операціямъ, примыкающимъ къ суммированію живыхъ силъ.

Такъ какъ Эйлеръ раскрываетъ этотъ принципъ только для одного тѣла, то все равно, какая будетъ масса, и прямо видно, что можно отнести этотъ интеграль непосредственно къ произведенію скорости на элементъ пространства или къ произведенію квадрата скорости на элементъ времени. Эйлеръ указываетъ, что для нѣсколькихъ тѣлъ нужно бы было взять сумму упомянутыхъ произведеній въ той или другой формѣ и отнести интеграль къ этой суммѣ или къ слагаемымъ. Но онъ того мнѣнія, что опредѣленія кривыхъ пути можно бы было проще достигнуть, основываясь на обыкновенныхъ принципахъ механики, и потому прекращаетъ дальнѣйшія вычисленія. Сверхъ того, онъ сознается, что не можетъ съ увѣренностью сказать, какъ широка область приложений этого принципа. Соединивъ вмѣстѣ все дѣйствительно обслѣдованное, увидимъ, что

¹ Ibid. Art. 2, стр. 309.

Оно ограничивается движеніемъ тѣла, разсматриваемаго какъ точка, причемъ, кромѣ скорости по инерціи, оно подвержено еще въ пустомъ пространствѣ дѣйствию центральныхъ силъ, какъ въ планетномъ движеніи. Эйлеръ начинаетъ съ простѣйшаго случая, когда не дѣйствуютъ никакія силы, и разсматриваетъ съ точки зрѣнія своего принципа одну остающуюся на-лицо скорость по инерціи. Такъ какъ она постоянна, то интеграль элементъ пути долженъ самъ быть *minimum* и даетъ прямую. Слѣдующій примѣръ у Эйлера, это—обыкновенное движеніе брошеннаго тѣла у поверхности земли, причемъ, однако, не принимается въ расчетъ сопротивленіе среды, и кривою искомаго *minimum'a*, естественно, является здѣсь парабола. Отъ этого примѣра или, лучше, съ этой ступени динамическихъ основныхъ воззрѣній переходитъ онъ къ разсмотрѣнію разстояній и къ свободному центральному движенію. На сопротивленіе среды онъ прямо указываетъ какъ на случай, который нельзя подвести подъ изучаемое начало, что, впрочемъ, едва-ли можно допустить относительнаго общаго закона природы. Въ концѣ концовъ, онъ предоставляетъ метафизикамъ дальнѣйшее разъясненіе такого общаго способа представленія, который его не вполне удовлетворяетъ. Въ самомъ дѣлѣ, собственныя его соображенія иногда не совсѣмъ удачны. Такъ, наприм., въ концѣ своей статьи онъ еще полагаетъ, что если разсматривать систему, это отношеніе можно бы было метафизически представлять себѣ такъ, какъ будто бы инерція всѣхъ тѣлъ могла дѣйствующими силами нарушаться лишь возможно-мало, такъ что дѣйствіе этихъ силъ приводилось бы такимъ образомъ къ *minimum*у. Эта точка зрѣнія кажется тѣмъ менѣе вѣрною, что съ равнымъ правомъ можно утверждать прямо противное, ибо силы производятъ такія движенія, при которыхъ ихъ дѣйствіе при возможныхъ комбинаціяхъ есть наибольшее. Но пока мы не станемъ останавливаться на этихъ возраженіяхъ, а прежде прослѣдимъ далѣе исторію принципа.

124. Лагранжъ примкнулъ къ Эйлеровской постановкѣ дѣла, поскольку она была чисто-аналитическою, но рѣшительно отвергъ всякую метафизическую идею, связанную съ точками зрѣнія цѣли или разумности. Даже основную точку зрѣнія—исхожденіе отъ *minimum'a*—выставилъ какъ обстоятельство, значенія не имѣющее, вводя во всѣ заключенія на мѣсто *minimum'a* неизмѣнно двоякую возможность *maximum'a* и *minimum'a*. Такимъ образомъ онъ распространилъ Эйлеровскую формулу, въ обоихъ ея видахъ, съ отдѣльнаго тѣла на систему различныхъ массъ и сообразно этому формулировалъ и принципъ, но съ ограниченіемъ, долженствовавшимъ подчинить употребленіе уравненія живыхъ силъ тѣмъ предположе-

ніямъ, съ какими оно связано у Лагранжа. Такимъ образомъ, если предположить взаимныя притягательныя силы или вообще центральныя силы, какъ функціи разстояній, то при этомъ предположеніи варьяція суммы произведеній массъ на интегралы произведеній скоростей на элементы кривой должна быть нулемъ, а слѣдовательно самая сумма быть maximum или minimum, если обѣ точки, между которыми нужно взять интеграль, предположить данными. Этотъ способъ пониманія принципа, который мы находимъ у Лагранжа какъ въ видѣ формулы, такъ и въ обстоятельномъ словесномъ разъясненіи ¹, выводится изъ общаго основнаго уравненія динамики, и, обратно, употребляется для того, чтобы въ сочетаніи съ уравненіемъ живыхъ силъ вывести изъ него всѣ основныя условія движенія и равновѣсія. Это — путь обратный тому, которымъ шли при доказательствѣ; тогда какъ прежде общее основное уравненіе динамики, играющее у Лагранжа роль совокупности всѣхъ воззрѣній механики, составляло точку опоры, теперь является результатомъ, что не должно удивлять насъ. Въ самомъ дѣлѣ, интегральная форма должна давать дифференціальную, а на принципѣ виртуальныхъ скоростей основанное основное уравненіе динамики и имѣть дифференціальную форму и непосредственно даетъ отношенія движенія или равновѣсія только для мгновенія. Самъ Лагранжъ замѣчаетъ, что прежде помощью комбинаціи расширеннаго имъ принципа наименьшаго дѣйствія съ уравненіемъ живыхъ силъ онъ создалъ себѣ общій методъ для разработки всякихъ задачъ механики. Но позднѣе и уже въ 1-мъ изданіи Аналитической Механики онъ послѣдовательно опирался только на общее основное уравненіе динамики и смотрѣлъ на свой, лишь несвойственно названный такъ, принципъ наименьшаго дѣйствія, который лучше слѣдовало бы назвать принципомъ maximum'a или minimum'a, просто какъ на результатъ вычисленія, вытекавшій изъ того основнаго уравненія, какъ и остальные главные свойства движенія.

Такъ какъ онъ, подобно Эйлеру, считалъ не неважною и точку зрѣнія, данную вторымъ преобразованіемъ, то въ заключеніе онъ прибавляетъ еще особое замѣчаніе ², что съ большимъ правомъ можно бы было рассматриваемое начало назвать принципомъ «наибольшей или наименьшей живой силы». Въ самомъ дѣлѣ, суммы живыхъ силъ системы, соотвѣтствующихъ нѣ которому мгновенію, внутри данныхъ предѣловъ суть maximum или minimum. Онъ считаетъ, что въ этой формѣ принципъ этотъ также:

¹ Мéc. analyt. T. I (1811). Dynam. Sect. III, Art. 39.

² Ibid. Art. 42.

непосредственно способенъ къ перенесенію на случай равновѣсія; ибо уже изъ основной формулы статики онъ особо доказалъ ¹, что изъ всѣхъ положеній движущейся системы положеніе наибольшей или наименьшей живой силы есть вмѣстѣ съ тѣмъ то, въ которое ее съ самаго начала должно бы было перенести, чтобы она находилась въ состояніи равновѣсія. Послѣдняя истина, слѣдовательно, и была тѣмъ, на что мѣтилъ Мопертюи съ своимъ «закономъ покоя».

Изъ сказаннаго достаточно видно, что у Лагранжа принципъ наименьшаго дѣйствія пересталъ уже имѣть явное логическое значеніе, признакомъ котораго было бы нѣчто большее аналитическаго свойства, выражавшагося возможностью дѣлать варьяцію нулемъ или предполагать альтернативу между maximum'омъ и minimum'омъ. Кто прежде всего спрашиваетъ объ уравненіяхъ и ихъ свойствахъ и въ аналитическихъ выраженіяхъ, безъ всякихъ логическихъ истолкованій, видитъ просто точнѣйшую, во всѣхъ отношеніяхъ удовлетворительную форму истинъ, тотъ легко удовлетворяется, порѣшивъ съ принципомъ такъ, какъ это сдѣлалъ Лагранжъ. Но совсѣмъ иначе представится задача, какъ скоро для аналитически вполнѣ опредѣленныхъ выраженій потребуютъ и соотвѣтствующихъ понятій. Для отдѣльныхъ частей этихъ выраженій таковыя всегда имѣются; но въ нашемъ случаѣ требуется удобопонятнымъ образомъ истолковать, наприм., не разъ охарактеризованное произведеніе изъ массы, скорости и элемента пространства или вторую его форму, именно произведеніе живой силы на элементъ времени. Когда берутся суммы и интегралы, то массы остаются постоянными, и потому всѣ знаки суммированія и измѣненія, непосредственно относящіеся къ этимъ произведеніямъ, слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ интегралъ можно поставить или передъ массами, или за ними. Аналитически это совершенно все равно, ибо и количество и операции остаются тѣ же; но съ логической точки зрѣнія является большая разница, ибо это приводится къ тому, что аналитически комбинируютъ вмѣстѣ и соединяютъ воедино именно то, что могло бы соотвѣтствовать нѣкоторому естественному понятію, какъ наприм. понятію нѣкотораго рода дѣйствія. Кромѣ того, представляется еще совершенно естественное требованіе—аналитическое обстоятельство, что варьяція равна нулю, точнымъ образомъ покрыть или въ ближайшемъ опредѣленіи болѣе широкими аналитическими признаками, или же въ совершенной его всеобщности логическимъ понятіемъ о соотвѣтствующихъ реальныхъ отношеніяхъ. Эйлера

¹ Ibid. Статика Sect. III, Art. 22.

выручило обыкновенное представлѣніе о минимумѣ; но этотъ способъ представлѣнія самъ по себѣ былъ недостаточно обоснованъ и, въ виду сомнѣній Лагранжа, своей старой формы удержать отнюдь не можетъ.

125. Чтобы показать, какъ шатки были всегда представлѣнія о принципѣ наименьшаго дѣйствія, и какъ иногда искали болѣе точныхъ руководящихъ понятій, приведемъ идею Карно, разсматривавшаго на примѣрѣ удара такъ называемыя потерянные силы какъ настоящій предметъ принципа наименьшаго дѣйствія. Послѣ удара, говоритъ Карно ¹, для неупругихъ тѣлъ дѣйствительно имѣющее мѣсто движеніе есть то, при которомъ сумма произведеній массъ на квадраты потерянныхъ скоростей—*minima*. При всякомъ другомъ движеніи, какое бы мы ни предположили, это свойство уже не имѣло бы мѣста. Такимъ образомъ, по воззрѣнію Карно, потеря живой силы при удалѣ неупругихъ тѣлъ есть *minima*, и въ этомъ-то именно и долженъ состоять принципъ наименьшаго дѣйствія.

Если припомнить сказанное нами о представлѣніяхъ Мопертюи, то ясно, что уже въ нихъ настоящій предметъ заключенъ на дѣлѣ составляли потерянные скорости. Та же точка зрѣнія приложима и къ упругому удару, если на мѣсто дѣйствительно потеряннаго дѣйствія подставить то, какое въ случаѣ отсутствія упругости было бы потеряно при одинаковыхъ, впрочемъ, обстоятельствахъ. Вообще, дѣло совсѣмъ не въ такъ называемой потерѣ какъ таковой, а лишь въ томъ, что взаимно уничтожившіяся и затраченныя на измѣненіе, хотя и возстановленныя при обратномъ измѣненіи, количества дѣйствія образуютъ *minimum* или, точнѣе говоря, имѣютъ аналитическое свойство, соотвѣтствующее *maximum*у или *minimum*у. Только измѣненіе, т.-е. порожденіе разницы состояній движенія есть то, ради чего возбуждается количество дѣйствія, должнствующее имѣть свойство, требуемое принципомъ. Такимъ образомъ, не специально потерянные, но вообще затраченныя въ превращеніи, т.-е. пошедшія на него силы, суть тѣ, къ которымъ должно относить этотъ принципъ, если хотятъ идеѣ Карно сообщить высшую всеобщность. Но постольку во всякомъ случаѣ нужно признать, что важно различать тѣ части скоростей или количествъ движенія, которыя вслѣдствіе взаимодействія въ какомъ-либо отношеніи взаимно уничтожаются и лишь въ предположеніи упругости снова выступаютъ какъ соотвѣтствующее возвратное дѣйствіе. Взаимное дѣйствіе основывается исключительно на томъ, что приходятъ

¹ Principes fondamentaux etc. Paris 1803, Art. 185, стр. 157.

въ дѣйствіе эти составныя части; остальные образуютъ просто остатокъ, на который не простирается вліяніе измѣненія, и онъ существуетъ просто по общему закону косности. Отсюда ясно, что принципъ, относящійся къ количеству дѣйствія собственно, непосредственно будетъ имѣть предметомъ составныя части перваго рода и потому прямо будетъ имѣть значеніе только для силовыхъ элементовъ, подпадающихъ затратѣ или превращенію.

Основаніе, въ силу котораго принципъ наименьшаго дѣйствія съ самаго появленія своего и до позднѣйшихъ концепцій оставался подѣ сильнымъ сомнѣніемъ, основаніе этому слѣдуетъ искать не столько въ метафизической постановкѣ логическихъ исходныхъ пунктовъ, сколько въ математической двусмысленности соотвѣтствующаго *minimum* у уравненія. Вплоть до Лагранжа, методъ котораго былъ точнѣе, давали себя въ обманъ нѣкоторому весьма понятному ложному заключенію. Старая традиція минимума, съ которою идея максимума была несовмѣстима, заставляла искать ближайшее аналитическое выраженіе путемъ приравниванія нулю дифференціала или варьаціи. При условіяхъ, какія давало подобное уравненіе, оперировали, находили, что извѣстныя изъ другихъ источниковъ механическія истины подтверждались, и затѣмъ заключали обратно, что положенный въ основаніе принципъ долженъ быть вѣренъ. Но на дѣлѣ имѣли право заключить лишь о томъ, что исходное уравненіе содержитъ необходимую механическую посылку или, другими словами—законъ механики. Но не имѣли права считать, что скрытая въ уравненіи общая истина покрывается идеею минимума, ибо въ точности то же самое уравненіе получилось бы, если бы за исходный пунктъ приняли совершенно противоположную идею принципа наибольшаго дѣйствія. И дѣйствительно d'Arcy, о которомъ мы упоминали въ § 119 по поводу его концепціи принципа площадей, проводя далѣе этотъ свой принципъ, пытался противопоставить его началу наименьшаго дѣйствія, какъ принципъ сохраненія дѣйствія. Если хорошенько взвѣсить максимальныя свойства, которыя можно указать какъ въ принципѣ площадей, такъ и въ началѣ сохраненія алгебраическихъ суммъ количествъ движенія и которыми характеризуются естественные эффекты въ противоположность произвольнымъ проежіямъ, то во всякомъ случаѣ сойдемся на томъ, что лучше всѣ эти характеристическія свойства слить вмѣстѣ и принять, что законъ наибольшаго дѣйствія — наиболѣе соотвѣтственная основа всѣхъ другихъ, а съ извѣстной точки зрѣнія, пожалуй, даже и минимальныхъ отношеній. Предварительное аналитическое условіе, одинаково относящееся и къ *maximum* у и къ *minimum* у, какъ извѣстно, есть возможность приравнять диф-

ференціалъ функціи или уравненія нулю. Правило это примѣнимо не только въ случаѣ обыкновенныхъ *maxima* и *minima*, гдѣ дѣло идетъ о томъ, чтобы найти соотвѣтствующее значеніе независимыхъ переменныхъ. Слѣдовательно, оно имѣетъ силу не только тамъ, гдѣ ходъ самой функціи ведетъ къ максимальному или минимальному свойству, но и въ тѣхъ высшаго рода задачахъ, которыя имѣютъ цѣлью опредѣленіе тѣхъ соотношеній между переменными, въ силу которыхъ интегралъ функціи этихъ переменныхъ принимаетъ *maximum* или *minimum*. Нашъ принципъ и представляетъ этотъ послѣдній случай. Далѣе, различіе максимума отъ минимума всюду основывается на отрицательности вторыхъ производныхъ или, говоря общѣе, тѣхъ комплексовъ функцій, которые относятся ко вторымъ степенямъ или вообще ко вторымъ измѣреніямъ приращеній. Лагранжъ ¹ различалъ случаи устойчиваго и неустойчиваго равновѣсія тѣмъ, что въ одномъ случаѣ имѣетъ мѣсто *maximum*, въ другомъ *minimum*, и пополнилъ въ этомъ отношеніи доказательство при изложеніи своего общаго приблизительнаго метода для динамическихъ задачъ ². Не смотря на это, простое различіе *maxima* отъ *minima* именно въ отношеніи къ принципу наименьшаго дѣйствія не встрѣчается кромѣ какъ въ случаѣ равновѣсія. Хотя и имѣются аналитическія средства ³, позволяющія по меньшей мѣрѣ опредѣлить положительность или отрицательность коэффиціентныхъ группъ 2-го измѣренія приращеній, и на затрудненіе наталкиваемся только въ томъ случаѣ, когда рассматриваемые члены обращаются въ нуль, такъ что приходится вести изслѣдованіе еще дальше, — тѣмъ не менѣе, мы не находимъ и у Лагранжа попытки дать вполне общее рѣшеніе вопроса о томъ, какія механическія особенности ведутъ за собою *maximum* интеграла, рассматриваемаго въ случаѣ принципа наименьшаго дѣйствія, и какія—его минимумъ.

126. Всѣ разсмотрѣнные доселѣ въ этой главѣ принципы были теоремами, выражавшими самыя общія свойства движенія какой угодно системы. Начало, къ которому мы переходимъ теперь, постольку не однородно съ первыми, поскольку оно не прибавляетъ никакого новаго свойства движенія, но лишь указываетъ, какимъ образомъ отношеніе между данными силами и произведенными движеніями можетъ быть замѣнено эквивалентнымъ отношеніемъ равновѣсія, въ силу котораго (отношенія) всѣ соотношенія величинъ, въ сущности, остаются тѣже и даже измѣненіе знаковъ лишь таково, что его

¹ *Méc. anal.* T. I (1811), Statique Sect. III, Art. 23.

² *Ibid.* Dynam. Sect. V, § 3, Art. 20 и сл.

³ Lagrange, *Théorie des fonctions*, 2-е изд. ч. II, Art. 64 и сл.

можно бы было произвести простымъ алгебраическимъ преобразованиемъ непосредственныхъ уравненій движенія.

О принципѣ д'Аламбера обыкновенно говорятъ, что при посредствѣ его всѣ задачи динамики сводятся къ статическимъ отношеніямъ. Это, вообще говоря, вѣрно; и однако, только Лагранжъ установилъ общее основное уравненіе динамики, а въ представленіяхъ, которыя примѣняли подъ именемъ принципа д'Аламбера, не всегда точно слѣдовали способу представленія самого д'Аламбера.

Выше (§ 101) мы познакомились съ пріемомъ Якова Бернулли, въ которомъ онъ по поводу задачи о центрѣ качанія ранѣе далъ все существенное, что въ д'Аламбертовомъ принципѣ сформулировано было съ сознаніемъ совершенно общей законности. Уже тамъ мы изложили различныя возможности, представляющіяся касательно способа сложенія трехъ классовъ силъ. Припомнимъ, что возможные силовыя дѣйствія въ свободномъ, т.-е. въ статически несвязанномъ состояніи, затѣмъ силы, потерянные вслѣдствіе статической связи и, наконецъ, дѣйствительныя результирующія движенія или противопоставленныя силы, вводимыя для погашенія этихъ движеній, образуютъ три группы, изъ коихъ въ отношеніи къ равновѣсію каждую отдѣльно по произволу можно разсматривать какъ равнодѣйствующую, или какъ слагающую. Яковъ Бернулли концептировалъ понятіе потерянныхъ силъ и впервые положилъ въ основаніе болѣе натуральный способъ сложенія. Силы, соотвѣтствующія дѣйствительнымъ движеніямъ, онъ принялъ за равнодѣйствующія, тогда какъ свободныя и потеряныя силы составляли у него слагающія.

Д'Аламберъ положилъ свой принципъ въ основаніе своей динамики ¹. Способъ обработки, имъ избранный ², о которомъ можно составить себѣ понятіе не только изъ словесной формулы, но также и изъ многочисленныхъ приложений во второй части книги, а особенно изъ вступительнаго примѣра ³, обращенъ непосредственно на разсмотрѣніе потерянныхъ силъ, т.-е. силовыхъ частей, взаимно уничтожающихся благодаря взаимному отношенію статически связанныхъ тѣлъ. Эти потеряныя силы, если ихъ разсматривать самихъ по себѣ, должны быть въ равновѣсіи; ибо иначе онѣ бы способствовали движенію, что противорѣчитъ понятію о нихъ. Утвержденіе, что эти потеряныя силы должны быть въ равновѣсіи, и составляетъ принципъ д'Аламбера, если строго слѣдовать тому узкому понятію, какое придано ему самимъ авторомъ. Напротивъ того, вве-

¹ Traité de dynamique, Paris 1743.

² Ibid. Стр. 49. (Другое изд. 1796, ч. II, гл. I, Art. 60).

³ Ibid. Стр. 69. (Другое изд. 1796, ч. II, гл. III, Art. 87).

деніе силъ противоположныхъ дѣйствительнымъ движеніемъ и непосредственное представленіе объ общемъ равновѣсіи этихъ силъ и двухъ другихъ силовыхъ группъ, принципиально получило общее примѣненіе только начиная съ Лагранжа ¹⁾. И родственное представленіе, что движенія, какія произведены были бы дѣйствующими на систему силами, если бы онѣ дѣйствовали свободно, могли бы слагаться изъ дѣйствительныхъ движеній и изъ потерянныхъ силъ, представленіе это было для самого д'Аламбера только средствомъ—ближе выяснить самостоятельное равновѣсіе, которое одно имѣетъ мѣсто между потерянными силами.

Уже цитированный главный примѣръ, которымъ д'Аламберъ начинаетъ разнообразныя примѣненія своего принципа, относится къ случаю стержня, укрѣпленнаго однимъ концомъ и обремененнаго различными грузами. Притомъ воображаютъ, что эти тѣла находятся подъ вліяніемъ побудовъ, которые въ свободномъ состояніи сообщали бы имъ опредѣленные данныя движенія. Такъ какъ, приэтомъ, мы здѣсь имѣемъ дѣло съ такою формою, которая можетъ быть сведена къ пространно разсмотрѣнной нами схемѣ сложнаго маятника, то намъ нѣтъ надобности входить въ дальнѣйшія подробности. Естественно, что д'Аламберъ разлагаетъ скорости совершенно такъ же, какъ это дѣлали Яковъ Бернулли и l'Hopital, а именно такъ чтобы можно было приложить отношенія равновѣсія между потерянными силами и такимъ образомъ вывести изъ полученнаго уравненія скорость самой крайней точки. Такое разложеніе силъ на двѣ составныя части, изъ коихъ однѣ должны быть въ равновѣсіи, тогда какъ другія способствуютъ движенію, характеризуетъ разсматриваемое начало. Кромѣ того, если припомнимъ, что случай движенія не находящагося въ равновѣсіи рычага, обремененнаго въ различныхъ точкахъ, можно разсматривать какъ основной типъ для лишь отчасти взаимно уничтожающихся движущихъ силъ, то намъ станетъ понятно, почему пришлось бороться со столькими затрудненіями, прежде чѣмъ этотъ нормальный случай динамики не былъ осилень соображеніями Якова Бернулли и д'Аламбертовскимъ ихъ обобщеніемъ. Имѣя это въ виду, можно бы было сказать, что если условія равновѣсія на рычагѣ были историческимъ и вмѣстѣ рациональнымъ исходнымъ пунктомъ всей статики, то динамика статически связанныхъ тѣлъ, въ свою очередь, указываетъ на условія движенія на рычагѣ какъ на исторически основной принципъ. Сложный маятникъ въ простой формѣ обремененной нѣсколькими тѣлами и въ одной изъ своихъ точекъ укрѣпленной линіи, въ сущности,

¹ Méc. anal. T. I (1811), Dynamique Sect. I, Art. 11.

есть ничто иное, какъ въ движеніи находящійся рычагъ, и эта точка зрѣнія вмѣстѣ съ тѣмъ объясняетъ значительность того шага, посредствомъ котораго Яковъ Бернулли силы на сложномъ маятникѣ поставилъ въ связь съ принципомъ равновѣсія рычага. Припоминая изслѣдованія объ этомъ послѣднемъ предметѣ въ предыдущей главѣ, замѣтимъ еще въ заключеніе о всѣхъ принципиальныхъ способахъ представленія, доселѣ изложенныхъ, что полное обобщеніе идеи частнаго равновѣсія, имѣющаго мѣсто при всякой динамической силовой комбинаціи, только и дастъ достаточно абстрактную и вполне удовлетворительную форму пониманія истинной природы и неумаленнаго значенія связи между статикою и динамикою. Впрочемъ, здѣсь пока еще неумѣстно болѣе подробное изслѣдованіе мысли объ этомъ частномъ равновѣсіи, о которомъ мы дали намекъ еще въ § 28, по поводу Галилеевскаго смѣшенія эффектовъ равновѣсія и движенія; прежде мы еще должны прослѣдить дальнѣйшее историческое развитіе общихъ принциповъ и систематики раціональной и аналитической механики.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Начало виртуальныхъ скоростей и систематизированіе механики Лагранжемъ.

127. Хотя, какъ мы ранѣе видѣли, принципъ виртуальныхъ скоростей, по меньшей мѣрѣ, такъ же старъ, какъ и новая, образцово начатая Галилеемъ механика, тѣмъ не менѣе, примѣненіе этого принципа, какъ исходнаго пункта, къ развитію всѣхъ остальныхъ истинъ механики началось еще недавно. Это послѣднее употребленіе принципа, впервые сдѣланное Лагранжемъ, знаменуетъ даже извѣстное завершеніе систематики механики. Примѣненіе фундаментальнаго принципа, представляющаго удобства для вычисленій, и неуклонное проведеніе аналитическаго развитія какъ главной руководящей нити, связывающей всѣ истины раціональной механики въ единую систему, — таковы два главныя свойства, которыми отличается Лагранжевскій способъ обработки.

Прежде чѣмъ изслѣдовать роль, какую виртуальный принципъ играетъ въ этомъ самомъ раннемъ и обширнѣйшемъ примѣненіи, мы должны кое что еще пополнить по исторіи его развитія. Прежде всего припомнимъ, что слѣды его можно было найти даже ранѣе Галилея, и что у самаго Галилея онъ не только ясно выставляется и примѣняется какъ статическое отношеніе, но что ему придается

и болѣе общая форма, поскольку онъ вездѣ полагается въ основаніе особаго понятія момента, каковое имѣлъ въ виду основатель динамики. Къ этому понятію момента, какъ мы также уже упоминали, вернулся только Лангранжъ, и основалъ на немъ свой способъ вывода общей статической и расширенной динамической основной формулы. А до тѣхъ поръ Галилеевскій способъ воззрѣнія находился въ забвеніи; и даже самый виртуальный принципъ, впрочемъ имѣвшій значеніе основы уже у Картезія, былъ отодвинутъ на второй планъ. Ньютонъ, какъ мы видѣли (§ 86), упоминаетъ о немъ мимоходомъ и придаетъ ему ограниченное значеніе, и такое воззрѣніе встрѣчаемъ даже и въ позднѣйшее время. Иванъ Бернулли былъ тѣмъ, кто впервые сталъ серьезнѣе смотрѣть на виртуальный принципъ и на его болѣе широкое значеніе. Правда, формулированіе, выставленное имъ въ его статьѣ на премию 1723 года о сообщеніи движенія, еще довольно тѣсно примыкаетъ къ Ньютоновской концепціи. Онъ говоритъ тамъ ¹: «Двѣ агенціи находятся въ равновѣсіи или имѣютъ равные моменты; когда ихъ абсолютныя силы обратно пропорціональны ихъ виртуальнымъ скоростямъ, будутъ ли взаимодействующія силы въ движеніи или въ покоѣ. Это—обыкновенный принципъ статики и механики и т. д.» Еще ранѣе въ письмѣ къ Вариньону (отъ 26 января 1717 г.) пытался Иванъ Бернулли возможно общѣе выразить этотъ принципъ, какъ доказываетъ слѣдующее предложеніе, въ которомъ принимаются въ расчетъ знаки ²: «Сумма положительныхъ энергій равна суммѣ отрицательныхъ, взятыхъ съ положительными знаками». Въ этой формѣ выраженія сквозить Галилеевское понятіе энергіи и ей соответствующаго момента силы. Соединеніе всѣхъ энергій въ двѣ группы, различающіяся знакомъ,—здѣсь главное. Недостаточно доказать принципъ для простыхъ машинъ или простыхъ силовыхъ отношеній, состоящихъ, въ сущности, только изъ двухъ членовъ, но дѣло въ томъ, чтобы высказать его для какой угодно системы силовыхъ комбинацій. Хотя Галилей ввелъ виртуальное начало уже и въ гидростатику, тѣмъ не менѣе нельзя отрицать, что Иванъ Бернулли, по меньшей мѣрѣ, сдѣлалъ шагъ, необходимый для того, чтобы представлять себѣ виртуальныя отношенія отдѣльно для частей какой угодно системы и для характеристики равновѣсія. А этимъ объясняется и то, что на Ивана Бернулли иногда указываютъ какъ на новѣйшаго основателя виртуальнаго принципа ³. На дѣлѣ же этотъ

¹ Opera, Lausanne, 1742. Т. III, Discours sur les lois de la communication du mouvement, гл. 3, стр. 23.

² У Вариньона, Nouvelle Mécanique etc., т. II, стр. 176.

³ Между прочимъ и Фурье въ «Mémoire sur la statique, contenant la démon-

математикъ только вернулся къ старымъ представленіямъ, причемъ у него получила преобладаніе большая общность, каковая почти сама собою являлась спутницею болѣе развитаго состоянія механики.

128. Если Ивану Бернулли принадлежитъ заслуга болѣе общаго формулированія виртуальнаго принципа, то Лагранжъ глубже всѣхъ понялъ по истинѣ фундаментальную его природу и сообразно этому сдѣлалъ его въ своей системѣ краеугольнымъ камнемъ всей механики. Чтобы понять эту роль принципа, нужно еще изслѣдовать тѣ особыя представленія, которыя устроитель аналитическихъ основныхъ формъ механической дедукціи имѣлъ о сущности виртуальной теоремы. Въ первомъ изданіи своей Аналитической Механики онъ принялъ это начало за аксіому, не пытаясь къ прежнимъ разъясненіямъ его присоединить и съ своей стороны какое-либо доказательство. Во второмъ изданіи онъ почувствовалъ потребность свой первый и важнѣйшій исходный пунктъ упрочить надежнѣе чѣмъ было доселѣ, и прибѣгнулъ къ приему ¹, въ которомъ принципъ силового дѣйствія на полиспаствѣ сдѣланъ единственнымъ средствомъ доказательства теоремы о виртуальныхъ скоростяхъ. Выгода, которая была бы съ этимъ связана, должна была главнымъ образомъ состоять въ томъ, чтобы два другіе принципа статики—принципы рычага и параллелограмма силъ—сдѣлать ненужными. Во всѣхъ прежнихъ изъясненіяхъ виртуальнаго закона, какъ справедливо утверждаетъ Лагранжъ, требовались оба эти основныя предложенія для выполненія комбинаціи виртуальныхъ скоростей. Впрочемъ, самыя отношенія на рычагѣ покрывались равенствомъ виртуальныхъ моментовъ; но никогда не удавалась дѣйствительная дедукція изъ совершенно обще схваченнаго виртуальнаго принципа. Но менѣе всего могли обойтись безъ сложенія или лучше безъ разложенія силъ, ибо уже въ формулированіяхъ самаго принципа предполагалась редуція скоростей перемѣщенія на направленія силъ, а взаимное уничтоженіе противоположныхъ виртуальныхъ моментовъ, очевидно, могло сдѣлаться понятнымъ только приведеніемъ къ одному направленію. Какъ бы то ни было, явно-ли, скрыто-ли, должна была явить-

stration du principe des vitesses virtuelles etc. Journal de l'école polytechnique, tome II (5-я терп.), page 21.

¹ Мéc. anal. T. I (1811) Statique Sect. I, Art. 18 и 19.—Доказательство посредствомъ полиспаста опубликовано Лагранжемъ еще ранѣе въ статьѣ Journ. de l'école polyt., 5. Cahier, t. II, p. 115, Sur le principe des vitesses virtuelles; сопоставлено съ вышеупомянутою статью Фурье, въ той же тетради.—Между прочимъ и Лапласъ въ Mécanique céleste, kn. I, Cap. 3 предпринялъ также попытку доказательства, а Пуансо взялъ на себя трудъ освѣтить неясности и круговую природу его въ особой статьѣ въ Лиувилевомъ Journal des mathématiques, T. III, 1838, стр. 244—248.

ся необходимость въ сложении скоростей и силъ. Новый выводъ Лагранжа, повидимому, совсѣмъ не нуждался въ сложении силъ. Полиспасть, извѣстное сочетаніе блоковъ, вставленныхъ частію въ неподвижныя, частію въ подвижныя муфты и охватываемыхъ одною нитью, система эта, взятая для доказательства какъ идеальная машина, имѣетъ во всякомъ случаѣ два важныя преимущества. Это есть средство единицу силы, представляемую равномернымъ натяженіемъ нити, не только произвольно размножать ранжировкою и накопленіемъ параллельныхъ частей нити, но и давать этимъ скопленіямъ силовой единицы произвольное направленіе, приводя соединительную линію между подвижною и неподвижною муфтами по произволу въ требуемое положеніе. Такимъ образомъ мысленно можно натяженіемъ одной совершенно гибкой и нерастяжимой нити, обходящей попеременно неподвижныя и подвижныя точки (блоки), произвести въ какомъ угодно направленіи силу опредѣленной величины и заставить ее дѣйствовать на данную точку. При помощи одной нити можно построить сколько угодно такихъ силъ, и всѣ онѣ вмѣстѣ взятыя представляютъ результатъ одной силы натяженія, приложенной въ видѣ груза или иначе къ свободному концу нити. Когда при каждой точкѣ приложенія находится извѣстное число одинаково натянутыхъ параллельныхъ частей нити, совокупно дѣйствующихъ посредствомъ подвижной муфты на нѣкоторый предметъ, то данныя въ этихъ натяженіяхъ силы суммируются. Число частей нити служить, поэтому, выраженіемъ силы. Это—простѣйшая форма параллельной комбинаціи силъ, какую только можно себѣ представить.

Если теперь взять систему тѣлъ или точекъ, на которую дѣйствуютъ какія угодно силы, то можно вообразить, что всѣ эти силы вмѣстѣ представлены однимъ полиспастомъ. Одна нить со своимъ равномернымъ натяженіемъ и съ вспомогательною системою неподвижныхъ и подвижныхъ точекъ, которая она обходитъ, замѣняетъ такую координаціей и различными направленіями своего натяженія всѣ силы системы. Если теперь должна быть доказана всеобщая законность принципа виртуальныхъ скоростей, то требуется только показать, что въ случаѣ неограниченно малаго перемѣщенія системы, т.-е. совокупности точекъ приложенія силъ, измѣненія разстояній подвижныхъ муфтъ относительно неподвижныхъ относятся между собою такъ, что сила на свободномъ концѣ не можетъ испытать никакого соотвѣтствующаго перемѣщенія своей точки приложенія посредствомъ измѣненія длины свободной, неукрѣпленной части нити. Лагранжъ, представляя себѣ на этомъ концѣ дѣйствительный грузъ, исходитъ отъ болѣе специальной точ-

ки зрѣнія, что этотъ грузъ въ предположеніи упомянутаго перемѣщенія не долженъ опускаться. Но такъ какъ общее понятіе силы существенно не связано съ тяжестью и вертикальнымъ направленіемъ, и такъ какъ, сверхъ того, полиспасть служить не какъ дѣйствительная машина, но лишь какъ идеальная комбинація, изъ которой нужно выкинуть все нужное лишь эмпирически, но въ идеальномъ отношеніи несущественное, то не понятно, зачѣмъ уготовлять себѣ бесполезныя затрудненія и ограничивать всеобщность разсужденія исключеніемъ возможности только паденія. Скорѣе, слѣдуетъ исключить всякую возможность, слѣдовательно также и поднятія или вообще перемѣщенія свободного конца нити относительно приложенной къ нему силы. Какъ скоро система, на которую дѣйствуетъ весь аппаратъ нитей, находится въ равновѣсїи, то неограниченно малыя перемѣщенія ея частей должны компенсироваться, и изъ нихъ не должно возникать никакого аналогичнаго вліянія на длину свободного конца.

129. Чтобы разобрать, что даетъ доказательство при посредствѣ полиспаста, и какой смыслъ могло бы оно имѣть, необходимо прежде всего ближе вникнуть въ содержаніе виртуальнаго начала и въ одно въ высшей степени существенное обстоятельство въ его формулировкѣ. Какъ скоро нѣкоторая система находится въ равновѣсїи, то неограниченно малыя пространства, пробѣгаемые по направленіямъ силъ при неограниченно маломъ перемѣщеніи, т.-е. виртуальныя скорости будутъ таковы, что сумма произведеній этихъ пространствъ или скоростей на соотвѣтствующія силы будетъ равна нулю. Это свойство можно еще выразить, сказавъ, что силы въ случаѣ равновѣсїа должны быть обратно пропорціональны виртуальнымъ скоростямъ. Но этакій способъ представленія только тогда непосредственно ясенъ, когда сравнивается не болѣе двухъ тѣлъ. Въ примѣрѣ рычага оба способа представленія не представляютъ никакихъ затрудненій; здѣсь только два возможныхъ, т.-е. виртуальныхъ перемѣщенія, именно или въ одну, или въ другую сторону вращенія около точки опоры. Малыя дуги, одновременно проходимыя, въ этомъ случаѣ пропорціональны плечамъ рычага. Грузы должны быть или обратно пропорціональны плечамъ, или, слѣдуя второму способу представленія, ихъ произведенія на соотвѣтствующія частички дугъ должны давать въ суммѣ нуль. Послѣднее имѣетъ мѣсто, предположить ли вращеніе въ одну сторону, или въ противоположную; ибо оба произведенія равны, и одно изъ нихъ, именно каждый разъ то, которое соотвѣтствуетъ дугѣ, пробѣгаемой противоположно направленію силы, будетъ отрицательно. Здѣсь мы имѣемъ простѣйшій примѣръ того, какимъ образомъ въ алгебраическую сумму вир-

туальных моментов слѣдуетъ вводить знаки. И опредѣленіе извѣстныхъ моментовъ, какъ отрицательныхъ никоимъ образомъ не есть легко рѣшаемое второстепенное дѣло, но окажется тотчасъ-же главнымъ пунктомъ, одинаково важнымъ для пониманія и обоснованія принципа, какъ скоро познано все значеніе этого пункта.

Когда перемѣщеніе точки приложенія силы имѣетъ мѣсто какъ разъ въ направленіи противоположномъ направленію дѣйствія этой силы, то сила дѣйствуетъ отрицательно, ибо она стремится затормозить рассматриваемое измѣненіе положенія въ томъ смыслѣ, въ какомъ оно имѣетъ мѣсто. Иное дѣло, когда перемѣщеніе происходитъ въ точности въ сторону дѣйствія силы. Правда, и тутъ существуетъ сопротивленіе; но оно обусловливается противною силою, дѣйствіе которой передается изъ другой точки системы на рассматриваемую точку, какъ это на примѣрѣ рычага легко видѣть. Непосредственно въ этой точкѣ приложенная сила дѣйствуетъ положительно и даетъ положительный моментъ, ибо виртуальный путь пробѣгается по ея направленію.

Не такъ просто отношеніе, какъ скоро рассматривается обыкновенный случай, когда нѣтъ строгой противоположности или согласія направленій перемѣщеній и силъ. Впрочемъ, всѣ эти промежуточные случаи между обѣими этими крайними возможностями, вмѣстѣ съ послѣдними, суть лишь особыя формы одного и того-же общаго отношенія. Это важное обстоятельство ясно замѣчается, если изслѣдовать еще третій, особенно выдающійся случай, именно, когда перемѣщеніе перпендикулярно направленію силы. Извѣстно, что въ этомъ случаѣ виртуальный моментъ равенъ нулю, ибо виртуальная скорость есть нуль. По направленію силы въ этомъ случаѣ не пробѣгается никакое пространство, ибо проекція перемѣщенія даетъ просто точку. Во всѣхъ другихъ промежуточныхъ положеніяхъ, слѣдовательно, и въ общемъ случаѣ, когда уголъ, образуемый направленіями перемѣщенія и силы, не равенъ ни нулю, ни прямому, ни выпрямленному, будетъ имѣть мѣсто опредѣленная редукція, и перемѣщеніе, проложенное на направленіе силы, нужно брать по положительнымъ, когда уголъ острый, и отрицательнымъ, когда онъ тупой. Впрочемъ, эти случаи, равно какъ и особо отмѣченные, подводятся подъ общее правило: всегда редуцировать перемѣщеніе сообразно направленію и смыслу дѣйствія силы и такимъ образомъ оцѣнивать его величину и знакъ. И крайнія формы суть только отдѣльные результаты одной и той-же точки зрѣнія. Редукція перемѣщенія къ той его части, которая пробѣгается въ сторону дѣйствія силы или противоположно ему, т.-е. вообще по линіи дѣйствія силы, имѣетъ рѣшающее значеніе, и если причину самаго пе-

перемѣщенія разсматривать какъ силу, то можно бы было сказать, что соотвѣтствующія этимъ неограниченно малымъ перемѣщеніямъ, нарушающія равновѣсіе, силы, измѣряемая по направленію силъ, дѣйствующихъ на систему, своими взаимодѣйствіями должны уничтожаться и давать сумму моментовъ равную нулю.

Логически естественное выраженіе виртуальной теоремы предполагаетъ замѣну обычнаго проложенія возможныхъ перемѣщеній на направленія силъ обратнымъ способомъ проектированія, т.-е. редуціей силъ на направленія перемѣщеній. Только то обстоятельство, что въ противоположность нѣсколькимъ возможностямъ перемѣщеній направленіе дѣйствующей силы остается одно и тоже, и объясняетъ намъ такую неестественность въ группировкѣ факторовъ виртуального момента. Съ чисто аналитической точки зрѣнія одинаково можно мыслить косинусъ угла, образуемаго направленіями перемѣщенія и силы, какъ умноженнымъ на элементарное перемѣщеніе, такъ и на абсолютную и свободную силу. Но естественно только ограниченіе силы и ея редуція къ направленію возможнаго или предполагаемаго возможнымъ перемѣщенію точки приложенія. Притомъ, согласно только такому способу представленія получается и простѣйшее формулированіе главнаго принципа, а именно, что въ случаѣ равновѣсія виртуальное, т.-е. сообразно возможностямъ перемѣщеній редуцированное и измѣренное силовое дѣйствіе должно быть равно нулю. Строго говоря, такое формулированіе включаетъ еще предположеніе, чтобы, какъ это дѣлалъ Лагранжъ въ своей Теоріи функціи, перемѣщенія, какъ величины чисто вспомогательныя, исключались, а на мѣсто ихъ вводились бы количественные факторы, какъ бы заранѣе дающіе мѣру развитію перемѣщеній и такъ сказать предшествующіе этимъ перемѣщеніямъ, слѣдовательно, строго пунктуальныя возможности скоростей.

130. Если разсматривать виртуальное дѣйствіе силъ, то принципъ уже упроченъ, и дальнѣйшій вопросъ только въ томъ, какъ измѣрять это виртуальное дѣйствіе. Но чтобы знать, какъ оцѣнивать виртуальное дѣйствіе силъ, нужно прежде согласиться насчетъ того, какъ и какими факторами вообще опредѣлять силовое дѣйствіе. Актуальное или свободное силовое дѣйствіе даетъ также мѣру для выраженія просто возможнаго и виртуальнаго, т.-е. ограниченнаго дѣйствія. Такимъ образомъ виртуальный принципъ отсылаетъ къ понятію величины силы и ея факторовъ. Напередъ нужно рѣшить вопросъ объ отношеніяхъ силы къ скорости и пространству, и только послѣ этого можетъ быть рѣчь объ утвержденіи виртуальнаго принципа на прочномъ основаніи. Но какъ скоро этотъ фундаментальный пунктъ рѣшенъ, то достаточно простаго

предложенія, что виртуальное дѣйствіе въ случаѣ равновѣсія должно быть нулемъ. Въ такомъ случаѣ это виртуальное дѣйствіе тотчасъ же представится въ видѣ суммы виртуальныхъ моментовъ, а эти моменты опять можно представить себѣ составленными, какъ угодно, или какъ произведенія изъ силъ, редуцированныхъ сообразно направленію, и изъ относительныхъ скоростей, или же изъ этихъ силъ и элементарныхъ пространствъ. Можно даже этимъ моментамъ придать всякое механическое понятіе, способное выражать мгновенное дѣйствіе силы, вынужденной дѣйствовать по опредѣленному направленію и не выходя изъ предписанныхъ отношеній скоростей.

Чтобы устранить всякія недоразумѣнія, уже здѣсь припомнимъ, что виртуальное дѣйствіе можетъ быть совокупностью сколькихъ угодно возможностей, тогда какъ актуально мыслимо только одно единственное движеніе. Конецъ рычага можно отклонять по двумъ направленіямъ. Изъ двухъ точекъ, связанныхъ съ однимъ и тѣмъ же разстояніемъ, каждая можетъ перемѣщаться во всѣхъ направленіяхъ, и даже есть два перемѣщенія, при которыхъ соотвѣтствующее виртуальное перемѣщеніе другой точки можетъ быть нулемъ. Взятая на плоскости свободная точка также есть родъ системы, какъ скоро она служить точкою приложенія нѣсколькихъ силъ, и виртуальныя ея перемѣщенія, это—совокупность всѣхъ радіусовъ, которые можно вообразить около нея въ небольшомъ кругѣ. Какъ скоро силы должны быть около этой точки въ равновѣсіи, они должны взаимно уничтожаться для каждаго радіуса, на который ихъ представляютъ дѣйствующими, и на который ихъ пролагаютъ. Само виртуальное перемѣщеніе есть въ этомъ случаѣ общій факторъ, который нѣтъ надобности принимать въ соображеніе. Слѣдовательно, остаются только самыя редуцированныя силы, и потому онѣ должны въ каждомъ произвольномъ направленіи на плоскости давать общую сумму—нуль. Если разсматривать свободную точку въ пространствѣ, то нужно бы было принять въ соображеніе еще большее разнообразіе, а именно разсматривать всѣ радіусы небольшого, описаннаго около этой точки шара какъ виртуальныя перемѣщенія. Возможность, что для какого-либо изъ этихъ перемѣщеній сумма соотвѣтствующихъ виртуальныхъ моментовъ или, что тоже, силъ, редуцированныхъ къ направленію этого перемѣщенія, не равняется нулю, должна быть исключена, если силы должны находиться въ равновѣсіи. Это множество виртуальныхъ перемѣщеній, какъ извѣстно, можно привести къ тремъ существеннымъ, соотвѣтствующимъ тремъ измѣреніямъ пространства. Въ самомъ дѣлѣ, если моменты или редуцированныя силы для трехъ, нележащихъ въ одной плоскости, направленій равны нулю,

то они должны быть равны нулю и для всѣхъ остальныхъ, ибо всякій другой моментъ долженъ выводиться посредствомъ проекцій изъ тѣхъ трехъ, которые сами равны нулю. Методъ приведенія виртуальностей или возможностей, существующихъ въ большемъ числѣ, къ этимъ существеннымъ и независимо руководящимъ случаямъ, является главнымъ средствомъ Лагранжа, съ помощью котораго аналитическія варьаціи условныхъ уравненій, дѣйствительныхъ для механической системы, получаютъ столь широкое значеніе. Но въ этомъ мѣстѣ намъ нужно было только показать, что понятіе виртуальнаго силового дѣйствія включаетъ представленіе возможностей, точнѣе опредѣляющихся, если принять въ соображеніе устройство механической системы. Но при этомъ даже и нѣтъ надобности сразу принимать въ расчетъ всѣ ограниченія, вносимыя системою, но можно мало-по-малу пользоваться отдѣльными необходимыми отношеніями и имъ соотвѣтствующими уравненіями условій для суженія области возможностей силового дѣйствія. Такимъ образомъ вначалѣ получается широкая арена, для которой можно опредѣлять виртуальное силовое дѣйствіе, чтобы потомъ значительно ссузить его сферу, и наконецъ точкою приложенія окончательной общей оцѣнки виртуальнаго эффекта сдѣлать наименьшее число всегда открытыхъ возможностей. Этимъ, очевидно, будутъ исчерпаны всѣ возможности, ибо все, что въ этихъ возможностяхъ второстепенно, т.-е. является простымъ слѣдствіемъ другихъ, уже принятыхъ въ расчетъ, возможностей, будетъ исключено какъ неимѣющее значенія. На этомъ приемѣ основывается главный Лагранжевскій методъ аналитической разработки виртуальнаго начала. Но вернемся къ исходному пункту нашего изслѣдованія и посмотримъ, какъ по установленію общаго смысла виртуальнаго начала будетъ выглядѣть доказательство его посредствомъ полиспаста.

131. При обсужденіи доказательства посредствомъ полиспаста нужно припомнить, что виртуальное начало обратимо, и что слѣдовательно оно включаетъ два утвержденія. Если существуетъ равновѣсіе, то сумма виртуальныхъ моментовъ во всякомъ случаѣ равна нулю, и обратно, какъ скоро имѣетъ мѣсто послѣднее, то должно существовать и равновѣсіе. Главное предложеніе, натурально, то, которое мы привели здѣсь какъ обратное предложеніе, ибо въ механикѣ рѣчь идетъ не столько о слѣдствіяхъ и свойствахъ, сколько о предварительныхъ условіяхъ равновѣсія и движенія. Принципъ долженъ насъ научить опредѣлять условія равновѣсія, хотя бы исторически онъ и служилъ прежде всего просто для характеристики общаго свойства существующаго равновѣсія. Впрочемъ, Лагранжъ исходитъ отъ даннаго равновѣсія и прежде

всего доказываетъ предложеніе, что въ предположеніи этого даннаго равновѣсія сумма виртуальныхъ моментовъ равна нулю. Наглядное уясненіе, какое здѣсь даетъ идеальный полиспасть, въ извѣстномъ смыслѣ соотвѣтствуетъ тому способу представленія, который въ отношеніи къ редукціи направленія былъ нами выставленъ какъ первый и обыкновенный. Въ силу вышеописаннаго расположенія, подвижные механизмы приложены въ различныхъ точкахъ системы. Для простоты вообразимъ себѣ, наприм., рычагъ, т.-е. вращающійся около точки стержень, къ концамъ котораго приложены силы, т.-е. подвижныя муфты полиспаста, не под прямыми углами, но въ различныхъ косвенныхъ направленіяхъ. Виртуальное перемѣщеніе поведетъ за собою удлинненіе отстоянія одной изъ подвижныхъ муфтъ отъ неподвижной, и этому удлинненію будетъ соотвѣтствовать укороченіе на другомъ концѣ. Виртуальныя перемѣщенія въ нашемъ примѣрѣ, въ которомъ стержень рычага мы представляемъ себѣ горизонтальнымъ, очевидно, вертикальны. Но соотвѣтствующія имъ укороченія и удлинненія или, другими словами, перемѣщенія точекъ приложенія въ направленіяхъ самыхъ силъ и суть вышерассмотрѣнныя редукціи, возникающія чрезъ умноженіе перемѣщенія на косинусъ угла, образуемаго вертикальнымъ, въ данномъ случаѣ, направленіемъ перемѣщенія съ направленіемъ силы, т.-е. здѣсь съ направленіемъ группы нитей. Въ самомъ дѣлѣ, размѣръ рассматриваемой группы нитей укорачивается или удлиняется только на величину проекціи виртуальнаго перемѣщенія на направленіе нитей, ибо въ то время какъ точка приложенія, рассматриваемая какъ конецъ линіи дѣйствія силы, пробѣгаетъ перемѣщеніе отвѣсно, она вмѣстѣ съ тѣмъ приближается (либо удаляется) въ косвенномъ направленіи къ группѣ нитей, конецъ коей она составляетъ, на величину проекціи этого перемѣщенія. Это настолько наглядно, что нельзя бы было подыскать лучшаго поясненія. Услуга, доставляемая въ этомъ случаѣ полиспаствомъ, дѣйствительно состоитъ въ томъ, что при его посредствѣ обыкновенному способу представленія редукціи перемѣщенія придается, по крайней мѣрѣ, непрямой механическій смыслъ. Виртуальный моментъ, который такимъ образомъ строится, въ самомъ дѣлѣ слагается изъ нередуцированной силы, измѣряемой числомъ нитей, и изъ перемѣщенія, редуцированнаго на направленіе этой силы, т.-е. на направленіе нити. Для краткости Лагранжъ называетъ это перемѣщеніе виртуальною скоростью. Точнѣе слѣдовало бы его назвать виртуальною скоростью по направленію силы; ибо оно не есть просто слѣдствіе устройства или приспособленія системы, но зависитъ отъ случайнаго положенія приложенной силы.

Укороченія и удлинненія, весьма просто формирующіяся въ примѣрѣ рычага, очевидно, должны для каждой системы равновѣсія такъ складываться, чтобы отнюдь не измѣнять общей длины нити. Разъ это не такъ, они дѣйствовали бы на грузъ или вообще на силу, приложенную къ свободному концу нити, и перемѣщали бы точку ея приложенія, что было бы противно предположенію, ибо оставался бы нѣкоторый остатокъ отъ движущей силы какъ излишекъ надъ взаимною компенсаціей. Но эта возможность исключается понятіемъ равновѣсія. Всякое движеніе свободного конца, даже если бы оно было неограниченно мало, выражало бы свободный избытокъ силы. Но такая сила не должна возникать, когда силы, по предположенію актуально уравнивающіяся, представляются и виртуально взаимодействующими. Невозможность измѣненія длины нити непосредственно дана самымъ равновѣсіемъ, а отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что парціальныя укороченія и удлинненія должны взаимно компенсироваться. Всякое удлинненіе или укороченіе размѣра простой нити, представляемой группою параллельныхъ нитей, выражаетъ виртуальный моментъ соотвѣтствующей силы. Въ самомъ дѣлѣ, умножая каждый разъ число нитей на соотвѣтствующее сокращеніе группы какъ таковой, т.-е. на проэкцію виртуальнаго перемѣщенія, вѣдь и вычисляютъ виртуальный моментъ и вмѣстѣ съ тѣмъ полное укороченіе простой длины нити въ параллельной группѣ. Такимъ образомъ постоянство общей длины нити, заключающейся изъ отдѣльныхъ длинъ группъ, означаетъ, что сумма виртуальныхъ измѣненій должна быть равна нулю, а это и есть виртуальная теорема въ предположеніи даннаго равновѣсія.

Нетрудно доказать и обратное предположеніе ¹. Въ самомъ дѣлѣ, если дано, какъ фактъ, не равновѣсіе, а то обстоятельство, что виртуальные моменты уничтожаются взаимно, то въ отношеніи къ идеальному полиспаству это означаетъ ничто иное какъ то, что полная длина нити не измѣняется и что, слѣдовательно, ея свободный конецъ съ приложенною къ нему силою остается въ одинаковомъ положеніи. Но это есть признакъ равновѣсія; ибо еслибы взаимодействующія силы давали бы избытокъ, то послѣдній долженъ бы былъ сказаться удлинненіемъ или сокращеніемъ нити.

132. Таковъ въ существенныхъ чертахъ новоизобрѣтенный способъ доказательства, которымъ пользуется Лагранжъ, чтобы сдѣлать этотъ основной принципъ независимымъ отъ рычага и отъ параллелограмма силъ и основать его исключительно на идеальномъ полиспаствѣ. Ближайшее возраженіе, что изъ всѣхъ такъ называе-

¹ Cp. Méc. anal. T. I (1811), Statique, Sect. I, Art. 20.

мыхъ простыхъ машинъ полиспасть всего менѣе простъ, ибо предполагать дѣйствіе на блокѣ, возраженіе это во всякомъ случаѣ можно устранить, такъ какъ вѣдь идеальный полиспасть требуетъ сплошь однихъ мысленно легко схватываемыхъ и весьма простыхъ понятій. Нерастяжимая, гибкая линія вмѣстѣ съ группами неподвижныхъ и подвижныхъ точекъ, какъ мы видѣли, есть достаточная мысленная схема для представленія всѣхъ силъ по напряженію и направленію такъ, какъ намъ угодно, и для нагляднаго изображенія виртуальныхъ процессовъ. Но если Лагранжъ прямо и не пользуется чисто воображаемою схемою, то все-таки онъ не обращаетъ вниманія на треніе и предполагаетъ, что блоки могутъ быть уменьшены неограниченно. Итакъ, достаточно было бы сдѣлать еще одинъ шагъ, чтобы превратить полиспасть въ схему, столь же мало какъ и схемы рычага или наклонной плоскости связанную съ механическими случайностями. Какъ всякая линія, на которой одна точка представляется неподвижною, а остальные удобовращаемыми, представляетъ идеальную схему рычага, такъ даже строжайшее заключеніе можетъ смѣло оперировать съ воображаемою совершенно ясною комбинаціей нити съ нѣкоторыми неподвижными и подвижными точками. Единственнымъ понятіемъ, необычность котораго могла бы возбудить сомнѣніе, было бы охватываніе неподвижныхъ и подвижныхъ точекъ гибкою линіей и скольженіе ея по этимъ точкамъ. Но вѣдь пользуется же механическая дедукція даже идеальными каналами, когда нужно вообразить предписанный путь, и вообще должно быть дозволяемо выходить за предѣлы чисто геометрическихъ понятій при посредствѣ новыхъ идеальныхъ, приноровленныхъ къ механикѣ, образовъ. Таковъ именно и есть идеальный полиспасть, и потому его можно разсматривать какъ превосходное средство для нагляднаго представленія силовыхъ отношеній.

Не смотря на это преимущество, все таки еще остается одно неблагопріятное обстоятельство, а именно редуція направленія силы— понятіе, которое въ виртуальномъ принципѣ обойти никакъ нельзя. Что толку въ томъ, что законъ сложенія силъ, дѣйствующихъ подъ угломъ, прямо не формулированъ, если въ нѣкоторой прикрытой формѣ все-таки примѣнять его нужно? Впрочемъ, самый принципъ полиспаста даетъ средство къ наглядному усмотрѣнію, что сила, въ случаѣ заданнаго пути точки ея приложенія, можетъ произвести только такое двигательное дѣйствіе, которое редуцируется въ отношеніи косинуса разсматриваемой разности направлений. Двигательные эффекты, производимые нитями при различныхъ ихъ наклоненіяхъ, всегда ограничиваются дѣйствительными сокращеніями, какъ скоро результатъ движенія относить къ собственному направленію

нитей. Однако, смысл такого сокращенія отнюдь не ясенъ непосредственно, ибо самое это укороченіе есть сложный результатъ, который требуется расчленивъ и разъяснить. Поэтому допустимъ для простоты, что рѣчь идетъ не о виртуальной скорости, а лишь о виртуальномъ направленіи, и вообразимъ себѣ, что оно опредѣляется нѣкоторымъ прямымъ каналомъ, то одинъ изъ концовъ группы нитей будетъ передвигать вдоль наприм. щели этого канала помѣщенную въ немъ подвижную точку въ одномъ изъ двухъ возможныхъ направленій. Еслибъ нити дѣйствовали не косвенно, а по направленію самого канала, то вся содержащаяся въ нихъ сила пошла бы на движеніе, и редукиція направленія не имѣла бы мѣста. Но тяга нитей одною своею частью дѣйствуетъ на стѣнки канала и это давленіе не производитъ никакого движенія. Только осталшая часть силы, совпадающая съ направленіемъ канала, производитъ перемѣщеніе. Величина же послѣдняго относится къ сокращенію группы нитей, т. е. къ движенію, производимому ею въ собственномъ ея направленіи, какъ единица къ проекціи или, что то же, къ косинусу разсматриваемаго угла. Самую же единицу, представляемую частью движенія въ каналѣ, опять можно разсматривать какъ редукицію двигательнаго дѣйствія, которое возникло бы, еслибы абсолютная сила приложена была не косвенно, а по направленію канала. Поэтому отрѣзокъ, проложенный на самое направленіе нити, не можетъ означать того редуцированнаго движенія, которое возникаетъ въ каналѣ, слѣдуя обыкновенной редукиціи. Послѣднее есть путь, пробѣгаемый подъ вліяніемъ редуцированной силы; другой же путь есть тотъ, который долженъ быть пройденъ при полной силѣ, чтобы произведеніе изъ пути на силу оставалось эквивалентомъ редуцированнаго дѣйствія. Инаго смысла съ укороченіемъ группы нитей соединять нельзя. Итакъ, оказывается, что хотя простую редукицію направленія дѣйствія силы и можно сдѣлать при помощи полиспаста нагляднѣе, но нельзя сдѣлать ее яснѣе, чѣмъ она есть и безъ этого и при простомъ приложеніи силы безъ подобнаго аппарата. Положимъ, что непосредственно приложена тяга, дѣйствующая изъ неподвижнаго центра, развиваемая сокращеніемъ нити по направленію къ этому центру, то въ каналѣ возникло бы перемѣщеніе, которое получили бы дѣленіемъ этого укороченія на косинусъ разсматриваемаго угла. Это было бы даже чисто геометрическимъ отношеніемъ, такъ какъ точка перемѣщается къ центру только вслѣдствіе того, что соответствующій разсматриваемый путь она проходитъ въ неподвижномъ каналѣ. На эту простую уловку, основывающуюся на необходимостяхъ и отношеніяхъ феноменальныхъ движеній, можно бы было, поэтому, смотрѣть какъ на математиче-

ское доказательство закона редукии направленія силы, еслибы этимъ давалось нѣчто большее соотношенія между двигательными явленіями. Насколько сложеніе пространственныхъ движеній уже само по себѣ не есть сложеніе силъ, настолько же и редукиа направленія или, если угодно, проэктивная концепція двигательнаго явленія не можетъ сама по себѣ заступить мѣста ни опредѣленія величины силы для заданнаго направленія дѣйствія, ни общаго принципа такого опредѣленія. Но если уже эта простая схема не выдерживаетъ критики, то тѣмъ болѣе не выдерживаетъ ея процессъ на полиспаствѣ, гдѣ схема эта является вмѣстѣ съ нѣкоторыми побочными вещами. Такимъ образомъ редукиа направленія силы остается независимымъ принципіальнымъ предположеніемъ и аксіомою, которую нельзя замѣнить ни закономъ полиспаства, ни какою либо составною частью виртуальнаго принципа.

133. Теорема, которая не содержится въ принципѣ полиспаства и которую нельзя изъ него вывести, какъ изъ чего-либо болѣе простаго, касается, какъ мы только что видѣли, того правила, по которому дѣйствіе силы приводятъ къ данному опредѣленному направленію. Но эта теорема почти эквивалентна общему принципу сложенія и разложенія силъ; ибо разъ ее имѣемъ, то легко ее превратить и въ параллелограммъ силъ и, что весьма важно, при посредствѣ ея предпринять редукию силовыхъ дѣйствій къ координатнымъ осямъ. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ попытки развить основныя истины механики безъ этой теоремы о редукии направленія не могли достигнуть цѣли. Какой бы принципъ ни выбрать за исходный, всегда въ немъ будетъ подразумѣваться сознательно, или безъ яснаго сознанія, эта теорема, ибо безъ нея нельзя сдѣлать ни одного шага, какъ скоро рѣчь идетъ о комбинаціи дѣйствій разнаго направленія. Кто, какъ Лагранжъ, тотчасъ начинаетъ съ аналитической оснастки, тотъ неминуемо долженъ тотчасъ же ввести, по крайней мѣрѣ, разложеніе движеній по осямъ координатъ, а такъ какъ это разложеніе двигательныхъ явленій, если принять въ расчетъ силовыя напряженія и массы, тотчасъ же переходитъ въ разложеніе дѣйствительныхъ силъ, то въ редукии всякихъ отношеній къ осямъ координатъ явно кроется обыкновенный принципъ сложенія силъ. Итакъ, доказательство, веденное этимъ путемъ, можетъ имѣть превосходныя качества; но должно отказаться отъ всякихъ притязаній на то, будто бы можно было при этомъ обойтись безъ параллелограмма силъ.

Вся пятая глава третьей части Лагранжевой Теоріи функцій посвящена развитію виртуальнаго принципа, которое можно разсматривать какъ послѣднее, совершеннѣйшее изложеніе доказатель-

ства полиспагомъ, а на дѣлѣ имѣеть еще большее значеніе, ибо позволяетъ выводъ общей формулы принципа изъ простѣйшихъ и элементарнѣйшихъ отношеній. Итакъ, если уже во второмъ изданіи Аналитической Механики виртуальная теорема устанавливается окончательно и только доказывается полиспагомъ, а затѣмъ приводится къ аналитической формулѣ, то второе изданіе Теоріи функций, появившееся двумя годами позднѣе перваго тома второй переработки Аналитической Механики, имѣеть немаловажное преимущество, аналитически выводъ виртуальную теорему какъ слѣдствіе условныхъ уравненій, отъ которыхъ зависятъ взаимныя дѣйствія отдѣльныхъ тѣлъ или точекъ системы. Заданная поверхность или путь служатъ здѣсь типомъ для всякихъ условий, и совокупность всевозможныхъ отношеній, которыя могутъ быть заданы уравненіями между координатами различныхъ точекъ, образуетъ все, что можетъ быть предписано просто распоряжкомъ системы и, какъ опредѣленіе, имѣть силу для взаимныхъ перемѣщеній. Это какъ бы обыкновенная глава о силовомъ дѣйствіи, когда принимаются въ расчетъ неподвижныя поверхности или пути, превращенная въ главу, исходящую изъ значительно болѣе общей точки зрѣнія и дающую универсальнѣйшій отчетъ о движеніи или вообще о силовомъ дѣйствіи въ предѣлахъ даннаго распорядка системы. Окончательный результатъ этого отчета и есть формула принципа виртуальныхъ скоростей.

Лангражъ даетъ довольно ясно понять ¹, что онъ сознаетъ, что во второмъ изданіи Теоріи функций онъ сдѣлалъ въ изложеніи усовершенствованіе, выводъ начало изъ уравненій условій. Методъ этого вывода состоитъ въ томъ, что вся совокупность взаимныхъ двигательныхъ дѣйствій, возможныхъ въ силу уравненій условій, сначала выражается неопредѣленными силами, факторы которыхъ даются дифференціальными коэффиціентами или первыми производными, которыя можно изъ этихъ уравненій составить отдѣльно для каждой координаты. Эти неопредѣленные множители представляютъ такія составныя части моментовъ силъ, которыя ближе опредѣляются лишь изъ реакціи на приложенныя силы. Такимъ образомъ, они должны какъ бы оставаться открытыми, чтобы совершенно абстрактно только то опредѣленно выражалось и какъ бы опредѣлялось, что дѣйствительно вытекаетъ просто изъ распорядка системы и регулируетъ взаимныя перемѣщенія совершенно общимъ образомъ. Эти взаимныя дѣйствія должны компенсироваться, и если ввести противоположныя имъ силы и приравнять имъ, то суммиро-

¹ Théorie des fonctions anal., 3-й отд. гл. 5, чл. 30.

ваніе этихъ уравненій и дать виртуальное начало. Слѣдовательно, формула послѣдняго выводится исключительно изъ уравненій условій, нормирующихъ взаимное положеніе точекъ системы. Только нельзя умолчать здѣсь объ одномъ обстоятельствѣ. А именно, необходимо функции, выводимыя изъ уравненій условій, совсѣмъ не содержащихъ время, формально обрабатывать такъ, чтобы они являлись не непосредственными функциями координатъ, а функциями времени, въ продолженіи котораго происходитъ измѣненіе положенія или вообще положеніе точки подчиняется нѣкоторому условію, покоя ли, или движенія. Это отнесеніе ко времени—операция, аналитически весьма простая и логически вполне дозволительная, ибо время, при всѣхъ обстоятельствахъ, можетъ образовать независимое перемѣнное, къ которому можно относить координаты даже въ случаѣ покоя, по крайней мѣрѣ, формально.

134. Въ одномъ не несущественномъ пунктѣ употребленіе идеальнаго полиспага въ Теоріи функций отличается отъ его примѣненія въ Аналитической Механикѣ. Въ послѣдней онъ былъ еще совершенною, хотя и идеальною машиною, съ свободнымъ концомъ нити, и даже съ грузомъ или силою на этомъ неукрѣпленномъ концѣ. Новое, болѣе раціональное устройство представляетъ совершенно идеальный аппаратъ изъ неподвижныхъ блоковъ и нити, которая безъ посредства подвижныхъ блоковъ многократно обходитъ вокругъ самихъ, имѣющихъ двигаться, тѣлъ и наконецъ прикрѣпляется и къ послѣднему тѣлу своимъ концомъ, который прежде оставался свободнымъ. Такимъ образомъ, фактически на тѣла еще не дѣйствуютъ никакія силы, а представлены только отнесенія и направленія, къ которымъ должны быть редуцированы силы, которыя будутъ къ тѣламъ приложены. Но если представимъ себѣ, что какое либо изъ этихъ тѣлъ производить тягу, то натяженіе распространится на всѣ остальные и отношенія взаимодѣйствій тотчасъ же опредѣлятся, какъ скоро еще присовокупить, что должно существовать равновѣсіе. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ тяга, существующая въ нити въ одномъ направленіи, должна быть совершенно равна тягѣ въ другомъ направленіи, такъ чтобы не было никакого избытка движенія въ одномъ какомъ либо направленіи. Итакъ, чтобы не только длина нити оставалась вообще постоянною, что могло бы имѣть мѣсто и при одностороннемъ движеніи, но чтобы измѣненія этой длины, которыя здѣсь имѣютъ стремленіе обнаружиться въ противоположныхъ направленіяхъ, взаимно компенсировались бы сообразно съ уравненіями условій, необходимо, чтобы неопредѣленный факторъ натяженія, при этомъ предполагаемый, при каждомъ тѣлѣ раздѣлялся бы такъ, чтобы вирту-

альное сокращение или удлинение давало бы съ этимъ факторомъ произведение, которое, будучи сложено съ себѣ равнымъ, давало бы въ результатѣ нуль. Отсюда можно ясно усмотрѣть роль неопредѣленнаго силового фактора въ этихъ виртуальныхъ моментахъ. Лишь когда вообразить себѣ, что къ тѣламъ приложена система силъ, опредѣляется и натяжение нити и абсолютная величина взаимнаго дѣйствія. До тѣхъ же поръ аппаратомъ нитей, который эквивалентенъ уравненіямъ условій, выражалось только относительное. Аналитически же только важенъ уже въ предыдущемъ параграфѣ разсмотрѣнный пунктъ, что частные дифференціальные коэффициенты или производныя, опредѣляемые изъ уравненій условій, представляютъ пропорціи, въ какихъ тѣла другъ на друга дѣйствуютъ просто въ силу распорядка системы.

Дальнѣйшее преимущество новой формы доказательства состоитъ въ постепенности его хода. Сначала простая нить соединяетъ другъ съ другомъ два тѣла чрезъ неподвижный блокъ; затѣмъ, такое же точно расположеніе выполняется посредствомъ двухъ неподвижныхъ блоковъ, чтобы далѣе можно было при помощи нити различнымъ образомъ охватывать тѣла и блоки. Уравненія условій идутъ рядомъ съ этими подготовленіями распорядка системы, причемъ каждый разъ ихъ мыслятъ замѣненными эквивалентною простою формою, называемою Лагранжемъ ¹ касательнымъ уравненіемъ по аналогіи съ геометрическимъ касаніемъ, такъ что видно, что на самомъ дѣлѣ отношенія производныхъ функцій выражаютъ обоюдныя необходимости положенія и что аппаратъ нитей дѣйствительно представляетъ наглядное поясненіе этихъ отношеній.

Таковы великія преимущества этого новаго варіанта доказательства; но нужно указать еще на одинъ, который на первый взглядъ можетъ показаться ошибочнымъ. Именно, цитированная пятая глава основывается на трехъ первыхъ и опирается на указанную въ нихъ редукцію пространствъ, скоростей и силъ на координатныя оси. Такимъ образомъ, здѣсь уже нѣтъ никакого сомнѣнія, что разложеніе силъ составляетъ посылку къ развитію виртуальнаго принципа. Въ теоріи функцій послѣдній выступаетъ конечнымъ пунктомъ ряда выводовъ, въ которомъ уже покончено со всѣми элементарными отношеніями, касающимися движенія тѣла, разсматриваемаго какъ точка. Все, что затѣмъ слѣдуетъ въ шестой и седьмой главахъ, какъ завершеніе механической теоріи функцій, содержитъ тѣ принципіальныя главныя теоремы (движеніе центра тяжести, начало площадей, сохраненіе живыхъ силъ и т. д.), которыя получаются у Ла-

¹ Ibid. Art. 28.

гранжа аналитическою разработкою формулы виртуальнаго принципа. Если сравнить эту систематику съ систематикою Аналитической Механики, то увидимъ, что она отличается отъ послѣдней только тѣмъ, что къ тому, что предшествуетъ виртуальному принципу, въ ней прибавленъ еще элементарный фундаментъ, въ которомъ выступаютъ настоящія аксіомы механики, и находитъ себѣ мѣсто и начало разложенія силъ ¹.

Правда, это начало разложенія или, что тоже, общее начало сложения силъ прямо разсматривается Лагранжемъ въ вышеуказанномъ порядкѣ изложенія какъ начало, совпадающее съ сложениемъ пространствъ. Онъ утверждаетъ ² даже, что всѣ доказательства сложения силъ, какія только были даны, были лишь замаскированными доказательствами сложения пространствъ (*la composition des espaces déguisée*), впрочемъ, за исключеніемъ тѣхъ доказательствъ, которыя основаны были на равновѣсіи прямолинейнаго рычага. Но такой способъ воззрѣнія только еще болѣе подкрѣпляетъ систематическую послѣдовательность; ибо если бы даже принципъ сложения и былъ въ дѣйствительности объясненъ принципиально правильно, все-таки, по крайней мѣрѣ, въ разсматриваемомъ мѣстѣ онъ долженъ былъ явиться слѣдствіемъ сложения простыхъ путей движенія и потому тѣмъ очевиднѣе служить исходнымъ и опорнымъ пунктомъ всему дальнѣйшему, а между прочимъ и виртуальному принципу. Такимъ образомъ, аппаратъ нитей уже не имѣетъ цѣлью оправданія разложенія силъ по различнымъ направленіямъ, а служитъ лишь для совершенно общаго нагляднаго уясненія распорядка системы, т.-е. всего, что во взаимныхъ отношеніяхъ между тѣлами можетъ быть предписано какими бы то ни было сочетаніями и зависимою ихъ.

Въ заключеніе здѣсь умѣстно еще указать на то, что въ нѣкоторомъ весьма простомъ смыслѣ полиспасть, передствомъ координаціи натяженій, представляетъ принципъ сложения силъ по одной и той же линіи. Кромѣ того, онъ служитъ средствомъ перенесенія силы полностью въ другое направленіе, и наконецъ, если привести его въ движеніе, то непосредственнѣйшимъ образомъ наглядно уясняетъ работу силы и законъ эквивалентности обоихъ факторовъ работы. Напряженіе силы выражается числомъ нитей, а путь по направленію силы—сокращеніемъ или удлинненіемъ. Произведеніе пути на силу сохраняетъ свою величину, если число нитей уменьшить или увеличить въ томъ же отношеніи, въ какомъ увеличиваютъ или уменьшаютъ измѣненіе длинъ группы.

¹ Ibid. 3 отд., гл. 2, члены 8 и 9.

² Ibid. заключеніе члена 9.

135. Для характеристики историческаго значенія, какое виртуальный принципъ получилъ въ эпоху Лагранжа, нужно обратить вниманіе на нѣкоторые особые факты. Послѣ того какъ Лагранжъ, въ своей Аналитической Механикѣ (1788), сдѣлалъ этотъ принципъ фундаментомъ системы и общимъ основнымъ типомъ всѣхъ дифференціальныхъ уравненій механики, не было недостатка ни въ монографіяхъ, ни въ особыхъ разсужденіяхъ объ этой, снова выступившей на первый планъ, теоремѣ и объ ея новыхъ слѣдствіяхъ. Особый довольно объемистый трактатъ Фоссомброни, посвященный исключительно виртуальному принципу¹, далъ даже самому Лагранжу поводъ въ письмѣ къ автору² весьма характерно высказаться о результатѣ этого спеціального изслѣдованія и объ общихъ принципахъ механики. Лагранжъ пишетъ: «Если и можно еще чего-либо желать въ механикѣ, это—сближенія и соединенія принциповъ, служащихъ ей основаніемъ, а пожалуй, и строгаго и прямого доказательства этихъ принциповъ». Затѣмъ онъ замѣчаетъ, что Фоссомброни нашелъ, что бываютъ случаи, когда виртуальное уравненіе имѣетъ силу для конечныхъ разностей, и это—тѣ случаи, въ которыхъ имѣется нѣчто среднее между устойчивымъ равновѣсіемъ и такимъ, въ которомъ пертурбація вызываетъ стремленіе къ дальнѣйшему отклоненію отъ равновѣсія. Въ этомъ случаѣ, относящемся къ равновѣсію, нынѣ обыкновенно называемому безразличнымъ, нужно представлять себѣ, какъ мы должны присовокупить, пертурбацію только какъ геометрическое перемѣщеніе, а не какъ дѣйствіе, хотя бы и неограниченно малой, возмущающей силы. Хорошимъ примѣромъ этого случая служить рычагъ, ибо если подпереть его точнымъ образомъ въ центрѣ тяжести, то даже какое угодно конечное вращеніе не измѣнитъ состоянія равновѣсія. Впрочемъ, универсальное изслѣдованіе трехъ родовъ равновѣсія, собственно, здѣсь насъ не касается; замѣтимъ только, что Лагранжъ долженъ былъ въ Аналитической Механикѣ пустить въ ходъ всѣ средства анализа, чтобы обѣ стороны этой противоположности подвести подъ опредѣленные признаки и именно указать на *minima* и *maxima* живыхъ силъ, какъ на выдающіеся признаки устойчивости и неустойчивости.

Что касается общаго замѣченія Лагранжа о состояніи принциповъ механики, то это признаніе тѣмъ болѣе можетъ служить къ уясненію систематики самого автора, что его Аналитическая Механика уже существовала почти цѣлое десятилѣтіе. Какъ показывается

¹ Fossombroni, Memoria sul principio delle velocita virtuali, Firenze 1796.

² Отъ 31 мая 1797; приведено въ новѣйшемъ изданіи сочиненій Галилея, Т. XIII (1855), Предисловіе Стр. XXIV.

второе изданіе въ концѣ его жизни и какъ поучаютъ первое и второе изданія его Теоріи функций, Лагранжъ постоянно трудился надъ большимъ углубленіемъ и болѣе строгимъ очищеніемъ принципиальныхъ основъ. Тѣмъ менѣе, поэтому, должно удивлять насъ возбужденіе, какое испытывали другіе мыслители подъ вліяніемъ его твореній. Къ послѣднимъ въ особенности принадлежитъ старшій Карно, который въ своемъ, не разъ нами цитированномъ сочиненіи объ основныхъ принципахъ механики ¹, пытается собственными размышленіями обогатить и виртуальный принципъ, который онъ, примыкая къ способу представленія Лагранжа, называетъ для краткости Галилеевскимъ принципомъ ².

Именно, Карно придаетъ большое значеніе возрѣнію на виртуальныя перемѣщенія сплошь какъ на чисто геометрическіе процессы, которымъ не соотвѣтствовала бы никакая силовая реальность и для которыхъ, слѣдовательно, не должно-бы было предполагать производящей возмущающей силы. Даже онъ прямо ³ утверждаетъ, что равновѣсіе превратилось бы отъ самой малѣйшей силы въ чисто геометрическое движеніе; но что нужна конечная сила, чтобы произвести иной родъ возмущенія. А именно, геометрическими онъ называетъ всякія движенія, которыя не измѣняютъ взаимныхъ отношеній тѣлъ, но представляютъ лишь безразличное, не основывающееся на взаимномъ дѣйствіи, измѣненіе положенія безъ динамическаго эффекта. Но ясно, что эта идея чисто-геометрическаго перемѣщенія имѣетъ цѣлю, слѣдуя обыкновенному приему, ввести перемѣщенія какъ таковыя какъ нѣчто произвольное и немотивированное, чтобы не было нужды въ какомъ-либо особомъ отчетѣ и оцѣнкѣ ихъ причинъ. Очевидно, и малѣйшая сила, какъ скоро она вообще предполагается, должна въ противность строгому состоянію равновѣсія произвести динамическое измѣненіе. Противное этому представленіе всего менѣе можетъ найти себѣ оправданіе у Карно, который, какъ показываетъ одно изъ его достойныхъ замѣчаній сочиненій ⁴, наряду съ Лагранжемъ всего болѣе способствовалъ уясненію понятія о безконечно-малыхъ. Чтобы произвести длящееся упраздненіе устойчиваго равновѣсія, во всякомъ случаѣ, нужна сила не только конечная, но и превышающая извѣстный количественный предѣлъ; но пертурбація, ограничивающаяся простыми колебаніями, и въ этомъ случаѣ производится какъ угодно малою

¹ Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement, Paris 1803.

² Ibid. Art. 121, Стр. 93.

³ Ibid. Art. 159, Стр. 129.

⁴ Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal; впервые въ 1797; 2-е изд. 1813; 4-е изд., Paris, 1860.

силою. Если рассуждать строго, то и неограниченно малую силу, стремящуюся нарушить строгое равновѣсіе, должно представлять себѣ, что касается ея дѣйствія, какъ силу, отличающуюся отъ опредѣленной силы только величиною дѣйствія, а не его способомъ. Возможность неограниченнаго уменьшенія приводитъ всякія дѣйствія къ элементарной формѣ, но не дѣлаетъ изъ нихъ чисто геометрическихъ образовъ безъ всякаго механическаго значенія для отношеній данныхъ силъ.

136. Если Карнотовское представленіе и можетъ сохранить нѣкоторый смыслъ, то только благодаря соображенію, что для неограниченно малыхъ перемѣщеній силовыя дѣйствія измѣняются относительно другъ друга только на величины втораго порядка, и что, слѣдовательно, въ силу основныхъ теоремъ исчисленія, эти измѣненія при выводѣ уравненія можно оставить безъ вниманія. Но уже новѣйшая форма пониманія виртуальнаго уравненія какъ соотношенія между виртуальными работами данныхъ силъ достаточно ясно показываетъ, что всякое возмущеніе неминуемо должно разсматривать какъ динамическій эффектъ.

Тѣмъ не менѣе, своимъ указаніемъ на понятіе чисто геометрическаго перемѣщенія, Карно оказалъ услугу, заставивъ обратить вниманіе на то, что обыкновенная концепція элементарныхъ измѣненій положенія въ системѣ вводитъ нѣчто какъ бы извнѣ мысленно привносимое, не спрашивая о механическомъ эффектѣ этого нарушенія. Такимъ образомъ, этимъ непредназначенно указывается пунктъ, существенно виновный въ томъ, что представленія объ эвентуальномъ силовомъ дѣйствіи не вполне удовлетворительны. Какъ скоро виртуальный принципъ переносится и на движущуюся систему, уже совсѣмъ нельзя обойти разсмотрѣнія возможныхъ перемѣщеній какъ эвентуальныхъ силовыхъ дѣйствій, опредѣляющихся по обыкновеннымъ законамъ и, слѣдовательно, вводящихъ и дѣйствіе второстепенныхъ количественныхъ элементовъ втораго порядка. Виртуальное уравненіе вообще имѣетъ характеръ всѣхъ дифференціальнхъ уравненій, то есть оно сокращенной формы, или, употребляя способъ выраженія Карно, представляетъ безконечно малое неравенство. Натурально, это неравенство, въ случаѣ уравненій между дѣйствительными и непосредственными дифференціалами—по меньшей мѣрѣ, втораго порядка, и слѣдовательно, когда сумма неограниченно малыхъ величинъ полагается равною нулю, то, чтобы снова возстановить отброшенную часть, нужно только представить себѣ, что на мѣсто нуля поставлена безконечно-малая величина втораго порядка. Эта идеальная поправка для строгаго мышленія абсолютно необходима, и прямо въ духѣ цитированнаго

сочиненія Карно, устанавливающаго ясное понятіе несовершенныхъ уравненій (*équations imparfaites*), должно бы даже было вмѣстѣ съ виртуальнымъ уравненіемъ и Лагранжево доказательство способомъ полиспаства истолковать въ томъ смыслѣ, что во всякомъ случаѣ можно предполагать безконечно малое измѣненіе общей длины нити между точками системы, но только измѣненіе втораго порядка. Когда нить на другомъ концѣ несвободна, но укрѣплена, соответствующее представленіе становится труднѣе; но и здѣсь должно вообще принимать измѣненія втораго порядка какъ слѣдствіе перемѣщенія,—измѣненія, которыя тамъ, гдѣ они не могутъ аффицировать длину нити, обусловливаютъ какое либо незначительное измѣненіе въ натяженіи. Естественно, есть особые случаи, въ которыхъ, принимаются-ли въ расчетъ или нѣтъ величины высшихъ порядковъ, имѣетъ мѣсто строжайшее равенство, и въ которыхъ поэтому длина нити ни малѣйшимъ образомъ не аффицируется. Въ отношеніи къ этимъ случаямъ можно бы было припомнить замѣчаніе Лагранжа о результатѣ Фоссомброни. Именно, когда на мѣсто дифференціаловъ можно поставить какія угодно разности, такъ что при нѣкоторой опредѣленной ихъ величинѣ виртуальное уравненіе имѣетъ силу точнымъ образомъ, т.-е. безъ всякихъ урѣзковъ, то этимъ выражается, что измѣняющее перемѣщеніе приводитъ съ собою состояніе, въ которомъ опять имѣется строжайшее равновѣсіе. Впрочемъ, такое положеніе дѣла не освобождаетъ отъ необходимости и въ этомъ случаѣ обращать вниманіе на прибавочную возмущающую силу.

Что касается неудовлетворительности способа представленія Карно, то ее отчасти можно объяснить себѣ, принявъ во вниманіе, что этотъ авторъ, несмотря на свои превосходныя толкованія законовъ дѣйствій съ несовершенными уравненіями, тѣмъ не менѣе могъ оставить открытымъ вопросъ о томъ, считать ли вмѣстѣ съ Эйлеромъ дифференціалы строго нулями, или нѣтъ. На дѣлѣ нулями ихъ не считаютъ, ибо эти величины даже строятъ, элементы времени или вообще независимые элементы дѣлаютъ постоянными и т. п. Вся выгода и ясность дифференціальныхъ представленій была бы утрачена, если бы ихъ не считали разностями, роль которыхъ — въ возможности ихъ неограниченнаго уменьшенія. Онѣ отличаются отъ конечныхъ разностей только тѣмъ, что все, что о нихъ и объ ихъ отношеніяхъ устанавливается, имѣетъ силу только тогда, когда относится къ случаю неограниченнаго уменьшенія и, слѣдовательно, когда предполагается, что какова бы ни была принятая степень малости, все еще можно уменьшеніе вести дальше. Само собою разумѣется, что нѣкоторую степень этой малости фик-

сируютъ, полагая постояннымъ наприм. элементъ времени или вообще элементъ независимаго перемѣннаго. Но всякое такое предположеніе произвольно, и только необходимость какимъ либо образомъ дѣлать таковое не зависитъ отъ произвола. Въ динамикѣ всѣ безконечно малыя количественныя представленія зависятъ отъ элемента времени (dt). Но самый этотъ элементъ, въ каждой опредѣленной мысли, долженъ быть мыслимъ какъ частица времени извѣстной величины. Кромѣ того, онъ долженъ имѣть то свойство, чтобы величина его относительно нуля могла быть выбираема какъ угодно малою. Но разъ въ какомъ либо ряду дѣйствій нѣкоторая величина фиксирована, то этому условію въ рассматриваемой зависимости измѣнять не должно. Можно замѣнить его сплошь вездѣ предположеніемъ другой степени малости; но нельзя измѣнять сдѣланнаго предположенія лишь для одной какой-либо части зависимости.

Всѣхъ этихъ толкованій о просто приближенныхъ уравненіяхъ, хотя и представляющихъ неограниченное приближеніе, но все же форму приближительную, можно избѣжать, если вмѣстѣ съ Лагранжемъ рѣшиться привести виртуальное уравненіе къ чисто конечному выраженію, безъ всякой примѣси безконечно малыхъ. Въ такомъ случаѣ перемѣшенія дѣлаются временными вспомогательными представленіями, отъ которыхъ въ результатѣ вполне освобождаются, такъ чтобы и въ соотвѣтствующемъ реальномъ выраженіи виртуальнаго принципа, ни въ понятіяхъ, ни въ словахъ, въ сущности не оставалось ни малѣйшаго слѣда мысли о безконечно маломъ измѣненіи положенія. Впрочемъ, это послѣднее требованіе выполнимо не въ такой мѣрѣ, какъ чисто аналитическое устраненіе второстепенныхъ вспомогательныхъ величинъ. Чтобы понять способъ представленія Лагранжа и неоцѣненные заслуги его касательно строгости заключеній, мы должны ближе ознакомиться съ нѣкоторыми точками зрѣнія строго аналитическаго метода.

137. Въ Теоріи функцій Лагранжъ рассматриваетъ скорость строго пунктуально, такъ что она соотвѣтствуетъ нѣкоторому моменту времени, не имѣющему никакой продолжительности, но играющему роль границы, строго отдѣляющей послѣдующее время отъ предыдущаго. Этотъ способъ представленія себѣ понятія скорости противоположенъ тому, въ которомъ скорость прямо относятъ къ элементу времени неограниченно малой продолжительности и, слѣдовательно, принимаютъ за частное отъ раздѣленія элемента пространства на соотвѣтствующій элементъ времени. Какъ скоро рассматривается нѣсколько элементовъ времени и выражается измѣненіе времени, самый элементъ времени должно считать неизмѣннымъ,

т. е. принимать его постояннымъ. Въ предположеніи такого, произвольно приближаемаго къ нулю, но постоянно равнаго себѣ элемента времени, когда хотятъ опредѣлить для такого элемента скорость, каждый разъ разумѣютъ подъ этимъ именемъ соотвѣтствующій пройденный элементъ пути, по сравненію съ величиною элемента времени. При опредѣленіи скорости не дѣлается приэтомъ различія, пробѣгается ли этотъ элементарный путь строго равномернымъ движеніемъ или нѣтъ. Напротивъ, обычнымъ случаемъ будетъ тотъ, что къ равномерному движенію будетъ прибавляться перемѣнный элементъ втораго порядка и съ нимъ сливаться. Въ самомъ дѣлѣ, элементъ пути dx только тогда будетъ пробѣгаться строго равномерно, когда самъ онъ постояненъ, т. е. пропорціоналенъ времени. Когда же различные элементы пути равны между собою, то въ этомъ частномъ случаѣ и на протяженіи элемента пути имѣется полная равномерность и пропорціональность съ соотвѣтствующими подраздѣленіями элемента времени, и выраженіе скорости, безъ всякаго сокращенія, пригодно не только для продолжительности элемента времени, но и для его строго пунктуальнаго начала. Во всѣхъ другихъ случаяхъ дифференціальное частное, которымъ выражается скорость, есть лишь илльное выраженіе для отношенія элемента пути къ элементу времени, и въ этомъ отношеніи кромѣ существенно конечной составной части содержится еще бесконечно малый остатокъ. Этотъ остатокъ, который въ собственно дифференціальномъ исчисленіи нужно принимать въ расчетъ, Лагранжъ откинулъ въ своей Теоріи функцій, сохранивъ его въ Аналитической Механикѣ въ смыслѣ обычныхъ представлений и принятой въ ней методы бесконечно малыхъ. Мгновеніе или пунктъ времени, для котораго мыслится скорость во второмъ, несовершенномъ способѣ, есть понятіе нѣкоторой малой продолжительности, начало, конецъ и середина которой, такъ сказать, сливаются воедино, такъ что возможные въ ней различія должны кореннымъ образомъ оставаться неразличимыми. Тѣмъ не менѣе, дифференціальное представленіе скорости будетъ вполне рационально, если только не терять изъ виду, что это есть понятіе, въ которомъ мыслится примѣсь измѣненія.

Но какъ бы ни была удобна дифференціальная нотация, однако она не должна мѣшать—соображаться въ обработкѣ механики съ понятіями античной математики. Не можетъ быть двухъ понятій о геометрической точкѣ, и когда говорятъ о скорости, соотвѣтствующей нѣкоторой точкѣ, то даже совершенно отвлекаясь отъ понятія пункта времени, уже въ силу требованія геометрической строгости, вынуждены ввести столь же опредѣленное понятіе скорости. Чувствуя необходимость этого, Лагранжъ въ своей Теоріи функцій и

въ своихъ Лекціяхъ объ исчисленіи функцій¹ на мѣсто дифференціальныхъ частныхъ различныхъ порядковъ поставилъ производныя функціи (*fonctions dérivées*) или, другими словами, посредствомъ новой нотации онъ сталъ отличать чистые дифференціальные коэффициенты, безъ примѣси бесконечно малыхъ, отъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ частныхъ. Способъ разложенія этихъ функцій у Лагранжа изъ основнаго ряда, хотя и совпадающаго съ Тайлоровымъ рядомъ, но выведеннаго не изъ дифференціальнаго исчисления, здѣсь насъ не касается. Но вообще нужно замѣтить, что разложеніе функцій по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ приращенія независимаго переменнаго служить вездѣ рѣшительнымъ средствомъ приведенія новыхъ геометрическихъ и механическихъ понятій къ мѣркѣ античной строгости. Лагранжъ настолько же не желалъ сливать касательную въ нѣкоторой точкѣ съ элементомъ кривой, насколько не хотѣлъ и изъ скорости въ данной точкѣ дѣлать шаткаго понятія, въ которомъ различныя, другъ съ другомъ не совпадающія движенія, все таки могли бы сливаться. Понятіе о механической скорости должно быть столь же строгимъ, какъ и понятіе древнихъ математиковъ о геометрическомъ касаніи. Требованіе это тѣмъ естественнѣе и принудительнѣе, что понятіе скорости лежитъ еще въ форономической области и, слѣдовательно, какъ и чистая математика, принадлежитъ исключительно идеальному мышленію.

Слѣдуя этому строгому пониманію, скорость будетъ определеннымъ количествомъ, не смѣшаннымъ ни съ какимъ бесконечно малымъ элементомъ и будетъ соответствовать математической, т. е. непротяженной пространственной точкѣ съ такою же точностью, съ какою въ своемъ родѣ и античное понятіе касательной. И развитіе у Лагранжа въ обоихъ случаяхъ аналогично концепціи понятія. А именно², вмѣсто скорости онъ опредѣляетъ для точки равномерное движеніе, какъ бы касательное во времени къ данному переменному движенію, такъ какъ для обоихъ общее мѣсто движущейся точки существуетъ только одинъ единственный моментъ времени, а затѣмъ соответственныя мѣста, занимаемая въ одинъ и тотъ же моментъ равномерно движущейся точкою и точкою, движущейся переменнымъ движеніемъ, такъ близки одно къ другому, что нельзя вообразить никакого другаго равномернаго движенія, которое ближе примыкало бы къ ходу переменнаго. Такъ точно, какъ касательная разсматривается какъ направленіе кривой въ точкѣ

¹ *Leçons sur le calcul des fonctions*, 2 изд. 1806.

² *Théorie des fonctions anal.* (1813), третій отд. гл. I, особенно чл. 4. Также *Calcul des fonctions*, 9 лекція въ концѣ, стр. 109.

касания, можно смотрѣть и на касательное равномерное движеніе вышеописаннаго рода какъ на скорость даннаго перемѣннаго движенія, т. е. можно отмѣтить его именно этимъ выраженіемъ и выдѣлить изъ числа другихъ понятій подобнаго рода. Поэтому скорость въ нѣкоторой точкѣ, въ предположеніи перемѣннаго движенія, опредѣляетъ не исключительно дѣйствительно совершающееся движеніе, а просто такое, которое послѣдовало бы, если бы въ законѣ даннаго движенія всѣ измѣняющія причины были бы внезапно устранены. Но дѣйствительное движеніе подходитъ къ этому гипотетическому, для неограниченно малаго элемента, также неограниченно близко, такъ что все, что въ немъ можно выдѣлить какъ равномерное, находить точное себѣ выраженіе въ соотвѣтствующемъ элементѣ равномернаго движенія. Такимъ образомъ элементарное движеніе, настолько же равномерное, какъ и всякій перемѣнный дифференціалъ, можно разсматривать какъ сумму, состоящую изъ двухъ движеній и соотвѣтствующую двоякому произвожденію величинъ. Въ такомъ случаѣ одно движеніе равномерно, а другая составная часть представляетъ перемѣнную прибавку или вычетъ. Но это послѣднее дополненіе въ элементѣ всегда бываетъ втораго порядка, т. е. оно при неограниченномъ уменьшеніи элемента, въ сравненіи съ послѣднимъ, само неограниченно убываетъ, такъ что относительно его оно становится такъ мало, какъ неограниченно малая величина сравнительно съ конечною. А отсюда ясно, что съ тѣмъ же неограниченнымъ приближеніемъ, съ какимъ элементъ кривой принимается за направленіе кривой, можно и элементъ движенія принимать за скорость движенія. Элементъ кривой разнится неограниченно мало отъ прямой, которую можно провести между его концами; точно такъ же элементъ движенія уклоняется неограниченно мало отъ того равномернаго движенія, которое можно представить себѣ между двумя конечными пунктами времени этого элемента. Еще вѣрнѣе и соотвѣтственнѣе духу строгой аналогіи будетъ способъ представленія, слѣдующаго которому въ геометріи элементъ кривой сравниваютъ не съ хордою, но съ соотвѣтствующимъ элементомъ касательной, а въ механикѣ предметомъ сравненія берутъ не среднюю скорость между двумя конечными пунктами времени элемента, а какъ бы касательное равномерное элементарное движеніе. Конечно, объ элементѣ касательной въ геометріи умѣстно говорить только тогда, когда кривую и касательную представляютъ построенными соотвѣтствующимъ движеніемъ и, слѣдовательно, когда геометрію опредѣляютъ форономически. Но тогда и аналогія будетъ вполне строгая, а въ механикѣ будетъ подлежать разсмотрѣнію элементъ касательнаго равномернаго движенія, отъ котораго элементъ

дѣйствительнаго движенія лишь неограниченно мало уклоняется по величинѣ и по формѣ движенія.

Мы должны были облечь идеи Лагранжа въ форму вышеприведеннаго изложенія, чтобы яснѣе отгнѣнить стремленія этого, въ смыслѣ строгой концепціи понятій новой математики и механики, классическаго автора, избѣгая особыхъ вычисленій и опираясь на обыкновеннѣйшія представленія дифференціальной традиціи.

138. Средствомъ доказательства, имѣющимъ рѣшающее значеніе, какъ уже сказано, у Лагранжа служитъ общая формула разложенія функціи въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ приращенія перемѣннаго. При этомъ онъ выходитъ отъ нѣкотораго произвольнаго уравненія движенія и превращаетъ выраженіе пространства по времени въ рядъ по степенямъ элемента времени, который должно представлять неограниченно малымъ, чтобы каждый членъ въ отлѣльности могъ съ неограниченнымъ приближеніемъ замѣнять собою величину всѣхъ слѣдующихъ членовъ. При этомъ предположеніи извѣстное выраженіе для остатка ряда, введенное Лагранжемъ и дававшее до остаточной формулы Коши совершеннѣйшую форму, очевидно, формально излишне, и только тогда имѣло-бы значеніе, когда бы рѣчь шла о приращеніи, которое нельзя бы было уменьшать неограниченно. Но если условія таковы, что приращеніе можетъ быть уменьшаемо неограниченно, что имѣетъ мѣсто при всякомъ непрерывномъ измѣненіи величины, то восходящія степени приращенія, помноженныя на производныя функціи, будутъ представлять величины различныхъ порядковъ. Этимъ устраняется ложное понятіе о чемъ-то такомъ, что подъ обычнымъ именемъ безконечно-малаго должно было какъ бы уже заранѣе отмѣнять всякую возможность уменьшенія, благодаря идеѣ величины, неспособной ни къ какому уменьшенію, такъ какъ ничего нельзя было представить себѣ менѣе ея. Но старанія Лагранжа не достигали цѣли постольку, поскольку они собственно дифференціальныя приемы не посредственно нисколько не оправдывали. И Карно подвигался еще весьма неуверенно, и его понятіе несовершенныхъ уравненій, въ концѣ концовъ, по отношенію къ главному дѣлу было лишь неопредѣленнымъ и также недостаточнымъ обходомъ. О возможно простѣйшемъ и вмѣстѣ непосредственнѣйшемъ способѣ коренной замѣны принятаго абсурднаго понятія о безконечно-маломъ понятіемъ о неограниченно маломъ, — полагаю, я достаточно высказался уже въ первыхъ моихъ работахъ, а именно въ моей латинской статьѣ о пространствахъ, времени и причинности, равно и въ Логикѣ анализа безконечно-малыхъ (Берлинъ, 1861) и въ моей Естественной діалектикѣ (Берлинъ 1865, особенно ч. II, Отд. I, гл. 3), причѣмъ

указана и сплошная примѣнимость новой точки зрѣнія. Здѣсь я замѣчу только, что дифференціалъ не можетъ быть ничѣмъ инымъ какъ разностью со свойствомъ неограниченно уменьшаться, и съ точки зрѣнія возможности такого безпредѣльнаго умаленія и долженъ быть разсматриваемъ. Какъ скоро онъ независимъ, то онъ и постояненъ, и потому нельзя, какъ это еще дѣлаютъ нѣкоторые французскіе математики, опредѣлять его какъ переменное. Традиціонная нотація не составляетъ, поэтому, никакого особаго препятствія логическому раціонализированію этой области. Но необходимо производныя функціи, уже не содержащія элементарныхъ составныхъ частей и соотвѣтствующія чисто пунктульнымъ геометрическимъ или механическимъ свойствамъ, отличать отъ дифференціальныхъ частныхъ, которыя всегда еще содержатъ элементарныя, т.-е. неограниченно-малыя составныя части величинъ, и способъ обозначенія Лагранжа служить для этого весьма пригоднымъ средствомъ, Сверхъ того, можно бы было зависимые дифференціалы и, слѣдовательно, содержащіе и элементы величинъ высшихъ порядковъ, освободить отъ этой примѣси и какъ-бы урѣзать. Въ такомъ случаѣ выпуски въ дифференціальныхъ уравненіяхъ соотвѣтствовали-бы другъ другу и уравненія были бы строго приведены къ нулю, и тогда на мѣстѣ нуля не было бы надобности представлять себѣ неограниченно-малыя высшихъ порядковъ. Такимъ образомъ только одностороннія урѣзки приводятъ вмѣсто строгихъ лишь къ неограниченно приближеннымъ уравненіямъ. И на дѣлѣ произведенія, составленныя изъ производной функціи и независимаго, постоянного дифференціала, сами по себѣ и въ примѣненіяхъ имѣютъ особое значеніе, которое должно различать отъ значенія неурѣзанныхъ и потому еще съ второстепенными элементами величины связанныхъ дифференціаловъ. Напримѣръ, дифференціальное уравненіе въ этой правильной, въ обѣихъ частяхъ урѣзанной, формѣ, можетъ быть отнесено строго къ касательной и именно къ ея отрѣзку, соотвѣтствующему приращеніямъ абсциссы и ординаты; аналогично этому и гипотетическое продолженіе движенія, какъ движеніе по инерціи въ продолженіи неограниченно малаго элемента времени, выразилось бы отношеніемъ двусторонне урѣзанныхъ дифференціаловъ.

Само собою понятно, что Лагранжевская метода рядовъ, въ которой производныя функціи получаютъ, строго приравнивая приращенія нулю, позволяетъ образовывать и аналитически недвусмысленно выразить не только понятіе скорости, но и строго пунктуальной движущей силы со всѣми геометрическими предварительными и вспомогательными понятіями,—выразить въ смыслѣ античной точности или, лучше сказать, соразмѣрно правильной ма-

тематической логикѣ. Не смотря на то, авторъ Теоріи функцій, во второмъ изданіи своей Аналитической Механики не только удержалъ дифференціальную нотацію безъ ближайшаго опредѣленія ея не-точного значенія, но и самыя разсужденія ведетъ такъ, какъ будто бы понятіе бесконечно малаго было само по себѣ безразличною и безупречною концепціей. Фактически, Лагранжъ во всякомъ случаѣ представлялъ дифференціальныя величины лишь какъ элементарныя приращенія, и потому не подпалъ способамъ выраженія, формулирующимъ очевидное противорѣчіе. Но онъ также предполагалъ, что дифференціальное исчисленіе въ собственномъ смыслѣ оправдывается Теоріей функцій, и потому ему не было надобности, какъ это зачастую случается при специальномъ употребленіи дифференціальныхъ методовъ, давать непосредственный отчетъ о смыслѣ этихъ методовъ. Поэтому, понятіе ускоренія вмѣстѣ съ понятіемъ движущей силы ¹ получаетъ онъ, раздѣляя дифференціалъ скорости, уже выраженной частнымъ дифференціаломъ, на элементъ времени. Соответствующій реальный способъ представленія можетъ быть въ высшей степени нагляднымъ; но чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ быть и строгимъ, онъ требовалъ предварительнаго изслѣдованія и разложенія различныхъ составныхъ частей дифференціальныхъ элементовъ и указанія, какъ представлять себѣ промежуточный процессъ между началомъ и концомъ такого элемента. Но приэтомъ пришлось бы совсѣмъ отказаться отъ обычнаго дифференціального метода, а его нотаціи приписать болѣе опредѣленный смыслъ, чѣмъ какой когда-либо она имѣла. Ничего подобнаго у Лагранжа не встрѣчаемъ, и въ этомъ состоитъ недостатокъ, которымъ страдаетъ и Теорія функцій. Способъ обозначенія въ ней сильно мѣшалъ болѣе широкому ея приложенію и исключительность его зависѣла отъ самой уловки, избранной Лагранжемъ, который оправдывалъ и исправлялъ дифференціальное исчисленіе не непосредственно и изнутри, но лишь посредственно и наружно, т. е. только въ результатахъ, но не въ присущемъ ему методѣ. Чтобы достигнуть цѣлостной системы, соединяющей строгость съ удобствомъ и наглядностью, нужно бы было обработать не только чисто аналитическія, но и самыя геометрическія и механическія понятія, а именно тщательно различая двойственность ихъ формы, смотря по тому, чисто ли элементарнаго рода она, или смѣшаннаго. Лагранжъ до конца своей жизни не могъ освободиться отъ суевѣрія бесконечности, хотя и весьма усердно стремился къ этому. На послѣдокъ, бесконечно-малое оставалось для него, какъ онъ выражался, возможною гипо-

¹ Méc. anal. T. I (1811), Динамика, Sect. II, Art. 3.

тезою, пользоваться которою дозволительно. Но и гипотеза не должна содержать никаких нелѣпостей; такъ-что Лангражъ еще не вполне понималъ, что это понятие абсурдно, но лишь чувствовалъ, что оно неясно, остерегался пускать его въ ходъ и, совершенно послѣдовательно, не далъ ему мѣста въ первомъ изданіи своей Теоріи функций. Но когда, во второмъ изданіи, онъ ясно высказался объ отношеніи производной функции къ дифференціальному частному, приравнявъ ихъ другъ другу, тогда присущее его уму заблужденіе стало очевидно. Итакъ, въ точности приравнивая строгій предѣлъ дифференціальному частному, онъ держался, въ своемъ родѣ, того же заблужденія, какому оставался вѣренъ и д'Аламберъ. Такая путаница и неясность достались въ наслѣдство отъ Ньютона, но, во всякомъ случаѣ, это недоразумѣніе ведетъ начало не отъ него, и не онъ первый обнаружилъ такое отсутствіе принципиальности. Подобныя изобрѣтенія приличествуютъ не генію, они — продуктъ отсутствія сосредоточенности и точности мышленія. Очищеніе науки отъ предразсудка безконечности начато впервые нами — методически и во всѣхъ областяхъ. Послѣдніе результаты этой чистки можно найти въ подлежащихъ главахъ нашихъ «Новыхъ основъ математики».

139. Если предположить, что трудности и неточности дифференціальной формы основныхъ понятій механики устранены, то дальнѣйшій принципиальный вопросъ можетъ относиться только къ надлежащему обоснованію ихъ ограниченія извѣстными выдающимися представленіями. Въ Теоріи функций Лагранжъ исходитъ прежде всего просто отъ явленій движенія и развертываетъ, исходя, такъ сказать, изъ произвольно-поставленной мысли, различные возможные виды движеній. Приэтомъ онъ отправляется отъ родовъ аналитическихъ формъ отношеній, въ которыхъ вообще могутъ стоять другъ къ другу двѣ переменныя величины, слѣдовательно, здѣсь — время и пространство. Какъ скоро уравненіе — первой степени относительно времени, то движеніе равномерно; если оно чистое квадратное, то движеніе — равномерно переменное; таково же оно и тогда, когда вообще уравненіе будетъ второй степени, но въ такомъ случаѣ, какъ скоро уравненіе смѣшанное, его можно разложить на равномерное и равномерно-переменное. Если выходить отъ такой аналитической постановки формъ движенія, то непосредственнымъ уравненіемъ между пространствомъ и временемъ пространство выразится функцией времени, т.-е. извѣстною аналитическою формою съ опредѣленными постоянными. Форма для одного и того-же вида движенія также одинакова. Слѣдовательно, различныя движенія одного и того же вида различаются только постоянными. Если изъ

этихъ формъ движенія удалить всякія несущественныя сочетанія и примѣси, то останутся одни только неизбѣжныя, характеристичныя постоянныя. Въ уравненіи первой степени таковымъ будетъ множитель, на который въ формулѣ пространства должно умножаться время. Однимъ этимъ факторомъ и отличается перемѣщеніе этого рода отъ другаго движенія того же рода. Второе постоянное можетъ касаться только опредѣленія положенія пространственныхъ координатъ, ибо при движеніи съ самаго начала должно быть принято въ расчетъ постоянное разстояніе отъ начала осей координатъ. Такимъ образомъ, первое характеристичное постоянное одно только и служить для отличія какого-либо равномернаго движенія отъ другаго равномернаго движенія. Этотъ отличительный признакъ прямо получается при составленіи простой и упорядоченной основной формы равномернаго движенія. Если отмѣтить его какимъ-либо наименованіемъ, то можно съ этимъ новымъ понятіемъ оперировать, и ясно, что въ немъ не содержится ничего иного, кромѣ того значенія, какое при свободной постановкѣ какъ-бы выдуманное уравненіе только и могло придать ему зависимость своихъ частей. Это понятіе и есть то, что называютъ скоростью, и такимъ путемъ оно построится и какъ бы создается чистымъ мышленіемъ.

Поступая подобнымъ образомъ съ уравненіемъ второй степени, убѣдимся, что и оно, если отвлечься отъ примѣси равномернаго движенія, содержитъ только одно характеристичное постоянное, которымъ какое-либо равномерно-перемѣнное движеніе только и можетъ отличаться отъ другаго также равномерно-перемѣннаго движенія. Слѣдовательно, это постоянное должно быть выдѣлено и наименовано какъ новое понятіе; извѣстно, что это то, что называется ускореніемъ. Взять ли простой или двойной множитель, которымъ помножается квадратъ времени—это здѣсь пока не имѣетъ существеннаго значенія.

Если положить, что выходятъ не отъ этихъ двухъ формъ, но отъ совершенно общаго уравненія, безъ особаго опредѣленія формы, то такое уравненіе, аналитически и логически, будетъ выражать не иное что, какъ то, что пространство произвольно зависитъ отъ времени, т.-е. что его должно представлять какъ нѣкоторую функцію времени, будетъ ли она алгебраическая или нѣтъ. Это представленіе обнимаетъ всѣ мыслимыя или, лучше сказать, всѣ, какія только можно придумать, возможности. При такомъ предположеніи уже нельзя непосредственно говорить о двухъ упомянутыхъ характеристичныхъ постоянныхъ, потому что если бы, наприм., это отношеніе было только третьей степени, то нужно бы было множитель при третьей степени времени отличить какъ дѣйствительно

характеристичный, а все остальное рассматривать как несущественную примѣсь низшихъ формъ къ новой формѣ движенія. Двукратное дифференцированіе, которое въ иныхъ случаяхъ даетъ постоянное ускореніе, дало бы величину переменную относительно времени. Но что такое могла бы реально означать послѣдняя, этого, говоритъ Лагранжъ ¹, совѣтъ нельзя знать, и этимъ мотивируетъ ограниченіе вторымъ дифференцированіемъ. Итакъ, насъ должно интересовать только то, что въ движеніяхъ квадратично относительно времени или, другими словами, только то, что въ нихъ равномерно переменнo. Здѣсь-то и обнаруживается неудовлетворительность исходной точки, и сразу оказываются два недостатка. Во-первыхъ, не видно, почему нельзя, по крайней мѣрѣ теоретически, продолжать дифференцированія; ибо ссылка Лагранжа на опытъ, что въ природѣ мы не знаемъ никакихъ движеній, зависящихъ отъ времени болѣе чѣмъ квадратично, правда, обосновываетъ ограниченіе примѣненій теоріи, но никакъ не обрывъ самой теоріи, ничѣмъ внутренне не мотивированный. Во-вторыхъ, и положительно, случай природы отнюдь не покрывается простымъ ограниченіемъ квадратичною зависимостью пространства отъ времени, такъ какъ основной фактъ природы образуетъ не равномерно переменное движеніе, а движеніе, измѣняющееся въ зависимости отъ самихъ разстояній. Всякое функциональное отношеніе соотвѣтствуетъ нѣкоторой логической зависимости. Но было бы очень искусственно самую причину, въ силу которой само пробѣгаемое пространство зависимо отъ нѣкоторой пространственной величины, а именно отъ разстоянія (p) центра силы отъ всякой точки приложенія, представлять себѣ функціей времени, ибо между теченіемъ времени какъ таковымъ и измѣненіями силы нѣтъ никакой непосредственной связи. Сила опредѣляется пространственнымъ положеніемъ и само по себѣ безразлично, какъ и въ какое время тѣло достигло такого положенія относительно центра силы. Уравненіе движенія точки по направленію силы только тогда, слѣдовательно, будетъ мыслиться съ достаточною общностью, когда положить пространство не просто функціей времени, но функціей, содержащей кромѣ времени еще переменное разстояніе, когда, слѣдовательно, вмѣсто $x=ft$ съ самаго начала написать $x=f(p, t)$. Если выходить изъ этого основного отношенія, то при дифференцированіяхъ окажется, что ускореніе вообще переменнo, и что оно точно также пунктуальное понятіе, какъ и скорость. Только для одной опредѣленной точки въ пространствѣ и, слѣдовательно, насколько рѣчь идетъ не о покоѣ, а

¹ Théorie des fonctions, 2 изд. 3 отд. гл. I, Art. 2 и 4.

о движеніи, и для одного только опредѣленнаго пункта времени существуетъ на направленіи силы одна и та же величина ускоренія. Это пунктуальное ускореніе или, если отнести его къ единицѣ массы, эту пунктуальную силу всегда можно лишь приблизительно мыслить какъ въ дѣйствительности постоянную величину. Поэтому ея постоянство и въ вычисленіи обнаружится только въ предположеніи, что и разстояніе p дѣлають постояннымъ, т.-е. совершенно отвлекаются отъ его измѣненія какъ отъ чего то такого, что въ извѣстныхъ случаяхъ не имѣетъ значенія. Только такимъ образомъ получается, наприм., постоянное ускореніе тяжести для нѣкотораго градуса широты; но если разсматривать тяжесть не приближенно, то ускореніе тяжести или вѣсь будетъ для каждой точки имѣть иную величину; даже она измѣняется не только непосредственно для каждой точки въ пространствѣ, но и посредственно для каждаго момента времени, ибо планетныя тѣла постоянно измѣняютъ свое положеніе, хотя въ этомъ отношеніи перемѣщенія и весьма незначительны. Позднѣе окажется, что для принциповъ механики отношеніе силъ къ измѣненіямъ разстояній имѣетъ элементарное значеніе, ибо безъ этого отношенія сохраненіе силы не можетъ быть понято во всемъ объемѣ.

Что же касается вышеупомянутаго обрыва теоріи на квадратахъ времени или неограниченно малаго приращенія времени, то во всякомъ случаѣ возможно и зависимость отъ разстоянія формально мыслить какъ функцію времени, такъ какъ даже въ каждомъ частномъ случаѣ движенія разстояніе непрерывно измѣняется съ пройденнымъ путемъ и потому косвенно стоитъ въ нѣкоторомъ количественномъ отношеніи къ потраченному времени. Въ этомъ случаѣ, и слѣдуя такому способу пониманія, функція времени дастъ для пространства рядъ, въ которомъ должны подлежать разсмотрѣнію и высшія степени элемента времени. Вообще, для форономіи какъ таковой нельзя указать никакихъ границъ, ибо всякое, безъ противорѣчія мыслимое, движеніе должно быть допущено въ чисто-форономической области какъ предметъ теоріи. Но иначе должно относиться къ дѣлу, какъ скоро болѣе узкія, существенно механическія условія ставятъ возможные образы понятій въ извѣстныя рамки.

140. Въ области принциповъ переходъ отъ простыхъ явленій движенія къ разсмотрѣнію массъ составляетъ одинъ изъ существеннѣйшихъ шаговъ. Лагранжъ дѣлаетъ этотъ шагъ, обращаясь къ опыту¹. А именно, ссылка дѣлается на ударъ неупругихъ тѣлъ,

¹ Théorie des fonctions, 3 отд. Art. 14 и 15. Ср. также Mée. anal., Динам. Sect. I, Art. 4 и 5.

которыхъ массы обратно пропорціональны скоростямъ, и потому, что массы и скорости пропорціонально замѣняютъ другъ друга. Дѣйствіе натянутой пружины въ движеніи двухъ неравныхъ массъ, между которыми она вставлена, также имѣетъ значеніе инстанціи. Наконецъ, и движеніе, сообщаемое суммѣ массъ перегрузомъ на Атвудовой машинѣ берется какъ опытная схема переноса тяжести малой массы на большую, но косную массу. Обѣ эти, сами по себѣ находящіяся въ равновѣсіи массы, косны именно постольку, поскольку въ нихъ тяжесть уравнивается противоположностью направленія. Поэтому они образуютъ систему, которая со включеніемъ массы наложеннаго перегруза должна двигаться подъ дѣйствіемъ силы послѣдняго. Такимъ образомъ, ускореніе редуцируется въ отношеніи общей массы къ перегрузу или, что то же, къ разности между совокупною массою и частями ея, находящимися въ равновѣсіи. Слѣдовательно, ссылка на наблюденіе и опытъ даетъ понятіе о чемъ-то, что можно было бы назвать массовымъ ускореніемъ, и что обыкновенно просто называютъ силою. Ускореніе имѣетъ только форонимическій, и отнюдь не механическій смыслъ, если его не относить къ массамъ. Слѣдовательно, единица силы получается, если единицу ускоренія, т.-е. нѣкоторую, отнесенную къ единицѣ времени, единицу пространства, соединить съ единицею массы. Разсматривая какъ опытный принципъ, что сила дѣйствуетъ прямо пропорціонально массѣ, аффицируемой ускореніемъ, Лагранжъ приходитъ такимъ образомъ къ предложенію, что выраженіе для силы, слѣдовательно, наприм., и $v\dot{s}$, нужно раздѣлить на массу, чтобы получить ускореніе. Но точное представленіе объ этомъ отношеніи мы составимъ себѣ только тогда, когда ясно будемъ сознать, что разсматриваемое дѣленіе дастъ не просто форонимическое ускореніе, но ускореніе для единицы массы и, слѣдовательно, силовое выраженіе въ собственномъ смыслѣ, и только аналитически не всегда бываетъ нужно обращать вниманіе на то, что оно должно быть мыслимо умноженнымъ на эту единицу. Всѣ свои полученныя въ Теоріи функцій формулы, относившіяся прежде всего просто къ явленіямъ движенія, Лагранжъ превращаетъ въ видимо механическія отношенія массъ, дѣля абстрактныя выраженія силъ, означающія вообще причины движенія, на массы точекъ или тѣлъ, на которыя силы эти дѣйствуютъ. Введеніе этого дѣлителя можно истолковать такъ, что чрезъ это силы, которыя прежде мыслились какъ ускоренія равныхъ массъ, теперь приведены къ ускореніямъ для данныхъ различныхъ массъ. Но можно это отношеніе представить себѣ и иначе, принявъ, что неопредѣленныя выраженія для силъ, содержащія различныя массы въ видѣ не выраженныхъ факторовъ, сказаннымъ

дѣленіемъ приводятся къ ускореніямъ единицы массы. Вполнѣ ясно, что въ уравненіе, въ одной части котораго находится ускореніе координаты пунктуальнаго тѣла, а въ другой сумма силъ, разсмотрѣніе массъ можно ввести не иначе, какъ дѣленіемъ силы на массу тѣла, или вмѣсто этого введя массу въ другую часть уравненія въ видѣ множителя ускоренія. Такимъ образомъ уравненія получаютъ механическую форму, тогда какъ до этого они имѣли лишь форономическій видъ. Такова, по крайней мѣрѣ, идея Лагранжа, но въ ней, однако, скрывается пріемъ сомнительнаго свойства. Въ одномъ изъ вышеприведенныхъ мѣстъ ¹ вмѣсто выраженій того, что онъ называетъ абсолютными силами, т.-е. вмѣсто P , Q , и т. д. онъ ставитъ просто $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{M}$ и т. д., ничего не измѣняя въ другой части уравненія, гдѣ находится выраженіе ускоренія. Послѣ того онъ переноситъ дѣлителя M въ другую часть, такъ что онъ становится факторомъ ускоренія. Пріемъ этотъ неточенъ, если только ошибку не исправить, подразумѣвая подъ P , Q ,... сначала не тѣ величины, какія этими знаками должны выражаться въ дробяхъ. Преобразованіе уравненій дѣленіемъ только одной его части на M нельзя бы было допустить, не допуская вмѣстѣ съ тѣмъ, что таже самая часть и умножается на M . Такимъ образомъ, вмѣсто абсолютной силы P нужно вообразить кратную ей силу, которая, будучи раздѣлена на M , давала бы первоначальное значеніе P . Но отсюда опять очевидно, что введеніе массъ въ уравненія въ дѣйствительности можетъ означать ничто иное, какъ просто выраженіе массы тѣлъ, которая доселѣ принималась за общую единицу и оставлялась безъ вниманія, меньшею единицею. Такимъ образомъ массы выступаютъ видимыми факторами, и если въ одной части, въ символахъ P , Q ,... и не являются, то основаніемъ этому служить лишь намѣренно неопредѣленное выраженіе силъ. Извѣстное напряженіе пружины можно для краткости обозначить подобнымъ символомъ; но если всмотрѣться ближе, то сообщеніе извѣстнаго ускоренія опредѣленной массѣ, т.-е. нѣкоторое эквивалентное произведеніе изъ массы на ускореніе, должно представлять собою мѣру силы. Слѣдовательно, необходимо представлять себѣ массы въ обѣихъ частяхъ уравненія или, другими словами, чтобы эквивалентъ массы такъ или иначе усматривался въ каждомъ силовомъ представленіи и въ каждомъ механическомъ эффектѣ. Простое ускореніе было бы понятіемъ чисто форономическимъ; поэтому въ механикѣ и въ силовыхъ уравненіяхъ нужно всегда присоединять къ нему единицу массы, если гдѣ выраженіе ускоренія встрѣчается отдѣльно.

¹ Théorie des fonctions, 3 отд. Art. 15.

Въ уравненіяхъ, преобразуемыхъ Лагранжемъ, ускореніе тѣла по координатѣ приравнивается силовому символу P , редуцированному косинусомъ, или суммѣ такихъ членовъ. Если такое уравненіе должно имѣть только форонимическое значеніе, то его нельзя превратить въ собственно механическое уравненіе никакимъ приѣмомъ, который не вводилъ бы движимаго тѣла въ обѣ части какъ массу. Но чтобы мыслить силу какъ такую, которая извнѣ дѣйствуетъ на тѣло, противодѣйствуя его инерціи, нужно представлять себѣ являющееся при этомъ ускореніе связаннымъ съ самымъ тѣломъ. Въ этомъ предположеніи потребна редукція членовъ къ единицѣ массы, здѣсь дѣленіемъ, или тамъ умноженіемъ, и съ этой точки зрѣнія и становится нѣкоторымъ образомъ понятенъ приѣмъ Лагранжа. При этомъ должно представлять себѣ, что въ уравненіи P уже представлено было раздѣленнымъ на эту единицу. Но не смотря на это, все таки остается нѣкоторое несоотвѣтствіе. Или уравненіе было неправильно, т.-е. знакъ равенства означалъ не эквивалентный, а лишь сопинадлежащий эффектъ, или же дѣленіе одной части ничѣмъ не оправдывается. Можно сказать, что сила производитъ въ нѣкоторомъ тѣлѣ извѣстное ускореніе и тотчасъ заключать, что это ускореніе должно увеличиться пропорціонально массѣ, какъ скоро сила дѣйствуетъ не на цѣлое тѣло, а лишь на единицу массы; ибо какъ скоро сила сохраняетъ свою величину, то масса и ускореніе измѣняются въ обратномъ отношеніи другъ къ другу. Точно также можно сказать, что тоже самое ускореніе даетъ только M -ую часть силы, если вообразить, что масса тѣла замѣнена единицею его. Не смотря на это, всѣ старанія оправдать дѣленіе или умноженіе на массу одной части уравненія будутъ тщетны. А потому эти соображенія, по меньшей мѣрѣ, твердо устанавливаютъ, что изъ чистой форониміи нельзя выткать уравненій, посредствомъ которыхъ вводятся въ вычисленія массы. Единственный путь достигнуть этой цѣли состоитъ, скорѣе, въ томъ, чтобы прямо выражать тѣла въ единицахъ массы и такимъ образомъ тотчасъ ввести принципъ, что массовыя скорости, т.-е. произведенія массъ на скорости эквивалентны, все равно, какъ бы различно эти произведенія ни были составлены. Итакъ, рядомъ съ выраженіемъ $j = \frac{P}{M}$, гдѣ j означаетъ ускореніе единицы массы, а P —вѣсь или вообще силовую аффекцію (*Vis motrix*), никакъ не можетъ имѣть мѣста и уравненіе $j = P$ безъ измѣненія значенія отдѣльныхъ символовъ, что, очевидно, должно бы было имѣть мѣсто, еслибы оборотъ Лагранжа былъ вполнѣ вѣренъ. Конечно, алгебраически возможно предположить $M=1$, и тогда результатомъ будетъ по-

добная форма уравненія; только жаль, что въ такомъ соотношеніи, по причинѣ различныхъ и скрытыхъ единицъ, уже ничего непосредственно нельзя видѣть. Кто сошлется на возможность принять встрѣчающіяся въ уравненіи величины за единицы, долженъ будетъ довольствоваться имъ и тогда, когда оно болѣе и болѣе будетъ терять смыслъ, и когда въ нашемъ случаѣ, если и j и P принять за единицы соотвѣствующихъ величинъ, приметь видъ $i=1$.

141. Изслѣдованія предыдущаго § позволяютъ ясно усмотрѣть всѣ затрудненія, вносимыя неопредѣленностью силового понятія. Форонимической силы, которая не можетъ быть ничѣмъ инымъ какъ ускореніемъ, не отличали съ достаточною строгостью отъ механической силы, которая собственно и заслуживаетъ этого имени и кратко можетъ быть опредѣлена, какъ массовое ускореніе. Въ форониміи причину опредѣленной измѣняемости движенія, слѣдовательно наприм., идеальное опредѣленіе ускоренія геометрической точки, всегда можно назвать силою; но такое несвойственное выраженіе не должно вести къ исчезновенію механическаго понятія силы. Послѣднее всегда относится къ величинѣ, которая до безконечности разнообразными способами можетъ быть составлена изъ массы и ускоренія, но никогда изъ нея не должны исчезать ни масса, ни ускореніе. Видимость, возникающая изъ того, что масса становится единицею и исчезаетъ въ аналитическихъ выраженіяхъ, ничего не измѣняетъ въ реальномъ отношеніи. Скорѣе, лишь въ силу несовершенства аналитическаго языка, единицъ нельзя явно сохранять множителями.

Особое понятіе силы было бы даже излишне въ механикѣ, и во всякомъ случаѣ можно бы было удовольствоваться понятіемъ ея элементовъ, т.-е. массы и ускоренія, еслибы способъ составленія произведенія изъ массы и ускоренія не былъ бы совершенно безразличенъ, а это безразличіе не требовало бы особаго выраженія. Нѣчто и величина, соотвѣтствующая этому произведенію, независимы отъ того, сколько вносится массою и сколько ускореніемъ. Такимъ образомъ, понятіе силы даже въ яснѣйшей своей концепціи, какъ оно опредѣляется сказаннымъ произведеніемъ, все-таки есть нѣчто отличное отъ опредѣленной комбинаціи этихъ факторовъ. Присущая ему абстракція должна быть какъ-нибудь выражена, и какъ слово, такъ и аналитическіе символы силы существуютъ только для того, чтобы выражать рассматриваемый видъ произведеній безъ всякаго отношенія къ опредѣленному разложенію на множители. Здѣсь то же, что и съ понятіемъ количества движенія. Даже вообще массовое ускореніе (Mj) есть просто то количество движенія, которое производится въ единицу времени.

Въ виду этого, совершенно ясно, что будетъ выкинута за бортъ добрая часть бесполезныхъ метафизическихъ точекъ зрѣнія, какъ скоро подъ силою прямо будутъ разумѣть ничто иное какъ произведение изъ массы на ускореніе, которое, впрочемъ, представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ совокупность всѣхъ равнозначныхъ произведеній, въ которыхъ масса и ускореніе распредѣлены иначе. При такомъ пониманіи силовое понятіе столь же недвусмысленно, какъ и понятіе количества движенія. Если бы терминологія механики зарождалась бы такъ же какъ терминологія химіи, то вмѣсто количества движенія было бы введено выраженіе массовая скорость, а вмѣсто ускорительной силы — слово массовое ускореніе.

Существенно примыкая къ господствующему обычаю, Лагранжъ разумѣлъ подъ силою въ тѣсномъ смыслѣ слова всегда пунктуальную причину массоваго ускоренія. На дѣлѣ, если смотрѣть на формулы, а не на ихъ, повидимому, различное толкованіе, то это понятіе будетъ общимъ и статикѣ и динамикѣ. Стремленіе здѣсь одно и то же, проявляется ли оно статически или динамически. И въ динамикѣ для точки въ строгомъ смыслѣ существуетъ лишь стремленіе, которое только съ переходомъ къ другимъ точкамъ пространства превращается въ дѣйствительное движеніе.

Итакъ, въ смыслѣ Лагранжа мы должны мыслить всѣ силовые символы представителями нѣкоторыхъ массовыхъ ускореній, т.-е. замѣстителями тѣхъ аффекцій нѣкоторыхъ массъ, въ силу которыхъ въ свободномъ состояніи были бы произведены извѣстные ускоренія, если отвлечься отъ вліянія разстояній. Кстати замѣтить, что аналитическія формулы только тогда выдерживаютъ пробу полной ясности, когда возможно, по крайней мѣрѣ, гипотетически, перевести ихъ на чистыя числа и для каждаго знака указать, какъ должно понимать единицу его числа, или, если число должно быть отвлеченнымъ безъ наименованія единицы, то какъ возникло это абстрактное свойство и чѣмъ оно оправдывается. Если это правило разъясненія и критики примѣнить къ силовымъ символамъ, которые всего болѣе нуждаются въ такомъ освѣщеніи, то прольется новый свѣтъ уже на основныя уравненія статики и динамики; и даже легко будетъ убѣдиться, что строгаго вниманія къ точному смыслу этихъ символовъ достаточно, чтобы удостовѣриться, что Лагранжу не было бы надобности сперва выводить фундаментальное уравненіе статики и покончить со статикою, прежде чѣмъ развивать общее основное уравненіе динамики.

142. Если теперь вернуться къ виртуальному началу, то виртуальные моменты, или, какъ для краткости выражается Лагранжъ, моменты силъ, въ сущности, суть лишь мѣры самихъ редуцирован-

ныхъ силъ, взятыхъ въ своемъ дифференціальномъ дѣйствіи. Если мысленно отбросить причины редукии и, слѣдовательно, взять вполнѣ свободное силовое дѣйствіе на свободную точку, то должно представлять себѣ моментъ силы въ смыслѣ Галилея и Лагранжа также какъ самостоятельное понятіе. Но въ этомъ предположеніи безконечно-малый моментъ есть опять-таки ничто иное какъ оправданное въ предыдущемъ § силовое выраженіе, осложненное безразличнымъ факторомъ, посредствомъ котораго представляется пробѣгаемый въ элементъ времени элементъ пространства, или же этотъ элементъ пространства, раздѣленный на элементъ времени. Такимъ образомъ, выражаясь новымъ языкомъ, прибавленіемъ этого элементарнаго фактора абстрактное выраженіе силы превращается въ выраженіе элементарной работы силы, или же, если еще введенъ дѣлителемъ элементъ времени, просто въ дифференціальное выраженіе силы, ибо въ послѣднемъ случаѣ элементъ пространства пропорціоналенъ квадрату элемента времени и, слѣдовательно, по раздѣленіи, элементъ времени остается множителемъ силы. Впрочемъ здѣсь, говоря о Лагранжѣ, мы не будемъ вдаваться въ ближайшее изслѣдованіе этого способа представленія.

Виртуальные моменты представляютъ элементарныя возможныя силовыя дѣйствія. При свободномъ силовомъ дѣйствіи они пропорціональны самимъ силамъ, и для случая, когда устраняютъ элементарныя вспомогательныя величины, не требуютъ никакого другаго представленія кромѣ представленія посредствомъ силовыхъ символовъ. Слѣдовательно, если принять, что всѣ силовыя дѣйствія направлены по одной координатной оси, то стоитъ только суммировать выраженія для силъ, принимая во вниманіе знаки, чтобы получить равнодѣйствующую, т.-е. полную силу или коллективное массовое ускореніе, дѣйствующее вдоль этой оси. Если должно существовать равновѣсіе, то алгебраическая сумма силъ должна равняться нулю. Впрочемъ, точнѣе выразимся, сказавъ, что это есть условіе покоя или, лучше, отсутствія результирующаго движенія. Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе равновѣсіе слишкомъ легко напоминаетъ о стѣсняющихъ условіяхъ, вводимыхъ нѣкоторымъ особымъ распорядкомъ системы, наприм., напередъ заданными путями или относительными скоростями. Но мы только что предположили, что силы должны дѣйствовать свободно, т.-е. безъ такихъ условій. Всматриваясь въ дѣло ближе, замѣчаемъ, что всякая комбинація силъ, во всякомъ случаѣ, вноситъ, по крайней мѣрѣ, одно взаимное ограниченіе, и это ограниченіе, съ болѣе широкой точки зрѣнія, можно разсматривать какъ распорядокъ системы. Съ этой точки зрѣнія, только изолированная сила была бы совершенно свободна, а введеніе второй силы, дѣйствующей на ту же точку,

дало бы уже систему. Этотъ общій способъ разсматриванія весьма полезенъ для примѣненія виртуальнаго принципа, ибо онъ дозволяетъ вездѣ предполагать ограниченіе силового дѣйствія и вынуждаетъ дѣлать различіе только между неподвижными препятствіями и такими условіями, которыя основываются только на комбинаціи съ другими силами перемѣнчиваго эффекта. Тѣмъ не менѣе, и это различіе возможно замѣнить болѣе общимъ способомъ представленія, изъ котораго именно Лагранжъ извлекъ лучшіе плоды. Прежде всего можно было бы смотрѣть на опредѣленные пути и на заданныя отношенія скоростей, какъ на причиненные силами, которыя въ сравненіи съ другими дѣйствующими на систему силами непреодолимы или, иначе говоря, безконечно велики. Однако, послѣдняя сторона этой идеи имѣетъ нѣчто рѣшительно неясное; въ дѣйствительности эти неподвижныя препятствія представляются силами, лишь крайне незначительно уступающими. Такимъ образомъ, нужно бы было эту форму мысли еще переработать въ смыслѣ правильнаго понятія безконечности, чтобы затѣмъ съ успѣхомъ можно было сдѣлать изъ нея примѣненіе въ строгой системѣ. Но въ такомъ изслѣдованіи здѣсь мы не имѣемъ нужды, такъ какъ самъ Лагранжъ избралъ совсѣмъ иной путь, къ тому же и болѣе естественный. Именно, онъ вводитъ неопредѣленныя силы, представляющія собою реакціи механической системы на дѣйствующія на нее силы. Величина этихъ силъ остается неопредѣленною. Но разъ онѣ введены, то можно разсматривать систему какъ свободную въ обыкновенномъ смыслѣ; ибо связи въ системѣ и соотвѣтствующія этимъ связямъ уравненія условій замѣнены этими неопредѣленными силами и ихъ (виртуальными) моментами.

Обращаясь снова къ нашей координатной оси, мы можемъ вообразить себѣ, что между движущимися по ней тѣлами заданы какія угодно произвольныя условія, которыя можно замѣнить неопредѣленными силами. Но эти неопредѣленныя силы нужно представлять помноженными на производную функцію, выражающую скорость ихъ точки приложенія. Слѣдовательно, неопредѣленнымъ остается въ нихъ только дѣйствительный силовой множитель, но не виртуальная скорость, съ какою развертывается ихъ дѣйствіе. Такимъ образомъ получаются новые члены суммы, представляющіе тѣ силы, которыми замѣненъ распорядокъ системы. Однако, не слѣдуетъ обманывать себя тѣмъ, будто бы заданныя обстоятельства движенія не столько выражаются самими неопредѣленными силовыми факторами, сколько соотвѣтственными производными функціями. Напротивъ, если принять произведеніе обоихъ факторовъ въ совокупности за символъ самостоятельной свободной силы, то во вся-

комъ случаѣ распорядокъ системы и уравненія условій будутъ замѣнены нѣкоторымъ числомъ силъ. Эти послѣднія силы прибавятся какъ члены къ другимъ силамъ и образуютъ вмѣстѣ съ ними алгебраическую сумму, которая и дастъ коллективное массовое ускореніе или, другими словами, равнодѣйствующую силу по координатной оси.

Если замѣнить простой арранжементъ на одной координатной оси тѣми же отношеніями, но такъ, чтобы эти отношенія на нашей оси представлялись редуціями отношеній, которыя сами по себѣ нельзя бы было вполне изобразить одною осевою редуціей, то получится основное представленіе и основное уравненіе, отъ котораго исходитъ Лагранжъ въ Теоріи функций ¹. Редуція къ тремъ осямъ включаетъ разложеніе силъ и скоростей, и объ этомъ предположеніи мы уже говорили. Разъ это предположеніе признано, то всѣ остальные принципиальные вопросы сводятся къ отношеніямъ, имѣющимъ мѣсто на одной координатной оси. Всякую силу, всякую заданную скорость, всякое уравненіе условій, короче, всякую данную необходимость, возможность или фактъ можно редуцировать на координатную ось, т.-е. дознать въ той части, которая дѣйствительна для направленія этой оси. Въ такомъ разѣ силы будутъ умножены на косинусы угловъ, составляемыхъ ихъ направленіями съ этою осью. А неопредѣленные силы получаютъ другой факторъ, который собственно и составляетъ главное дѣло и исходный пунктъ, а именно производную условнаго уравненія по разсматриваемой координатѣ. Эта функція замѣняетъ виртуальное въ силовомъ дѣйствіи, т.-е. она даетъ опредѣленіе движенія соотвѣтственно распорядку системы и условному уравненію. Если выразить ее по-Лагранжевыи безъ дифференціальныиъ вспомогательныиъ величинъ, то вмѣстѣ съ тѣмъ окажется, что виртуальный принципъ трактуетъ собственно не о величинѣ перемѣщеній, но о тѣхъ величинахъ, которыя возникновенію этихъ перемѣщеній какъ-бы производяще предшествуютъ и, если даже отвлечься отъ всякаго движенія, имѣются въ строго пунктуальномъ положеніи или, въ частности, въ самомъ состояніи равновѣсія.

Разсматриваемая здѣсь алгебраическая сумма данныиъ редуцированныхъ и неопредѣленныхъ, помноженныхъ на производныиъ, силъ можетъ давать какъ нуль, такъ и нѣкоторую равнодѣйствующую силу. Этотъ способъ постановки отношеній имѣетъ, слѣдовательно, еще ту выгоду, что даетъ тотчасъ замѣтить, что виртуальный принципъ примѣнимъ не только къ случаю равновѣсія, но что

¹ Théorie des fonctions anal., 2 изд. 3 отд. гл. 5, Art. 26.

онъ вообще дѣйствителенъ для движенія и для всякой силовой комбинаціи. Въ этомъ самомъ общемъ смыслѣ онъ сводится къ простой теоремѣ, что силы дѣйствуютъ въ мѣру виртуальныхъ скоростей, или что онѣ должны быть слагаемы съ неопредѣленными силами, которыми, какъ можно представить себѣ, замѣнены въ системѣ виртуальности, т.-е. предначертанія возможностей движенія. Но вмѣстѣ съ тѣмъ также очевидно, что виртуальный принципъ просто есть слѣдствіе правильного силового понятія. Ограничивающія скоростныя отношенія не суть величины, которыя бы возникали съ теченіемъ времени лишь въ силу непрерывнаго силового дѣйствія;—скорѣе, это величины, непосредственно данныя вмѣстѣ съ порядкомъ системы. Этимъ и объясняется, что неопредѣленные силы содержатъ факторъ, выражающій скоростное отношеніе. Если самый порядокъ системы съ теченіемъ времени измѣняется, то это не мѣшаетъ примѣненію принципа; ибо этотъ порядокъ всегда достаточно знать прежде всего лишь для одной точки, чтобы можно было составить виртуальное основное уравненіе, т.-е. вообще общее силовое уравненіе. Итакъ, виртуальный принципъ, въ сущности, учитъ просто суммированію силъ и именно специально такихъ, коихъ понятіе и дѣйствіе точнѣе опредѣляется скоростными отношеніями, связанными съ ихъ способомъ дѣйствія.

143. Особенность виртуальнаго предложенія заключается въ разсмотрѣніи тѣхъ силъ, которыя можно бы было назвать силами системы, ибо основаніе ихъ—въ устройствѣ системы. И это разсмотрѣніе можетъ имѣть мѣсто двоякимъ образомъ. Или данныя, дѣйствующія на систему силы, редуцируютъ сообразно съ устройствомъ системы; или вводятъ ихъ какъ силы свободныя и рядомъ съ ними выше охарактеризованныя неопредѣленные силы системы. Только въ первомъ случаѣ изъ данныхъ силъ образуются дѣйствительные виртуальные моменты. Но во второмъ случаѣ эти моменты не содержатъ въ себѣ ничего виртуально ограничивающаго и суть ничто иное, какъ выраженія свободныхъ силъ съ совершенно здѣсь произвольнымъ факторомъ дифференціального перемѣщенія или безъ такого множителя. Собственно виртуальное перенесено въ этомъ второмъ случаѣ въ выраженіе системныхъ силъ и особенно въ ихъ функціональные факторы, какъ мы это изъяснили выше.

Въ Аналитической Механикѣ Лагранжъ выводитъ свое, прежде всего просто статическое виртуальное основное уравненіе, сначала основываясь на первоначальнѣйшей изъ обѣихъ указанныхъ точекъ зрѣнія. Во второмъ отдѣленіи статики исходнымъ пунктомъ берутся данныя силы P , Q и т. д. Порядокъ системы, на которую должны дѣйствовать эти силы, заданныя своими свободными, абсолют-

ными величинами, остается произвольнымъ. Ради болѣе общности, подъ этимъ распорядкомъ разумѣютъ и, такъ сказать, отсутствіе всякаго распорядка, т.-е. случай совершенно свободной системы. Такого рода свобода состоитъ въ отсутствіи связей между точками или тѣлами системы. Между прочимъ, какъ мы уже не разъ замѣчали, и отдѣльная точка сама по себѣ представляетъ, съ болѣе общей точки зрѣнія, родъ системнаго сочетанія, ибо при ея посредствѣ дѣйствующія на нее силы взаимно ограничиваютъ другъ друга и этимъ образуютъ систему, обладающую, по крайней мѣрѣ, относительною связью. Впрочемъ, мы будемъ имѣть въ виду прямо случай обыкновенной системной связи. Эта системная связь дѣйствуетъ виртуальностями, въ силу которыхъ данная сила могутъ дѣйствовать на систему. Такимъ образомъ, измѣненное дѣйствіе данныхъ силъ, если вмѣстѣ съ Лагранжемъ положить въ основаніе изложенный нами (§ 129) первый способъ концепціи редукцій, выразится виртуальнымъ перемѣщеніемъ, которое можетъ быть произведено силою съ точки зрѣнія направленія силы. Черезъ это къ абсолютной силѣ присоединится количественное отношеніе, въ силу котораго она редуцируется. Итакъ, если линія данной силы и вмѣстѣ съ тѣмъ разстояніе точки приложенія отъ центра силы есть r , то виртуальное измѣненіе этого разстоянія или, другими словами, виртуальное перемѣщеніе точки приложенія, съ точки зрѣнія направленія силы, будетъ dr . Приближеніе точки приложенія къ центру силы или удаленіе ея отъ этого центра выразить пропорцію, въ какой абсолютная сила P достигаетъ своего, ограниченнаго системою, дѣйствія. Такимъ образомъ, вмѣсто абсолютной силы должно поставить ея виртуальную редукцію, т.-е. ея виртуальный моментъ Pdr . Такъ какъ тоже самое имѣетъ мѣсто въ отношеніи къ силѣ Q для разстоянія q , то получится виртуальный моментъ Qdq и аналогичныя выраженія для другихъ силъ. Такъ какъ въ этихъ выраженіяхъ подразумѣваются и знаки, смотря по тому, падаютъ ли проэкціи перемѣщеній въ направленіи силового дѣйствія, или въ противоположномъ направленіи, то для виртуальнаго уравненія равновѣсія силъ P , Q и т. д. будемъ имѣть выраженіе $Pdr + Qdq + \dots = 0$. Это и есть фундаментальное уравненіе. Оно выражено безъ общихъ координатъ; ибо линіи отстояній точекъ приложенія отъ центровъ силъ еще не представляютъ редукціи къ наименьшему числу средствъ для заданія положеній. Каждая сила разсматривается отдѣльно, и еще нельзя сказать, что ея дѣйствіе приведено къ связямъ системы, но нужно сказать наоборотъ, что связи системы редуцированы на направленіе данной силы. Такимъ образомъ имѣемъ нѣсколько произвольно направленныхъ, уже виртуально редуцированныхъ силъ,

которыхъ сумма приравнена нулю. Непосредственно же нельзя еще себѣ представить, какъ эти силы въ совершенно различномъ положеніи должны алгебраически суммироваться. Только для двухъ силъ, дѣйствующихъ по одной линіи, это представленіе совершенно ясно. Но этому недостатку помогаетъ возможность и совершенно различно направленныя силы заставить непосредственно дѣйствовать другъ на друга при помощи нити, какъ бы переломленной по различнымъ направленіямъ неподвижными точками, такъ чтобы силы эти, въполнѣ или частью, прямо суммировались или вычитались такъ, какъ будто бы рѣчь шла о неломаной прямой линіи. Если, кромѣ того, припомнить, что обхваты представляютъ напряженія силъ, а равно и вообще припомнить идеальную схему, абстрагированную отъ полиспаста, то станетъ ясно, что Лагранжъ не только имѣлъ право считать свою формулу совершенно строгою, но что онъ позаботился и о томъ, чтобы ближайшее изслѣдованіе не проглядѣло въ его фундаментальномъ уравненіи всей выгоды независимости отъ опредѣленныхъ координатъ. Впрочемъ, суммированіе элементарныхъ количествъ дѣйствія независимо отъ различія трехъ координатныхъ осей есть та форма, въ которой соединимость этихъ отношеній въ одно уравненіе является весьма наглядно и какъ слѣдствіе обычныхъ выводовъ.

144. Въ четвертомъ отдѣленіи статики только-что рассмотрѣнная основная формула представлена въ новой и болѣе общей формѣ, а о сущности метода ея вывода мы уже говорили въ § 142. А именно, данныя силы разсматриваются какъ свободныя, ибо вводятся неопредѣленныя силы. Эту же точку зрѣнія находимъ въ Теоріи функций, и здѣсь она осуществляется въ образѣ приведенія силъ и уравненій условій къ осямъ. Здѣсь этой редукціи нѣтъ; но условныя уравненія нельзя представить заданными иначе какъ въ координатахъ. Во всякомъ случаѣ, соотношенія условій можно бы было представить въ какой угодно формѣ; но всегда это будутъ отношенія между мѣстами точекъ или тѣлъ, т.-е. должны быть нѣкоторыми выраженіями взаимныхъ связей. Методомъ же вывода универсальнаго уравненія у Лагранжа взять методъ неопредѣленныхъ множителей. Каждое условное уравненіе, которое въ своемъ чисто геометрическомъ выраженіи имѣло бы только форонимическое значеніе, замѣняется произведеніемъ своего полного дифференціала на нѣкоторый коэффиціентъ. Этотъ коэффиціентъ представляетъ неопредѣленное сопротивленіе, вызываемое ограничивающимъ условіемъ, или, лучше сказать, сопровождающее это условіе. Эти новыя произведенія имѣютъ форму виртуальныхъ моментовъ и таковы и въ самомъ дѣлѣ, ибо они изображаютъ силы связей

по абсолютной величинѣ и по сопринадлежнымъ скоростнымъ отношеніямъ.

Такимъ образомъ число членовъ основнаго уравненія увеличивается на столько, сколько имѣется условныхъ уравненій. Виртуальные же моменты данныхъ силъ уже не имѣютъ болѣе первоначальнаго смысла, но становятся моментами перемѣшеній свободныхъ силъ. Ограниченія, которыя прежде мыслились переработанными въ величины перемѣшеній, теперь перенесены въ другое мѣсто и мы ихъ явственно усматриваемъ въ моментахъ неопредѣленныхъ силъ, моментахъ, образовавшихся изъ условныхъ уравненій.

Чисто аналитическое обоснованіе, на которое прежде всего опирается Лагранжъ, слѣдуетъ искать въ эквивалентности двоякаго рода операционныхъ группъ. Именно, можно исходить отъ перваго вида основнаго уравненія и опредѣлять виртуальные перемѣшенія съ помощью уравненій условій. Этого достигаютъ тѣмъ, что путемъ исключенія возможныхъ варьяціи приводятъ къ наименьшему числу, сообразно съ уравненіями условій. Но этотъ методъ исключенія можно замѣнить и методомъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ, слѣдуя чисто алгебраическимъ основоположеніямъ. Такимъ образомъ, нужно только продифференцированныя условныя уравненія снабдить неопредѣленнымъ коэффициентомъ и придать къ главному уравненію въ видѣ его членовъ. Полученное такимъ образомъ уравненіе эквивалентно антиципированному способу исключенія. Оно въ одномъ выраженіи содержитъ всѣ условія, которыя прежде даны были въ группѣ уравненій.

Духъ этого новаго метода вывода фундаментальнаго уравненія, какъ это прямо указываетъ и Лагранжъ¹, преимущественно состоитъ въ сведеніи распорядка данной механической системы къ случаю свободной системы. Въ самомъ дѣлѣ, связи замѣнены силами связей, а соединеніе этихъ силъ связей съ данными силами въ формѣ суммы, въ которой оба рода слагаемыхъ выступаютъ самостоятельно, и есть сущность новой основной формулы. Въ этомъ универсальномъ основномъ уравненіи нѣтъ редукціи ни свободныхъ силъ къ связямъ, ни связей къ свободнымъ силамъ, но оба рода элементовъ поставлены рядомъ, чтобы лишь въ дальнѣйшихъ операціяхъ дать эквивалентъ редукціи.

145. До сихъ поръ при изложеніи метода Лагранжа мы говорили только объ основномъ уравненіи статики; но выше, при разсмотрѣніи выводовъ Теоріи функцій (§ 142), мы уже ознакомились съ легкостью, съ какою сумму виртуальныхъ силовыхъ моментовъ

¹ Мѣс. anal. Т. I (1811), Статика, Sect. IV, Art. 7. Само основное ур. въ Art. 3.

столько же можно принимать за выражение всякой произвольной равнодѣйствующей движенья, сколько и за выражение особой равнодѣйствующей равной нулю. Тамъ, имѣя въ виду только одну ось, мы представляли себѣ, что массовое ускореніе по этой оси, т.-е. произведеніе изъ массы на вторую производную, какъ особое выраженіе для равнодѣйствующей движенья, находится въ одной части уравненія, будучи такимъ образомъ приравнено суммѣ данныхъ силъ и выраженій для дѣйствій неопредѣленныхъ силъ. вмѣсто одного массоваго ускоренія, естественно, должно представлять себѣ рядъ и сумму такихъ выраженій, если должно представлять себѣ нѣсколько тѣлъ какъ одно движущееся цѣлое. Но какъ, независимо отъ этого, каждое тѣло можетъ имѣть особое, ему свойственное движенье, то мы будемъ держаться представленія, что движенье каждаго тѣла выражено произведеніемъ массы на ускореніе.

Предположивъ это, мы тотчасъ поймемъ пріемъ Лагранжа въ его Аналитической Механикѣ ¹, посредствомъ котораго онъ получаетъ основное уравненіе динамики. На мѣсто нуля, находящагося въ одной части основнаго уравненія статики, появляются члены, выражающіе составныя движенья. Если перенести ихъ въ другую часть уравненія, чтобы возстановить общую форму приведенія уравненія къ нулю, то нужно перемѣнить ихъ знаки, и если эту перемѣну отнести непосредственно къ направленію силъ или виртуальныхъ моментовъ, то уже аналитически оказывается, что силы, соотвѣтствующія равнодѣйствующимъ движенья, должны быть взяты въ противоположномъ направленіи, чтобы давать равновѣсіе съ остальными силами. Д'Аламбертовъ принципъ, на который ссылается при этомъ случаѣ и Лагранжъ, принципъ, по которому обыкновенно сводятъ динамику на статику, строго говоря, является просто слѣдствіемъ вычисленія. Приэтомъ, натурально, предполагается, что законность отношенія виртуальныхъ моментовъ уже допущена и для случая движенья. Но это и есть натуральный способъ представленія, и пріемъ Лагранжа въ Теоріи функцій, появившейся 10-тью годами позже чѣмъ первый набросокъ Аналитической Механики, свидѣтельствуетъ объ этомъ. Движеніе есть болѣе общее предположеніе, а равновѣсіе только частный случай силовыхъ комбинацій. А какъ всякое уравненіе движенья, слѣдуя чисто алгебраическимъ началамъ, можно привести къ нулю, перемѣнивъ знаки членовъ въ одной его части, то потребна именно только эта перемѣна, чтобы получить ту теорему, которую, хотя съ историче-

¹ Ibid. Динамика, Sect. II.

ской точки зрѣнія и не совсѣмъ точно, принято называть принципомъ д'Аламбера. Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго (§ 126) мы знаемъ, что д'Аламберъ не вводилъ непосредственно какъ Лагранжъ, а до него въ отдѣльныхъ случаяхъ и Эйлеръ, противоположныхъ движеній, но тѣсно держался равновѣсія потерянныхъ силъ. Но этотъ послѣдній приѣмъ непригоденъ при постановкѣ динамическаго основнаго уравненія Лагранжа.

Если всякое уравненіе приведеніемъ къ нулю получаетъ форму статическаго отношенія, то можно бы было подумать, что 'наоборотъ' всякое статическое основное уравненіе превратится въ динамическое отношеніе, если часть виртуальныхъ моментовъ перенести съ обратными знаками въ другую часть, и могло бы казаться, что одно и то же уравненіе могло бы служить какъ выраженіемъ равновѣсія, такъ и движенія. Но отсюда не слѣдуетъ, чтобы тѣ же самыя силы, въ одной и той же алгебраической комбинаціи, безразлично давали бы и равновѣсіе, и движеніе. Этотъ аналитически важный и интересный случай разъясняется на простомъ примѣрѣ параллелограмма силъ. Если приложить равнодѣйствующую движенія въ противную сторону, то получимъ равновѣсіе трехъ силъ. Но если это равновѣсіе дано, то можно любую изъ трехъ силъ сдѣлать равнодѣйствующею движенія, взявъ ее въ противоположномъ направленіи, т.-е. перемѣнивъ ее знакъ. Но уравненіе, рассматриваемое чисто аналитически, останется одинаковымъ для обоихъ случаевъ, и вся разница будетъ состоять въ томъ, что нужно представить члены въ обѣихъ частяхъ распределенными иначе и сообразно этому измѣнить и знаки, слѣдуя алгебраическимъ принципамъ. Но можно бы было и не дѣлать такого распределенія, и того же измѣненія представленія достичь, замѣнивъ въ надлежащихъ мѣстахъ знаки равнозначными комбинаціями, наприм. плюсъ двойнымъ минусомъ, или отнеся знаки дѣйствій непосредственно къ силамъ, или наконецъ превративъ знаки силъ въ знаки дѣйствій, а силы принимая въ абсолютномъ смыслѣ. Но при всѣхъ обстоятельствахъ тѣ же самыя силы, точно опредѣленные по своему направленію, въ совокупной комбинаціи могутъ дать только одинъ результатъ. Измѣняя знаки и относя эти измѣненія къ самымъ силамъ, мы въ сущности вводимъ совсѣмъ инныя, именно противоположныя силы. Слѣдовательно, нельзя сказать, чтобы матеріалъ соотношенія составляли все тѣ же тождественныя силы. Если наприм. измѣнить всѣ знаки, что алгебраически дозволительно, то получимъ эквивалентную систему силъ, которая будетъ находиться въ равновѣсіи, если прежде было равновѣсіе. Алгебраически возможныя соотношенія, которыя могутъ быть сформированы

при равныхъ, впрочемъ, абсолютныхъ величинахъ силъ, изъ одного и того же уравненія перемѣною знаковъ и распредѣленіемъ членовъ на обѣ части уравненія, приведуть, поэтому, къ различнѣйшимъ истолкованіямъ. Во всякомъ случаѣ, отдѣленіемъ членовъ, можно уравненіе равновѣсія превратить въ уравненіе движенія, если только случайно эти отдѣленные группы членовъ сами по себѣ не будутъ равны нулю и находиться въ равновѣсіи. Но такое превращеніе всякаго чисто статическаго въ динамическое уравненіе только тогда происходитъ, когда нѣкоторыя силы будутъ взяты въ противоположномъ направленіи, такъ что, слѣдовательно, силы не останутся тѣми же. Но какъ подобное этому имѣетъ мѣсто, когда динамическое уравненіе приводятъ къ нулю, то ясно, что хотя нѣтъ никакого основанія аналитически дѣлать различіе между уравненіями движенія и уравненіями равновѣсія; но что, если обращать вниманіе не только на абсолютныя величины силъ, но и на ихъ данныя направленія и, слѣдовательно, на ихъ знаки, то движеніе или равновѣсіе должны быть различаемы по знакамъ дѣйствій. Впрочемъ, мы не будемъ здѣсь вдаваться въ это изслѣдованіе, ибо для насъ пока важнѣе аналитически общее въ уравненіяхъ статики и динамики, нежели то, чѣмъ они различаются.

Новый родъ членовъ, которыми динамическое основное уравненіе отличается отъ статическаго, тотчасъ же выраженъ у Лагранжа относительно осей. Ускоренія по этимъ осямъ, помноженные на массу, представляютъ силу, соотвѣтствующую движенію по оси. Если присоединить, какъ факторъ, перемѣщеніе по направленію этой оси, то получится виртуальный моментъ силы, соотвѣтствующей дѣйствительному движенію. Сумма подобныхъ выраженій и увеличиваетъ число членовъ статическаго основнаго уравненія и вмѣстѣ съ тѣмъ знаменуется уничтоженіемъ симметріи, ибо данныя силы отнесены къ своимъ направленіямъ, а силы, соотвѣтствующія этимъ движеніямъ, отнесены къ осямъ. Приведеніе уравненія къ нулю можно сдѣлать двояко, или поставивъ статическую составную часть, перемѣнивъ всѣ ея знаки, на сторону динамической, или же послѣднюю на мѣсто первой. Точнѣе выражаясь, можно бы было говорить только о составной части статическаго вида, т. е. о той группѣ членовъ, которая, еслибъ динамическая часть была равна нулю, обозначала бы равновѣсіе, да и характеризуется формою статическаго основнаго уравненія.

Смотря по тому, какую изъ этихъ методъ избрать, и способъ представленія будетъ соотвѣтствовать обычному, либо другому, равнымъ образомъ возможному пониманію. Въ самомъ дѣлѣ, вмѣсто того, чтобы брать составное движеніе въ противоположномъ на-

правленіи, вводя такимъ образомъ представленіе равновѣсія, можно также взять всѣ слагающія движенія, т.-е. данныя силы въ противоположномъ направленіи, что ясно видно уже на простомъ случаѣ параллелограмма силъ. Правда, и этотъ второй способъ представленія, въ сущности, соотвѣтствуетъ первому; но онъ въ особенности даетъ случай познать духъ отношеній, въ силу которыхъ всякое уравненіе между силами прямо можно разсматривать какъ эквивалентъ двухъ группъ двигательныхъ суммъ, которыя, какъ скоро представить ихъ дѣйствующими противно одна другой и, слѣдовательно, одну вычесть изъ другой, составляютъ систему равновѣсія.

146. Въ силу вышесказаннаго, всякія пререканія о томъ, составляетъ ли статическое основное уравненіе, переработанное динамически, или же динамическое уравненіе, статически редуцированное, наиболѣе удовлетворительную точку зрѣнія для пониманія основнаго отношенія механики,—всякій такой вопросъ былъ бы дѣломъ совершенно празднымъ. На дѣлѣ, не существуетъ ни исключительно статическаго, ни специально динамическаго основнаго отношенія, а просто общее силовое уравненіе, которое въ своей общности выступаетъ за предѣлы случайной противоположности статическаго динамическому. Разъ даны силы или, что въ сущности то же, ихъ виртуальные моменты, а приэтомъ и точно опредѣлены ихъ знаки, то и сложеніе этихъ силъ урегулировано посредствомъ операционныхъ знаковъ. Результатъ этого сложенія опять есть сила или ея моментъ, и какъ скоро этотъ результатъ приравненъ своей неразвитой формѣ, т.-е. слагающимъ силамъ, то это и будетъ основнымъ силовымъ уравненіемъ, которое, пожалуй, еще можно привести къ нулю. Но все равно, какимъ реальнымъ представленіемъ сопровождается эта редукція. Если измѣненный знакъ разсматривать не какъ принадлежность результата, т.-е. силы или движенія, но какъ отдѣльный операционный знакъ, то редуцированная форма не необходимо означаетъ равновѣсіе, но изображаетъ только тотъ фактъ, что два абсолютно представляемыхъ движенія равны между собою и, слѣдовательно, даютъ въ разности нуль. Такимъ образомъ, съ аналитической точки зрѣнія, привнесеніе представленія равновѣсія не необходимо, а просто возможно и зависитъ отъ того, что знаки непосредственно относятъ къ силамъ, чтобы можно было истолковывать ихъ въ смыслѣ противоположнаго дѣйствія.

По Лагранжевскому способу воззрѣнія, наиболѣе общая формула есть динамическая, подъ условіемъ, чтобы она сохраняла статическій смыслъ. Процедура обобщенія, которая имѣла мѣсто для статическаго основнаго уравненія при посредствѣ прямаго обраще-

нія къ условнымъ уравненіямъ помощію неопредѣленныхъ силовыхъ коэффиціентовъ и увеличивала число ихъ членовъ, перенесена и на основное уравненіе динамики ¹. Особое указаніе на этотъ счетъ было бы здѣсь излишне, ибо это динамическое основное уравненіе разсматривается прямо какъ статическое и только косвенно какъ уравненіе движенія.

Хотя Лагранжъ излагаетъ сперва статику, а потомъ динамику, и хотя онъ различаетъ динамическое основное уравненіе отъ статическаго, тѣмъ не менѣе, онъ разрабатываетъ, хотя и не высказывая этого прямо, фактически только одно универсальное силовое уравненіе, пригодное для всей механики. Мы видѣли также, что въ Теоріи функцій онъ въ разсматриваемомъ отношеніи съ самага начала не дѣлаетъ никакого различія между статикой и динамикой. Внѣшній параллелизмъ отдѣловъ и предметовъ въ Аналитической Механикѣ, вполне аналогично соотвѣтствующихъ другъ другу въ статикѣ и динамикѣ, повторяя тѣже самыя точки зрѣнія, показываетъ, что строгость систематики выиграла бы еще больше, если бы общія свойства равновѣсія были выведены какъ частное слѣдствіе изъ общаго силового уравненія, а слѣдовательно и въ тѣснѣйшей связи съ общими свойствами движенія. На это указывала чисто аналитическая точка зрѣнія. А именно, изложеніе методовъ, слѣдуя которымъ разработаны оба основныя уравненія, пришлось бы такимъ образомъ отнести къ одному силовому уравненію. Въ удвоеніи этихъ методическихъ указаній не было бы нужды, а всеобъемлемость этихъ простыхъ методическихъ основоположеній выступала бы съ еще большею очевидностью.

Мы указываемъ то главное правило, слѣдуя которому Лагранжъ изъ основнаго уравненія (въ той и другой формѣ, или въ томъ и другомъ смыслѣ) желаетъ развить самыя общія истины механики, и желаетъ всѣ частныя задачи, по крайней мѣрѣ, привести къ виду группы уравненій, указывающихъ пріемъ рѣшенія. Въ универсальнѣйшемъ выраженіи фундаментальнаго уравненія, именно въ уравненіи съ коэффиціентами, варьяціи перемѣщеній вездѣ разсматриваются какъ сами по себѣ свободныя, т.-е. какъ неопредѣленныя, и ихъ ближайшее опредѣленіе лежитъ лишь въ мысли о соединеніи различныхъ членовъ этого универсальнаго, уже все содержащаго, уравненія. Обработывая это уравненіе и группируя его члены соотвѣтственно различнымъ варьяціямъ перемѣщеній, тотчасъ увидимъ, какія виртуальныя перемѣщенія остаются независимыми и произвольными. Если затѣмъ, слѣдуя чисто алгебраическимъ основоположе-

¹ Мес. anal. Т. I (1811), Динам. Sect. IV, Art. 11.

ніямъ, приравняемъ множители этихъ произвольныхъ элементовъ нулю, то получимъ частныя уравненія, изъ которыхъ еще нужно будетъ исключить неопредѣленные силы.

Легче обозрѣваемо, хотя въ большинствѣ случаевъ и не такъ удобно то основоположеніе, слѣдуя которому обрабатываютъ основное уравненіе, когда оно не имѣетъ универсальной формы уравненія съ неопредѣленными коэффиціентами. Въ такомъ случаѣ виртуальныя перемѣщенія слѣдуетъ представлять не произвольными, каковы они для свободно-дѣйствующихъ силъ, но обусловленными, и эти условія слѣдуетъ искать въ условныхъ уравненіяхъ, которыя представляютъ распорядокъ системы и, какъ данныя проблемы, должны быть поставлены рядомъ съ общимъ основнымъ уравненіемъ, чтобы вообще придать ему опредѣленный смыслъ. Эти условныя уравненія и дадутъ соотношенія между виртуальными перемѣщеніями. Пользуясь этими соотношеніями, чтобы постановкою и исключеніемъ привести виртуальныя варьяціи основнаго уравненія къ наименьшему числу независимыхъ и произвольныхъ элементовъ перемѣщеній, снова получаютъ, какъ и въ первомъ случаѣ, частныя уравненія особыхъ задачъ. Такимъ образомъ, въ каждомъ случаѣ исходное уравненіе, сообразно съ условными уравненіями, распадается на нѣсколько частныхъ силовыхъ уравненій, изъ коихъ каждое получается вслѣдствіе того, что коэффиціентъ произвольнаго варьяціоннаго элемента должно приравнять нулю, чтобы удовлетворить совокупному уравненію.

147. Чтобы дать понятіе о систематикѣ, положенной въ основаніе Аналитической Механики Лагранжа, предпошлемъ нѣкоторыя внѣшнія данныя. Четыре первыя отдѣленія каждаго изъ обоихъ отдѣловъ — статикѣ и динамикѣ, на которые раздѣлена механика, обработаны совершенно аналогично другъ другу. Какъ статикѣ, такъ и динамикѣ предшествуетъ историческій очеркъ принциповъ, написанный безъ аналитическихъ выводовъ, даже вообще безъ всякихъ формулъ, съ единственнымъ въ этомъ смыслѣ исключеніемъ, введеннымъ во второмъ изданіи. Въ высшей степени знаменательно, что исключеніе это касается доказательства полиспастомъ принципа виртуальныхъ скоростей. Впрочемъ, даже специфически аналитическія понятія выражаетъ Лагранжъ въ обоихъ этихъ принципиальныхъ историческихъ введеніяхъ почти сплошь только словесно. Затѣмъ, подобные же эскизы предпосланы и гидростатикѣ и гидродинамикѣ, при переходѣ къ этимъ обѣимъ вѣтвямъ механики.

Какъ въ статикѣ, такъ и въ динамикѣ развитіе системы начинается собственно только со втораго отдѣленія. Именно, эти вторыя отдѣленія содержатъ выводъ фундаментальнаго уравненія и

нѣкоторыя вспомогательныя операціи для истолкованія его составныхъ частей въ ихъ статической и динамической формѣ. Третьи секціи содержатъ общія свойства равновѣсія и движенія, какъ ихъ можно вывести изъ основныхъ уравненій. Такимъ образомъ, въ статикѣ, слѣдуя общему правилу, прежде развиты три уравненія, исключаящія возможность поступательнаго перемѣщенія системы. Засимъ слѣдуютъ три уравненія, выражающія невозможность вращательнаго перемѣщенія. Этими шестью уравненіями выражаются совершенно общія условія равновѣсія. Отсутствие поступательнаго движенія по тремъ измѣреніямъ пространства даетъ родъ равновѣсія, при которомъ возможно вращеніе. Чтобы исключить и послѣднее и такимъ образомъ сдѣлать равновѣсіе совершеннымъ, должно быть выражено отсутствіе движенія вращательнаго, также мыслимаго по тремъ измѣреніямъ, и относительно трехъ осей это опять выражается тремя уравненіями. Такъ какъ тройное число зависитъ отъ трехъ измѣреній пространства, то собственно существуетъ лишь фундаментальная двойственность условій. На этотъ дуализмъ перемѣщенія и вращенія должно обратить вниманіе съ самаго начала, чтобы судить о симметріи въ расчлененіи и въ выводѣ механическаго знанія.

Въ сущности, въ разсматриваемомъ третьемъ отдѣленіи, кромѣ вывода шести уравненій равновѣсія, находится еще изъясненіе свойствъ равновѣсія, относящихся къ центру тяжести, а въ частности разсматриваются *maxima* и *minima*, имѣющія мѣсто въ случаѣ равновѣсія, и о которыхъ мы уже говорили при разсмотрѣніи принципа наименьшаго дѣйствія (§ 124). Впрочемъ, существенное содержаніе отдѣленія, отведеннаго общимъ свойствамъ равновѣсія, ограничивается тѣмъ, что соотвѣтствуетъ этимъ шести уравненіямъ. Зная это, лучше поймемъ параллельное отдѣленіе въ динамикѣ и его аналогіи.

Упомянутое параллельное отдѣленіе, т.-е. третья секція динамики, разсматриваетъ прежде всего движеніе центра тяжести произвольной системы и принципъ площадей. Оба эти предмета обнимаютъ для движущейся системы точную аналогію того, что для системы равновѣсія обозначали сказанныя шесть уравненій или, другими словами, условія отсутствія поступательнаго перемѣщенія и вращенія. Такимъ образомъ, если оставить въ сторонѣ центр тяжести, какъ понятіе чисто вспомогательное, и болѣе узкое пониманіе принципа площадей, то останутся намѣченными только самыя общія положительныя свойства существующаго движенія произвольной системы, и эти положительные признаки движенія какой угодно системы, выражающіеся также шестью уравненіями, въ своей

непосредственной дифференціальной формѣ будутъ разниться отъ нормированія равновѣсія только истолкованіемъ знаковъ. Специфически динамическія свойства, выражаемая принципомъ движенія центра тяжести и принципомъ площадей, обнаруживаются только при интеграціи. Но если не касаться этой интеграціи, то нормированія для статики и динамики, высказываемыя шестью характеристическими уравненіями, аналитически совпадаютъ и выражаютъ общее отношеніе, которое должно быть свойственно всякой механической системѣ для момента времени. Указаніе на особый случай равновѣсія основывается, какъ сказано, ни на иномъ чемъ, какъ на истолкованіи извѣстныхъ знаковъ, которые, вмѣсто того чтобы относить ихъ къ выраженію силъ или ускореній, изолируютъ просто какъ знаки дѣйствій, такъ что извѣстныя силы являясь представленіями дѣйствительныхъ, т.-е. составныхъ движеній.

При движеніи системы вообще отвлекаются отъ особыхъ, внутреннихъ и взаимныхъ измѣненій. На этомъ основаніи общее свойство движенія системы можетъ быть только свойствомъ движенія центра тяжести, представляющаго систему какъ цѣлое. Аналогично приводить и принципъ площадей или, другими словами, теорема о моментахъ вращенія. Такимъ образомъ, и въ динамикѣ опять появляется тотъ же дуализмъ переноснаго движенія и вращенія, какъ полнѣйшая аналогія статики, и даетъ первыя общія свойства движенія. Кромѣ того, припомнимъ еще теорему о постоянствѣ относимыхъ къ произвольной оси и такимъ образомъ суммируемыхъ количествъ движенія. Тогда будетъ видно, что есть два основныя свойства движенія произвольной системы, которыя, понимаемыя пунктуально, очевидно, совпадаютъ съ основными формами силовыхъ отношеній при равновѣсіи. Дальнѣйшія подробности касательно этого важнаго совпаденія здѣсь излишни, ибо на разсматриваемыя аналогіи мы уже указывали при изслѣдованіи различныхъ принциповъ (§ 119).

Кромѣ дифференціальныхъ уравненій, которыми характеризуются общія свойства движенія какой угодно системы, въ третьей секціи динамики развиты еще свойства, представляемыя принципами живыхъ силъ и наименьшаго дѣйствія. Изображеніе свойствъ движенія относительно главныхъ осей ¹ собственно нельзя разсматривать какъ выводъ новаго фундаментальнаго свойства, но лишь какъ дополненіе основныхъ представленій о вращеніи. Главныя оси составляютъ

¹ Впервые у Эйлера въ *Theoria motus corporum solidorum*, 1765, нов. изд. 1790 (ср. тамъ особенно Art. 446—447), тогда какъ первое представленіе о существованіи трехъ свободныхъ осей принадлежитъ Сегнеру, *Specimen theoriae turbinum*, Галле, 1755.

понятіе, которое можно разсматривать какъ коррелятъ понятія о центрѣ тяжести. На этомъ основаніи, послѣ фундаментальныхъ уравненій, намъ остается только разсмотрѣть уравненіе живыхъ силъ и свойства максимальныя и минимальныя. Въ этихъ обоихъ новыхъ случаяхъ новую форму отношеній дадутъ интегралы общаго силового уравненія механики. Если исходить отъ виртуальныхъ скоростей или, лучше, отъ соотвѣтствующихъ перемѣщеній, разсматривая эти скорости или перемѣщенія какъ дѣйствія самихъ силъ, мы найдемъ, какъ уже ранѣе указано было, по интегрированіи, полуквадраты скоростей. Объ особомъ предположеніи, которое при этомъ дѣлаетъ Лагранжъ, также рѣчь уже была (§ 107). Здѣсь насъ интересуетъ также только то обстоятельство, что интеграція общаго силового уравненія можетъ дать принципъ сохраненія. Методъ вывода начала наименьшаго дѣйствія опять-таки основывается на обработкѣ уравненія живыхъ силъ. Впрочемъ, принципъ наименьшаго дѣйствія, несмотря на особое истолкованіе, данное ему Лагранжемъ (ср. у насъ § 124), все-таки—одинъ изъ такихъ принциповъ, способъ вывода котораго всего менѣе можетъ имѣть вліяніе на систематику. Слѣдовательно, онъ и не способенъ дать положительныхъ указаній о достоинствахъ расположенія системы. Въ отрицательномъ же смыслѣ, должно признать преимуществомъ Лагранжевскаго изложенія, что онъ поставилъ его въ числѣ общихъ свойствъ движенія на послѣднемъ мѣстѣ.

Такъ какъ интеграціи, устанавливающія отношенія между конечными количествами движенія или между живыми силами, попадаютъ въ статику лишь непрямымъ путемъ, или же касаясь исключительно безконечно малыхъ величинъ, то параллелизмъ между динамикою и статикою существуетъ постольку, поскольку въ обѣихъ областяхъ рѣчь идетъ только о мгновенныхъ свойствахъ силовой системы, т.-е. поскольку касательно отношенія пространства и времени рѣчь идетъ о дифференціальныхъ уравненіяхъ втораго порядка. То, что динамика спеціально должна содержать, касается опредѣленія скоростей и пространствъ, слѣдовательно, вообще первыхъ и вторыхъ интеграцій исходныхъ уравненій, которыя весьма характеристично можно бы было назвать мгновенными уравненіями (Momen-tangleichungen).

Обѣ четвертая секціи развертываютъ ту универсальную форму общаго силового уравненія, которая выводится присоединеніемъ условныхъ уравненій съ неопредѣленными коэффициентами, и слѣдовательно разрѣшаетъ системныя связи въ силовую систему. Чрезъ это вся комбинація получаетъ характеръ группы силъ, которыя сами по себѣ свободны и лишь взаимно ограничиваютъ другъ друга.

Четырьмя упомянутыми секціями заканчиваются общія и принципиальныя ученія какъ статики, такъ и динамики, и слѣдующими отдѣленіями открывается область частныхъ задачъ, связанныхъ съ специальнымъ свойствомъ данной механической комбинаціи силъ и связей. Методъ рѣшенія и здѣсь основывается на общемъ правилѣ опредѣленія независимыхъ и произвольныхъ варьаций перемѣшеній, причемъ требуемыя исключенія выполняются въ томъ или другомъ родѣ сообразно съ уравненіями условій.

148. Въ статикѣ эти особыя задачи Лагранжъ начинаетъ случаемъ, когда механическая система приводится къ одной точкѣ. Правило сложенія дѣйствующихъ на точку силъ является здѣсь какъ специализація¹ общихъ, на всякую какую угодно систему распространенныхъ, условій равновѣсія.

Въ динамикѣ вмѣсто особыхъ задачъ выступаютъ прежде всего еще частные случаи болѣе общаго характера. Аналитически столь важная метода приближеній и типъ движенія, при которомъ рѣчь идетъ только о малыхъ колебаніяхъ системы, образуютъ этотъ переходъ. Затѣмъ слѣдуетъ дающій норму для космической механики случай свободной системы тѣлъ, которая можно разсматривать какъ точки и между которыми дѣйствуютъ притягательныя силы. За симъ трактуются несвободныя движенія, а наконецъ и трудная теорія вращенія.

Въ статикѣ, гдѣ начало особыхъ задачъ составляла точка, заключеніе образуетъ, натурально, тѣло произвольной формы. Промежутокъ занимаютъ различные способы соединенія посредствомъ гибкихъ нитей и твердыхъ линій, равно и относящіяся къ этимъ схемамъ отдѣльныя проблемы, каковы—равновѣсіе веревочнаго многоугольника и цѣпной линіи. Однако, для нашей цѣли болѣе точное перечисленіе этихъ частныхъ приложений излишне. Въ отношеніи къ принципамъ и къ системѣ интересны только сами общіе методы, посредствомъ которыхъ, не говоря о новыхъ специальныхъ заключеніяхъ, старыя рѣшенія этихъ частныхъ задачъ получаютъ, по меньшей мѣрѣ, новую форму и, что всего важнѣе, приводятся въ систематическую связь, какой прежде въ такомъ совершенствѣ еще не знали. Относительно Лагранжевской Аналитической Механики можно утвердительно сказать, что лучшіе элементы формы изложенія, какіе донинѣ можно встрѣтить въ учебникахъ и въ курсахъ этой науки или въ отдѣльныхъ статьяхъ, основною формою способа концепціи непрямо или прямо обязаны этому фундаментальному творенію. Но этимъ мы не хотимъ сказать, чтобы это

¹ Мéc. anal. Т. I (1811), Статика, Секц. V, чл. 7 и сл.

систематизирующее, просвѣщающее насчетъ методовъ и взаимной связи вліяніе Лагранжева труда было закончено и исчерпано. Кромѣ аналитической формы—этого, радикально, главнаго дѣла, и матеріально вещественныя точки зрѣнія, коими столь необычайно отличается Лагранжъ, не потому, а вопреки тому, что онъ былъ аналитъ, должны бы были и далѣе служить образцомъ въ несравненно большей мѣрѣ, чѣмъ это имѣло мѣсто доселѣ.

Всего менѣе проложилъ себѣ путь внутренній способъ сочетанія, въ силу котораго Лагранжъ трактуеть гидростатику и гидродинамику въ заключеніи статики и динамики лишь какъ частные прикладные случаи общей механики, исключивъ при разработкѣ этихъ отдѣловъ науки, хотя и предъявляемую исторіей, но рачіонально несостоятельную постановку особыхъ принциповъ. Особая свойства, выражающія нѣкоторыя весьма общія отношенія равновѣсія и движенія жидкостей или газовъ, должны быть выводимы изъ общихъ принциповъ механики, а не постулируемы. Единственно, что, по мнѣнію Лагранжа, должно быть предполагаемо даннымъ, это—особая форма агрегаціи и способа сочетанія частицъ системы. Поэтому, жидкости съ самаго начала разсматриваются какъ собраніе молекулъ, причемъ вводится представленіе, что приложенныя силы аффицируютъ каждую изъ частичекъ, во-первыхъ, прямо, а во-вторыхъ и непрямо въ силу взаимныхъ отношеній между молекулами.

Сдѣлать механику жидкостей, насколько это возможно, простымъ слѣдствіемъ общихъ механическихъ принциповъ,—это, очевидно, неизбежное требованіе научной техники. Еще задолго до Лагранжа, даже при самой закладкѣ новой науки, начали нѣкоторыя изъ общихъ механическихъ точекъ зрѣнія непосредственно переносить и на область жидкостей. Такъ, Галилей примѣнялъ въ этомъ направленіи начало виртуальныхъ скоростей. Тѣмъ не менѣе, несмотря на всѣ приступы, которые могли бы вести къ такому обобщенію, удержалось господство древней традиціи, коренящейся въ способѣ Архимеда, въ силу которой доступъ къ механикѣ жидкостей должны были открывать нѣкоторыя специфическія аксіомы и такимъ образомъ оставлять, вмѣстѣ съ тѣмъ, открытою пропасть, которая и до Лагранжа и послѣ него образовала изъ статики и динамики жидкостей, относительно, изолированный отдѣлъ науки. Итакъ, великая заслуга автора Аналитической Механики—въ томъ, что онъ распространилъ господство своего общаго силового уравненія и на область жидкостей, и такимъ образомъ впервые завершилъ область механики или, лучше, ея всеобъемлющихъ основныхъ законовъ.

149. Если статика капельныхъ и газообразныхъ жидкостей еще предполагаетъ особые принципы для рѣшенія своихъ задачъ, то тоже самое и въ той же мѣрѣ должна дѣлать и динамика этой области. Именно, если вообразить себѣ, что все таки гидродинамика посредствомъ д'Аламберова начала сведена къ гидростатикѣ, т.-е. законы движенія жидкостей къ условіямъ ихъ равновѣсія, то, по меньшей мѣрѣ, особыя статическія аксіомы, какія берутъ въ помощь при изученіи равновѣсія жидкостей, должны, хотя бы и косвенно, составлять основаніе и динамики жидкостей. Но къ этому фактически присоединяются и особыя гипотезы гидродинамики, благодаря которымъ эта трудная наука является до извѣстной степени изолированной отъ общей механики.

Не возвращаясь здѣсь снова къ особымъ гидростатическимъ аксіомамъ Архимеда, припомнимъ, что даже въ срединѣ 18-го столѣтія въ дѣлѣ изысканія основныхъ принциповъ гидростатики еще приходилось идти ощупью, и даже тому писателю, который впервые пришелъ къ общимъ уравненіямъ равновѣсія жидкостей. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая знаменитую работу Клеро ¹ о фигурѣ земли съ точки зрѣнія употребленныхъ въ ней или критикуемыхъ принциповъ гидростатики, найдемъ исканіе цѣлостнаго пониманія и именно приведенія отношеній равновѣсія къ обыкновеннымъ статическимъ принципамъ еще только при первомъ, весьма умѣренномъ, зачаткѣ. Прежде всего дѣло идетъ лишь о подчиненіи Гюйгенсова предположенія, что для равновѣсія поверхности требуется перпендикулярность центральныхъ равнодѣйствующихъ къ этой поверхности, и Ньютоновскаго требованія равновѣсія центральныхъ жидкихъ столбовъ,— дѣло идетъ, говоримъ мы, лишь о подчиненіи этихъ требованій болѣе широкому и болѣе полному принципу. Такой принципъ, выставленный у Клеро въ самомъ же началѣ ², гласитъ, что для равновѣсія необходимо, чтобы произвольная каналаобразная часть жидкости, ее перерѣзывающая, находилась сама собою въ равновѣсіи, такъ чтобы, слѣдовательно, въ ней всѣ стремленія частичекъ двигаться подѣ влияніемъ аффицирующихъ силъ взаимно уничтожались. Этотъ каналъ можетъ своими открытыми концами достигать самой поверхности или также, какъ въ частности дедуцируетъ Клеро, возвращаться въ самого себя. Бугеръ ³ пытался достигнуть того же, хотя и неудовлетворительною, попыткой простой

¹ Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique. Paris 1743, 2 изд. 1808.

² Ibid. 1-е отд. § 1.

³ Comparaison des deux lois etc. въ Mémoires de l'Académie des Sciences 1734, стр. 21.

комбинаціи Гюйгенсова предположенія съ Ньютоновскимъ критеріемъ. Маклоренъ расширилъ Ньютоновъ признакъ, состоявшій въ равновѣсіи центральныхъ жидкихъ столбовъ, предположивъ, что около всякой произвольной точки, т.-е. около всякой частицы жидкости, всѣ ведущіе къ поверхности жидкіе столбы должны производить на эту точку равныя давленія. Обще былъ упомянутый исходный пунктъ Клеро, и слѣдую своему принципу произвольнаго канала, ему удалось вывести извѣстныя парціальныя дифференціальныя уравненія, заключающія условія равновѣсія жидкостей. Поводомъ, въ интересахъ коего пытались, вплоть до самой, въ извѣстномъ смыслѣ слова законченной, работы Клеро овладѣть условіями равновѣсія жидкой массы посредствомъ этихъ неудовлетворительныхъ началъ, была проблема опредѣленія фигуры земли, т.-е. общей формы ея поверхности. Форма земли должна была вытекать изъ чисто-гидростатическихъ принциповъ, какъ скоро вообще была бы рѣшена задача объ опредѣленіи формы равновѣсія жидкой массы, когда каждая ея частица находится подъ вліяніемъ разсматриваемыхъ въ этомъ случаѣ силъ тяжести и центробѣжныхъ импульсовъ вращенія.

На мѣсто канальнаго принципа Клеро можно непосредственно поставить значительно простѣйшій принципъ, напоминающій упомянутую Маклореновскую идею. Въ самомъ дѣлѣ, можно выходить изъ положенія равенства давленія во всѣхъ направленіяхъ, мысленно разложить жидкость на дифференціальныя прямоугольные параллелепипеды и для каждой пары противоположныхъ сторонъ принять въ расчетъ давленіе, противодавленіе и силу. Въ обоихъ направленіяхъ импульсы должны быть равны, и такимъ образомъ получатся уравненія равновѣсія для трехъ координатныхъ осей. Это—способъ, на которомъ впервые Эйлеръ основалъ съ тѣхъ поръ обычный выводъ этихъ уравненій. Но эти предначертанія Эйлера, помѣщенные въ Мемуарахъ Берлинской Академіи (за 1755 г. Т. XI) ¹, которымъ нерѣдко слѣдуютъ и нынѣ, впрочемъ, отнюдь не удовлетворяли Лагранжа, неутомимо стремившагося къ обобщеніямъ. Послѣдній смотрѣлъ на принципъ равенства давленій во всѣхъ направленіяхъ, выражающій свойство жидкости, находящейся въ равновѣсіи, скорѣе какъ на ненужное опытное положеніе ². Сдѣлавъ прежде всего нѣкоторую уступку исторической традиціи, а именно взявъ въ своемъ, въ началѣ поставленномъ, аналитическомъ выводѣ исходнымъ пунктомъ сперва равновѣсіе произвольнаго канала въ Клеротовскомъ смыслѣ,

¹ Principes généraux de l'état de l'équilibre des fluides.

² Méc. anal. Т. I (1811). Статика. Sect. VI, Art. 6.

онъ предложилъ затѣмъ въполнѣ самостоятельный выводъ уравненій равновѣсія непосредственно изъ универсальнѣйшей формы общаго силоваго уравненія. Этотъ выводъ ¹ основывается исключительно на искусной постановкѣ общей формы условнаго уравненія, котораго варьяція, снабженная неопредѣленнымъ коэффициентомъ, даетъ тотъ виртуальный совокупный моментъ, который и требуется, по изложенной нами методѣ (§ 144), для вывода универсальнѣйшей формы фундаментальнаго уравненія равновѣсія. При этомъ Лагранжъ различаетъ несжимаемую жидкость отъ газообразно упругой. Въ первомъ случаѣ, хотя, впрочемъ, молекулы и предполагаются независимыми другъ отъ друга и удобоподвижными въ каждомъ направленіи, необходимо предположить сохраненіе плотности ихъ взаимнаго расположенія. Такимъ образомъ, дифференціальный тѣлесный элементъ долженъ оставаться постояннымъ, и въ этомъ состоитъ условное уравненіе, выражающее особую форму системы. Такимъ образомъ, неизмѣняемость объема, несмотря на измѣненіе формы ², выражается тѣмъ, что $dx dy dz - \text{Const} = 0$ рассматривается какъ условное уравненіе для особой формы системы и что, слѣдовательно, варьяція этого выраженія, т.-е., короче, варьяція элемента объема, съ неопредѣленнымъ множителемъ, вводится какъ членъ въ общее фундаментальное уравненіе. Въ такомъ разѣ уже простая форма этого уравненія непосредственно указываетъ на отношеніе между статикою и гидростатикою, ибо даетъ замѣтить, что отношенія, имѣющія мѣсто для системы свободныхъ и изолированныхъ точекъ, становятся опредѣленнѣе оформленными только этимъ условнымъ членомъ уравненія, соответствующимъ постоянству объема. Можно бы было даже утверждать, что почти нельзя и представить себѣ болѣе простаго приложенія общей фундаментальной формулы и принципа виртуальныхъ скоростей, нежели ихъ приложеніе къ жидкой системѣ.

150. Напротивъ, если предлежитъ случай упругой жидкости, то намѣсто постоянства объема выступать стремленіе къ расширенію объема. Эту упругость можно либо присоединить какъ силу, съ ея виртуальнымъ моментомъ, къ прочимъ даннымъ силамъ, какъ это дѣлаетъ Лагранжъ, либо, чтобы сохранить соразмѣрность и въ логическомъ способѣ представленія, можно въ данномъ опредѣленіи взаимнаго отталкиванія частицъ равнымъ образомъ видѣть особое системное условіе, подобно тому какъ въ случаѣ несжимаемыхъ жидкостей такимъ условіемъ было постоянство объема. Тогда являющійся въ

¹ Ibid. Sect. VII, Art. 10 и слѣд.

² Ibid., особенно Art 11.

обоихъ случаяхъ дополнительный членъ общаго уравненія получить не только аналитически согласную для обоого рода жидкостей форму, но и соотвѣтственно общій смыслъ. Ибо и въ случаѣ газообразныхъ жидкостей къ прочимъ виртуальнымъ моментамъ общаго фундаментальнаго уравненія нужно присоединить съ нѣкоторымъ коэффициентомъ варяцію элемента объема. Но этотъ неопредѣленный коэффициентъ есть въ данномъ случаѣ данная съ самою системою упругость¹. И Лагранжъ не упустилъ указать на это сродство формъ; но, повидимому, онъ остерегался, данныя силы, дѣйствующія не по способу предначертанія опредѣленныхъ путей или противопоставленія опредѣленныхъ препятствій, но подобныя внѣшнимъ силамъ, разсматривать какъ дѣйствительныя системныя условія. Тѣмъ не менѣе, самъ онъ всего болѣе содѣйствовалъ устраненію такого различія тѣмъ, что введеніемъ членовъ своего универсальнаго силоваго уравненія, выражающихъ системный распорядокъ, прямо разрѣшалъ системныя условія въ комбинацію неопредѣленныхъ силъ съ опредѣленными отношеніями. Но гдѣ случайно распорядокъ системы данъ непосредственно въ формѣ силы, опредѣляющей взаимное отношеніе частей системы, тамъ это обстоятельство не должно мѣшать придерживаться способа представленія и методовъ, въ силу которыхъ въ общемъ уравненіи системный распорядокъ долженъ быть каждый разъ видимымъ образомъ аналитически соотвѣтственно представленъ. Системы совершенно свободныхъ точекъ, которыя, сверхъ того, не стоятъ ни въ какомъ взаимномъ отношеніи, совсѣмъ недостаточно для того, чтобы данныя силы, которыя должны дѣйствовать на систему, привести въ какое нибудь соотношеніе отъ одной точки до другой. Поэтому необходимо взять какое нибудь внутреннее отношеніе за системный распорядокъ. Въ универсальномъ уравненіи Лагранжа варяціи, образующія факторы данныхъ силъ, прежде всего мыслятся совершенно произвольными, т.-е. можно мыслить, что каждая точка приложенія можетъ передвигаться по всѣмъ направленіямъ со скоростью, соотвѣтствующею приложенной силѣ, т.-е. съ совершенно независимою скоростью. Принимая во вниманіе виртуальное и относительное этихъ скоростей, даже совершенно нѣтъ надобности воображать еще особо скорость, которая соотвѣтствовала бы свободному дѣйствію данной силы. Итакъ, можно сказать, что подлежащія варяціи, разсматриваемыя абстрактно, прежде всего совершенно произвольны, и что только условные члены уравненія, соотвѣтствующіе системному распорядку, вносятъ ограниченія.

¹ Ibid. Sect. VIII, Art. 2.

Но въ духѣ такого пониманія должно всякую жидкую систему, будетъ-ли она несжимаемая или упругая, разсматривать какъ группу матеріальныхъ точекъ, которыя могутъ двигаться во всякомъ направленіи, и которыя были бы абсолютно свободны, еслибы не приходило, какъ особое свойство системы, внутреннее взаимное отношеніе, въ силу котораго объемъ, занимаемый этими точками, всегда имѣетъ опредѣленную величину. Способъ опредѣленія объема, т.-е. разстояній, на которыхъ частички, куда бы они ни двигались, дѣйствуютъ другъ на друга, и переносятъ другъ на друга дѣйствующія между ними силы;—этотъ способъ опредѣленія различенъ, смотря по тому какой родъ жидкостей имѣется. Но условное уравненіе во всякомъ случаѣ будетъ относиться къ закону постоянства или измѣненія этого объема, и если представить себѣ, что въ послѣднемъ случаѣ это измѣненіе выражается уравненіемъ движенія, то неопредѣленный коэффиціентъ его варьяціи въ концѣ концовъ долженъ опредѣлиться какъ сила упругости. При равновѣсіи, очевидно, экспансивная сила только уравниваетъ извѣстныя сдавливающія противныя силы. Но съ извѣстной точки зрѣнія то же самое дѣлаетъ и несжимаемость. Разница только въ томъ, что въ послѣднемъ случаѣ вызываемая статическая реакція, соотвѣтствующая неопредѣленному коэффиціенту, состоитъ также въ простомъ противодѣйствіи приложеннымъ силамъ и потому просто развиваетъ противодѣйствіе, соразмѣрное этимъ силамъ, тогда какъ въ случаѣ газовъ кромѣ извѣстной мѣры сопротивленія, гдѣ либо мѣшающаго сжатію, вмѣстѣ съ тѣмъ существуетъ и положительное стремленіе къ расширенію. Но это обстоятельство касается только знаковъ коэффиціента и ихъ истолкованія. Такимъ образомъ, весьма легко понять, что вводимый условнымъ уравненіемъ членъ универсальной формулы долженъ имѣть въ сущности одинъ и тотъ же видъ и для капельныхъ, и для газообразныхъ жидкостей. И на этомъ-то только и основывается торжество высшаго обобщенія, ибо безъ этой связи не хватало бы общихъ составныхъ частей, принадлежащихъ какъ теоріи газовъ, такъ и капельныхъ жидкостей. Переходъ отъ общаго механическаго силового уравненія, безъ нѣкоторой прибавки, прямо къ одному изъ обоихъ видовъ жидкостей былъ бы скачкомъ, который исключалъ бы существованіе дѣйствительно общей теоріи равновѣсія жидкостей. Такимъ то образомъ вводятъ произвольную подвижность всѣхъ частичекъ и воображаютъ, что она опредѣляется только одною причиною, которая предначертываетъ объемъ. Это предначертаніе объема то уподобляется неподвижному препятствію, то представляетъ силу, которую можно измѣрять другими силами. Но это раздвоеніе предположеній основывается только на величинѣ и направ-

лени предполагаемыхъ силъ внутреннихъ отношеній. Представляютъ ли дѣйствующую между частицами силу въ одномъ случаѣ какъ положительное стремленіе къ расширенію, въ другомъ же случаѣ полагать это стремленіе равнымъ нулю, но зато вводитъ идеально непреодолимое сопротивленіе сдавливанію; — такое различіе образовъ не измѣняетъ самой общей формы жидкой системы.

Въ заключеніе еще замѣтимъ, что представленіе о всесторонней подвижности частицъ дѣлаетъ излишнюю аксіоматическую гипотезу, что для равновѣсія давленіе на точку должно быть со всѣхъ сторонъ одинаково, какъ скоро вмѣстѣ съ Лагранжемъ ввести въ общее уравненіе эту сплошную подвижность и вмѣстѣ внутреннія отношенія опредѣленія объемовъ по обыкновеннымъ началамъ механики. Тогда это равенство давленій будетъ не предположеніемъ, а результатомъ, не вспомогательнымъ средствомъ для вывода равновѣсія, а особою теоремою, вытекающею изъ установленныхъ условий равновѣсія. Такимъ образомъ, понятія о совершенной подвижности частицъ вполне достаточно, и нѣтъ никакой надобности въ аксіомѣ о равенствѣ давленія, чтобы логически строго упорядочить основы гидростатики.

151. Подчиненіемъ всей гидростатики общему основному уравненію механики опредѣляется и постановка гидродинамики; ибо совершенно тотъ же пріемъ, посредствомъ котораго изъ статическаго фундаментальнаго уравненія выводится гидростатическое, даетъ возможность и общее динамическое уравненіе превратить въ гидродинамическое. Въ послѣднихъ секціяхъ Аналитической Механики Лагранжъ исполнилъ и эту задачу. Онъ предпочелъ даже придать первенствующее значеніе непосредственному выводу уравненія движенія жидкостей изъ общаго механическаго уравненія движенія, вмѣсто того чтобы, основываясь на своей собственной формулировкѣ принципа д'Аламбера, просто удовольствоваться введеніемъ въ готовое гидростатическое основное уравненіе силъ, противоположныхъ дѣйствительнымъ движеніямъ. Въ виду того, что уже ранѣе сказано нами о единствѣ статики и динамики и объ общемъ силовомъ уравненіи (§ 146), было бы вообще излишне пускаться въ особое по этому предмету изслѣдованіе.

Чтобы опредѣлить значеніе Лагранжевскаго включенія гидродинамики въ общую основную форму механическихъ силовыхъ отношеній, нужно бросить взглядъ на развитіе гидродинамическихъ принциповъ. Собственно научныя проблемы гидродинамическаго рода являются, натурально, позднѣе, чѣмъ задачи общей механики, коихъ разрѣшеніе предполагается первыми. Очевидно, Торричелли, изслѣдуя вопросъ о восхожденіи жидкостей изъ малыхъ отверстій

почти до высоты уровня въ сосудѣ, могъ придти къ научной антиципации закона скорости истечения лишь постольку, поскольку освоился съ общимъ динамическимъ отношеніемъ между первоначальною скоростью поднятія и соотвѣтствующею высотой поднятія. Такъ какъ онъ, въ силу опытныхъ фактовъ, долженъ былъ предположить, что, отвлекаясь отъ второстепенныхъ противодѣйствій и ограниченій, вертикальная струя изъ весьма малыхъ отверстій достигаетъ высоты уровня, то заключеніе, что скорость, дѣйствующая въ мѣстѣ истеченія, пропорціональна квадратному корню изъ высоты уровня, было просто обще-динамическою принадлежностью опытной теоремы объ этомъ поднятіи. Въ самомъ дѣлѣ, онъ и не могъ своей по указаніямъ опыта антиципированной теоремы доказать изъ механическихъ принциповъ ¹. И Ньютонъ отнюдь не сдѣлалъ точной дедукціи ², выставивъ недостаточное предположеніе, что при движеніи къ отверстию часть жидкости остается совершенно въ покоѣ. Итакъ, ошибка этого способа представленія могла быть устранена совсѣмъ не ссылкой на извѣстное сжатіе струи. Что касается этого способа представленія, то уже ранѣе Ньютона Вариньонъ далъ болѣе удовлетворительное объясненіе, которое основывалось на томъ, что давленіе жидкаго столба, соотвѣтствующаго отверстию и достигающаго уровня, сообщаетъ находящейся въ отверстіи жидкой массѣ упомянутую скорость. Однако, эта идея не была еще достаточно упрочена динамически, ибо она допускала, что скорость возникаетъ непосредственно, и не давала никакого отчета о времени. Требуемаго улучшенія легко можно было достигнуть, представивъ себѣ, что давленіе жидкаго столба дѣйствуетъ во время прохода чрезъ отверстіе на подлежащія части массы какъ ускоряющая сила.

Но вмѣстѣ съ объясненіемъ теоремы Торричелли былъ разработанъ только частный случай сравнительно весьма малыхъ отверстій, ибо для приблизительнаго сохраненія равнаго давленія должно было предположить и приблизительное постоянство уровня въ сосудѣ. Напротивъ, задача объ опредѣленіи движенія жидкости по трубкамъ была совершенно инаго свойства. Даніилъ Бернулли далъ рѣшеніе подобныхъ задачъ въ упомянутой уже нами въ § 96 гидродинамикѣ, руководствуясь принципомъ сохраненія живыхъ силъ. Если предположить, что при вертикальномъ движеніи въ трубкѣ горизонтальный слой жидкости заступаетъ мѣсто другаго и движется во всѣхъ точкахъ съ согласною скоростью какъ цѣ-

¹ Torricelli, De motu gravium etc. 1644.

² Phil. nat. princ. math. lib. II, prop. 36.

лое, то въ различныхъ мѣстахъ трубки, если принять въ расчетъ неодинаковую ширину ея, скорости должны быть обратно пропорціональны поперечнымъ сѣченіямъ. Поэтому, эту вытекающую изъ устройства системы необходимость вмѣстѣ съ соотвѣтствующею компенсаціею силъ, дѣйствующихъ въ различныхъ частяхъ жидкости, можно бы было непосредственно трактовать такъ же точно, какъ трактовали въ концѣ концовъ и проблему сложнаго маятника. Можно бы было опредѣлить потерянные и пріобрѣтенныя силы и такимъ образомъ непосредственно нормировать фундаментальное отношеніе. А между тѣмъ на дѣлѣ, какъ сказано, исходнымъ пунктомъ въ рѣшеніи подобнаго рода задачъ сдѣлали начало живыхъ силъ. Только д'Аламберъ замѣнилъ въ задачахъ этого рода принципъ сохраненія живыхъ силъ соотвѣтствующимъ извѣстному своему общему динамическому методу усмотрѣніемъ потерянныхъ силъ. Но на первыхъ порахъ, т.-е. еще въ своемъ *Traité des fluides* (1744) онъ взялъ за основаніе вышеупомянутое предположеніе параллельности слоевъ, которое допустимо только для относительно узкихъ трубокъ. Къ совершенно общей нормѣ рѣшенія гидродинамическихъ проблемъ д'Аламберъ пришелъ только шестью годами позже, когда онъ гидростатическія уравненія Клеро дополнилъ общими гидродинамическими уравненіями и доказалъ законность своего принципа сведенія динамики на статику и въ области движенія жидкостей. Такимъ образомъ, въ своемъ *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (1752) онъ вывелъ парціальныя дифференціальныя уравненія движенія капельныхъ и упругихъ жидкостей ¹. Однако, совершеннѣйшая форма этихъ уравненій впервые дана была Эйлеромъ въ 1755 въ Мемуарахъ Берлинской Академіи ², такъ что этому нѣмецкому математику, какъ мы видѣли въ § 149, слѣдуетъ вмѣстѣ съ тѣмъ приписать и заключительную дедукцію и постановку основныхъ уравненій гидростатики и гидродинамики.

Теперь все было сформировано удовлетворительно постольку, поскольку не видѣли ничего страннаго въ томъ, что все еще равенство давленія во всѣхъ направленіяхъ около точки принималось за основаніе какъ специфическая аксіома для гидростатики, а слѣдовательно посредственно и для гидродинамики. Лагранжъ научилъ, что можно бы было эту аксіому забраковать, а вмѣстѣ съ тѣмъ и его теорія движенія жидкостей стала простымъ слѣдствіемъ общаго силового уравненія. Итакъ, едва-ли нужно еще разъ упоминать

¹ Именно, гл. 8 этого сочиненія содержитъ очеркъ гидродинамики.

² *Principes généraux du mouvement des fluides.*

о томъ, что общее гидродинамическое уравненіе должно содержать совершенно такой же условный членъ какъ и гидростатическое, и что вся разниа относится къ введенію силъ, противоположныхъ дѣйствительнымъ движеніямъ. Но классъ членовъ, которыми эти силы обозначаются и отмѣчаются, отнюдь не имѣетъ здѣсь инаго смысла, чѣмъ въ общемъ динамическомъ уравненіи, и потому намъ нѣтъ надобности особо говорить о нихъ.

Вообще видно, что историческій ходъ развитія, которымъ пришли къ самымъ общимъ принципамъ гидродинамики, существенно согласовался съ успѣхами углубленія общихъ динамическихъ принциповъ. Прежде чѣмъ достигли этихъ абстрактныхъ концепцій, довольствовались принципомъ сохраненія живыхъ силъ. Только д'Аламбертовскій пріемъ, общій динамическій смыслъ котораго былъ лишь обобщеніемъ точекъ зрѣнія, законность которыхъ указана была Яковомъ Бернулли для сложнаго маятника,—только этотъ пріемъ открылъ путь примѣненію и въ гидродинамикѣ того же способа, посредствомъ котораго приводятъ вопросы къ послѣднимъ принципамъ въ общей механикѣ. Лагранжъ, формально завершивъ дѣло въ этомъ направленіи, доказалъ законность слѣдствій своего общаго способа воззрѣнія на механическія отношенія и для механики жидкостей. Послѣ этого завершенія можно съ извѣстной точки зрѣнія даже утверждать, что механика газообразныхъ системъ представляетъ, пожалуй, болѣе простой случай, чѣмъ механика твердыхъ тѣлъ и особыхъ машинообразныхъ системныхъ распорядковъ. Въ самомъ дѣлѣ, чѣмъ свободнѣе отдѣльныя части или точки системы, тѣмъ она проще. Но идеальная схема газообразной системы сплошь состоитъ изъ свободно движущихся частицъ или точекъ, и единственная системная связь ихъ состоитъ въ отталкивательной силѣ, стремящейся увеличить объемъ. Но подобная системная схема есть простѣйшая, какую только можно себѣ представить; ибо группа совершенно свободныхъ точекъ сама по себѣ еще отнюдь не есть связанная система, и самое меньшее, чего еще можно требовать, это — нѣкоторой силы, посредствомъ которой частицы приходятъ въ связь. Только посредствомъ подобной внутренней силы не будетъ абсолютнаго изолированія, которое иначе имѣло-бы мѣсто между отдѣльными частицами. Группу механически изолированныхъ точекъ можно, пожалуй, называть системою, но только въ такомъ смыслѣ, въ какомъ и ноль называютъ величиною. На дѣлѣ подобная группа распадается на столько системъ, сколько точекъ; ибо всякая точка, поскольку на нее дѣйствуетъ нѣсколько силъ и этимъ ограничиваютъ другъ друга, во всякомъ случаѣ представляетъ въ извѣстномъ смыслѣ систему. Точка сама по себѣ представляетъ

какъ бы недѣлимое сочетаніе, и въ самомъ дѣлѣ сами по себѣ свободныя виртуальныя перемѣщенія этой точки подлежатъ ограниченію, какъ скоро хотя одну изъ двухъ, наприм., силъ разсматривать какъ представительницу системной формы. То обстоятельство, что точка недѣлима, и что поэтому каждая изъ двухъ силъ не имѣетъ своей собственной, механически отдѣльной точки приложенія, хотя бы мѣстно и совпадающей съ точкою приложенія другой силы, дѣлаетъ самую механически цѣльную точку простѣйшею механическою системою. Хотя въ этомъ смыслѣ и должно соизнаться, что группа совершенно свободныхъ и изолированныхъ точекъ, если отвлечься отъ всякой механической связи, и не есть еще система, но распадается на нѣсколько системъ — точекъ, то также очевидно, что первый рациональный шагъ въ механикѣ долженъ состоять въ постановкѣ простѣйшаго понятія о состоящей изъ нѣсколькихъ частей системѣ, долженствующей образовать предметъ приложенія какихъ угодно силъ.

152. Вышеобъясненная мысль приводитъ насъ отъ конца механики Лагранжа къ ея началу. Исходнымъ пунктомъ было представленіе нѣсколькихъ мѣстъ приложенія произвольныхъ силъ, а совокупность этихъ мѣстъ приложенія замѣняла еще вполне неопредѣленную идею механической системы или, если угодно, механическаго распорядка. Всякій особый распорядокъ основывается на существованіи нѣкотораго рода связи между частями, и это существованіе нѣкоторыхъ отношеній, дающихъ связь и зависимость частей другъ отъ друга, также вездѣ подразумѣвается. Иначе, наприм., сложеніе виртуальныхъ моментовъ для различныхъ точекъ не имѣло бы даже никакого смысла; скорѣе, должно бы было опредѣлять равновѣсіе для каждой отдѣльной точки, а о цѣльной системѣ, по недостатку механической связи, не могло бы быть даже и рѣчи. Въ крайнемъ случаѣ, можно бы было, съ точки зрѣнія феноменальной и чисто-геометрической, спрашивать о томъ, какая общая картина положенія, движенія и группировки возникла бы изъ соединенія отношеній отдѣльныхъ точекъ въ одно общее созерцаніе.

Но каковъ же логически точнѣйшій способъ представлять себѣ совершенно общую связь между мѣстами приложенія силъ, не воображая при этомъ нѣкотораго спеціальнаго способа сочетанія? Абстрактная мысль о зависимости движенія одной точки приложенія отъ движенія нѣкоторой другой точки приложенія, повидимому, есть представленіе удовлетворительное; но точнѣе на мѣсто движенія поставить положеніе, ибо такой способъ представленія годится и для покоя и равновѣсія. Такимъ образомъ, положеніе одной точки приложенія, со стороны его возможности и при этомъ

прочности или измѣнчивости, опредѣляется положеніемъ другой точки приложенія, такъ что какъ статическое, такъ и динамическое отношеніе различныхъ точекъ взаимно ограничивается. На этихъ ограниченіяхъ основывается форма, какую можетъ принимать дѣйствіе данныхъ внѣшнихъ силъ, которыя воображаютъ дѣйствующими непосредственно на каждое отдѣльное мѣсто приложенія. Итакъ, на этихъ ограниченіяхъ основывается, другими словами, возможное, т.-е. виртуальное силовое дѣйствіе. Вмѣстѣ съ тѣмъ, изъ этого чисто рациональнаго вывода видно, что принципъ виртуальнаго силового дѣйствія долженъ бы непосредственно сопутствовать мысли о дѣйствіи системной связи. Нельзя во всей полнотѣ мыслить одно понятіе, не удерживая вмѣстѣ съ тѣмъ и другое представленіе. Такимъ образомъ принципъ виртуальнаго измѣненія является внутреннею, чисто рациональною необходимостью; ибо возможное дѣйствіе въ сферѣ данной связи должно, очевидно, находить себѣ и мѣру въ предѣлахъ этой связи. Но принципъ виртуальнаго измѣненія самъ по себѣ еще не есть принципъ виртуальныхъ скоростей. Чтобы положеніе, что виртуальныя измѣненія представляютъ силовое дѣйствіе, превратить въ положеніе, что виртуальныя скорости или варьяціи перемѣшеній совокупно представляютъ этотъ эффектъ дифференціально, должно быть показано, что эти виртуальныя скорости или варьяціи перемѣшеній дѣйствительно механически измѣряютъ и ограниченія, противопоставляемые измѣняющему дѣйствію данныхъ внѣшнихъ силъ. Но доказательство этого весьма просто, какъ скоро вообразимъ, что системныя связи, т.-е. механическая зависимость взаимныхъ положеній мѣстъ приложенія выражена уравненіями. Въ такомъ разѣ, подлежащія функціи будутъ относиться къ этимъ мѣстамъ, или, лучше, къ ихъ координатамъ, и возможности измѣненія содержащихся въ этихъ функціяхъ перемѣнныхъ количествъ, очевидно, будутъ нормированы для отдѣльнаго пунктуальнаго состоянія системы функцій, слѣдуя чисто аналитическимъ основоположеніямъ, первыми дифференціальными коэффиціентами или, лучше, вообще первыми дифференціальными уравненіями. Если положеніе каждой точки отнести ко времени, что формально возможно и для случая равновѣсія, ибо здѣсь тождественность положенія въ теченіе времени существенна, то можно сказать, что возможные измѣненія и соотвѣтствующія необходимыя отношенія для ближайшаго теченія функцій опредѣляются соотношеніями первыхъ дифференціальныхъ коэффиціентовъ. Но эти чисто аналитическія соотношенія нуждаются только въ механическомъ истолкованіи, чтобы ихъ признать за отношенія возможныхъ скоростей и за мѣру виртуальныхъ ско-

ростей. Если Ньютонъ пользовался понятіемъ скорости, чтобы охарактеризовать измѣненіе функціи, то тѣмъ болѣе позволительно то, чѣмъ характеризуется возможность измѣненія функціи, въ частномъ случаѣ, когда эта функція означаетъ нѣкоторую механическую зависимость, понимать какъ возможность измѣненія этой механической связи и называть виртуальною скоростью. Понятіе, которое можетъ имѣть силу уже для абстрактныхъ системъ функцій, въ которыхъ мыслятся только общія количества, въ извѣстномъ абстрактномъ смыслѣ уже правомочно, прежде чѣмъ будетъ примѣнено къ механическимъ отношеніямъ. Всякое уравненіе между переменными можно разсматривать какъ условное уравненіе, въ силу котораго отношенія, нормированныя даннымъ уравненіемъ, вполнѣ обще и неопредѣленно, получаютъ нѣкоторое ограниченіе. Поэтому было бы возможно построить себѣ даже чисто аналитически принципъ виртуальныхъ скоростей для комбинаціи уравненій, если примкнуть къ Ньютоновскому понятію скорости роста или уменьшенія переменнаго. Впрочемъ, эти замѣчанія должны только показать, насколько правильнымъ тактомъ руководился Лангранжъ, выставляя принципъ виртуальныхъ скоростей какъ такой, съ которымъ аналитическій методъ соединимъ всего удобнѣе и натуральнѣе.

153. Виртуальный принципъ, съ одной стороны, вытекаетъ изъ понятія силы, а съ другой—изъ понятія системной связи. Последняя аналитически выражается условными уравненіями. Поэтому, чтобы эту аналитическую основу показать разомъ въ одномъ выраженіи, необходимо имѣть то универсальное силовое уравненіе, которое Лагранжъ устанавливаетъ только въ обѣихъ четвертыхъ секціяхъ своей Аналитической Механики, и которое содержитъ условный членъ или вообще классъ условныхъ членовъ съ неопредѣленными коэффиціентами. Онъ могъ бы тотчасъ же построить это уравненіе и исходить отъ него уже въ началѣ своего произведенія, еслибы онъ раскрылъ понятіе о механической связи между точками, воображая ихъ, впрочемъ, свободными, и прямо представилъ бы чрезъ посредство общаго аналитическаго выраженія. Чрезъ это всеобщность руководящаго способа представленія значительно выиграла бы. Впрочемъ, при такомъ предположеніи, примѣръ газообразной системы, какъ это уже разяснено, былъ бы однимъ изъ простѣйшихъ. Стройная связь, сопутствующая механикѣ во всѣхъ ея приложеніяхъ къ частнымъ порядкамъ, должна всего яснѣе выступать тамъ, гдѣ тотчасъ же на первомъ мѣстѣ въ ясной абстракціи выступаетъ общая идея о зависящихъ отъ способа соединенія отношеніяхъ и какъ фундаментальная схема остается какъ бы прототипомъ для обработки всѣхъ частныхъ формъ.

Этимъ указано, что точки зрѣнія Лагранжа, прямо или невысказанно исходящія у него отъ общаго характера механическаго распорядка, причемъ онъ слѣдуетъ шагъ за шагомъ по всѣмъ ступенямъ распорядковъ, — эти точки зрѣнія соотвѣтствуютъ и натуральнѣйшей теоретической систематикѣ. Потому, система механики должна и расчленяться аналогично тѣмъ распорядкамъ или тѣмъ устройствамъ, которыя называютъ механическими системами, хотя при настоящемъ нашемъ изслѣдованіи выраженіе это выглядитъ двусмысленно. Слѣдовательно, система механической теоріи и система въ смыслѣ механической аранжировки массъ и силъ связей суть два понятія, хотя и совпадающія по имени лишь случайно, но по внутреннимъ основаніямъ на дѣлѣ существенно сопринадлежны. Лагранжъ отвѣчалъ этой сопринадлежности тѣмъ, что не только исходилъ изъ виртуальнаго принципа, но и общія свойства равновѣсія и движенія разсматривалъ какъ типы отношеній, не зависящихъ отъ частнаго свойства системы. Кромѣ того, и спеціальныя изслѣдованія, относящіяся къ особымъ системнымъ комбинаціямъ, являютъ у него большею частію характеръ натуральной постепенности перехода отъ простыхъ распорядковъ къ сложнымъ.

Чтобы схватить все значеніе этой всеобщности способовъ пониманія, разсмотримъ, между прочимъ, какъ оба главныя свойства движенія, группирующіяся около принципа движенія центра тяжести и принципа площадей, приводятся просто къ измѣненіямъ координатныхъ осей и по праву являются въ такомъ видѣ, какъ будто бы ими ничего иного не выражалось какъ то, что перемѣщеніе системы координатныхъ осей и вращеніе координатныхъ плоскостей около соотвѣтствующихъ осей не имѣютъ значенія. Такой способъ разсмотрѣнія, особенно характеризующій духъ Лагранжа, въ самомъ дѣлѣ есть средство, при помощи котораго отвлеченіе отъ частнаго свойства механическаго распорядка предъявляется настолько ясно, на сколько это возможно. Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были внутреннія отношенія, но ими никогда не можетъ выразиться то, что основывалось на абсолютныхъ разстояніяхъ или абсолютныхъ вращеніяхъ по отношенію къ координатнымъ осямъ. Разсмотрѣнію подлежатъ только взаимныя разстоянія и положенія, и слѣдов. при всѣхъ измѣненіяхъ системы сохраняется нѣчто общее, что должно обнаружиться при варьіи координатныхъ осей. Степень отвлеченія, присущая этого рода заключеніямъ, была въ особенности свойственна Лагранжу и его сплошь аналитическому методу.

Не должно также забывать, что эта насквозь аналитическая методика основывалась въ рукахъ Лагранжа на одномъ вспомогательномъ

средствъ, безъ котораго всѣ прочія средства не принесли бы никакой пользы. Это вовсе не специальное варьационное исчисленіе, которое, будучи введено Эйлеромъ, только у Лагранжа было настоящимъ образомъ обосновано и разработано ¹; — не варьационное исчисленіе въ его неизбежной необходимости для особыхъ проблемъ механики, но, по меньшей мѣрѣ, столь же всеобщая ловкость въ употребленіи различныхъ точекъ зрѣнія дифференцированія и варьированія и соотвѣтственныхъ характеристическихъ знаковъ есть то, благодаря чему механическія изслѣдованія великаго аналита стали возможны и выполнялись съ такою отвлеченностью, съ такою систематичностью и съ такою гибкостью. Безъ этого просто не было бы возможности даже только надлежащимъ образомъ выразить виртуальные моменты въ системахъ движенія и различить болѣе абстрактныя варьанціи отъ обыкновенныхъ дифференціаловъ.

И дальнѣйшее развитіе методовъ и способовъ представленія аналитической механики уже въ нѣкоторой мѣрѣ показало, какая сила заключается въ болѣе свободномъ употребленіи варьационныхъ точекъ зрѣнія. Ирландскій математикъ В. Р. Гамильтонъ, съ великимъ уваженіемъ смотрѣвшій на универсальную формулу Лагранжа и называвшій вытекающую изъ нея форму аналитической механики «въ нѣкоторомъ родѣ научною поэзіею» (a kind of scientific poem) ², какъ будетъ далѣе показано, и самъ, благодаря свободной манерѣ, съ какою онъ употреблялъ варьационныя точки зрѣнія, достигъ формально немаловажныхъ результатовъ, отчасти касающихся всеобще-принципіальнаго. Говоря вообще, сужденіе Гамильтона о Лагранжѣ было таково, что изъ всѣхъ выдающихся аналитиковъ со временъ Ньютона онъ сдѣлалъ больше всего для расширенія дедуктивныхъ изысканій и приведенія ихъ въ гармонію, и мы можемъ добавить, что одного мастерства въ употребленіи анализа было бы для этого еще недостаточно, еслибы оно не соединялось съ высокою степенью способности къ непосредственному и вещественному пониманію дѣйствительныхъ отношеній въ природѣ. Конечно, Ирландскій астрономъ далеко не обладалъ способностью, достаточною для достойной оцѣнки высшихъ и абстрактныхъ сторонъ Лагран-

¹ Вѣ Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, *Miscellanea Taurinensia* vol. II (1760 — 1761) вмѣстѣ съ слѣдующею за симъ обширною статьею о динамическихъ приложеніяхъ; обѣ также въ *Oeuvres de Lagrange* vol. I (Paris 1867), стр. 335—468: впрочемъ ср. также *Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions*, 2 изд. 1806, 21 Лекція, гдѣ также данъ въ концѣ (стр. 437) краткій набросокъ основной схемы варіационнаго метода въ обыкновенной нотаци.

² *Philosophical Transactions London* 1834, стр. 247.

жевскаго труда; напротивъ, выражаясь вкривь и вкосъ и двусмысленно, онъ только компрометируетъ твореніе Аналитической Механики. Поэтизированіе въ наукѣ—вещь довольно подозрительная, и имени поэзіи не заслуживаютъ такія предпріятія, которыя въ области высшей абстракціи имѣютъ въ виду исчерпать разумныя, даже трезвыя возможности этой области. Полная, всесторонняя оцѣнка значенія шага, сдѣланнаго Лагранжемъ, возможна будетъ только тогда, когда, спустя нѣсколько поколѣній, осwoятся съ представляемою нами еще вышею ступенью абстракціи.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Философскія вліянія.

154. Съ 17 и до 19 столѣтія философія была или непосредственно метафизикою, или же дѣлала попытки освободиться отъ метафизики. Всѣ слѣдствія метафизическаго способа мышленія только тормозили успѣхи механики, какъ мы это уже видѣли въ первомъ типичномъ примѣрѣ на Декартѣ. Гоббесъ и Локкъ, какъ и Спиноза, отнюдь не касались вопросовъ механики. Локкъ отличался даже рѣшительною неспособностью математически понять прямо для него популярно начертанное ¹ Ньютономъ ядро планетной системы тяготѣнія, и удовольствовался просто авторитетнымъ увѣреніемъ Гюйгенса, что математическіе выводы сами по себѣ были въ немъ въ порядкѣ. Какимъ образомъ Лейбницъ производилъ всякаго рода миражи метафизическими иносказаніями, только распространяя этимъ путемъ туманъ и затемняя яснѣйшія вещи безплодными схоластическими пререканіями, въ этомъ мы уже достаточно убѣдились, какъ и въ томъ, что позднѣе нѣчто подобное имѣло мѣсто и по отношенію къ Мопертуи. Ньютонъ вообще не пускался въ подобнаго рода метафизику, но тамъ, гдѣ онъ, въ видѣ исключенія, такъ сказать, нѣсколько философствовалъ, отнюдь не обнаружилъ никакихъ свойствъ логическаго рода. Въ заключительной схоли своего главнаго произведенія (въ концѣ 3-й книги), равно и въ приложеніяхъ къ «Оптикѣ» (вопросъ 23), онъ объявилъ, что распорядокъ планетной системы нельзя свести къ механическимъ причинамъ, но должно сводить къ причинамъ цѣли, поскольку онъ указывалъ вмѣстѣ съ тѣмъ на вмѣшательство «правя-

¹ Cp. D. Brewster: Memoirs of the life of Newton. 2 тома. London 1855. T. I, гл. 12, стр. 339—340.

шей десницы» своего Господа Бога въ случаѣ, если порядокъ системы будетъ какъ-нибудь нарушенъ. По истинѣ, Галилей никогда не думалъ такъ о законотѣрности въ природѣ! Но онъ и не былъ англичаниномъ, и потому не имѣлъ нужды представлять себѣ міръ въ видѣ машины, о которой Изначальный Машиностроитель долженъ былъ заботиться всякій разъ, когда, въ силу самаго способа постройки, колеса расшатаются или что-нибудь сломается.

Въ ряду дальнѣйшихъ соприкосновеній философіи съ идеями механики выдѣляется въ 18 столѣтіи Юмъ, но его стремленія существенно направлены были къ освобожденію отъ метафизики. Въ изъясненіи теоріи причинности въ своемъ «Изслѣдованіи о человѣческомъ умѣ» онъ устраняетъ ¹ изъ понятія силы всякое представленіе, которое не можетъ быть точно объяснено фактическимъ дѣйствіемъ и отношеніемъ событія къ факту или обстоятельству, за которымъ оно постоянно и эмпирически нераздѣльно слѣдуетъ. Заключение о дѣйствіи обосновывается у Юма всегда эмпирически, и его ссылка на механику есть даже его рѣшающая инстанція. Не разъ у него приводимый примѣръ билліардныхъ шаровъ ² долженъ изъяснять, что изъ чистыхъ идей или чисто-идеальнымъ сужденіемъ нельзя познать дѣйствія, производимаго ударомъ. Въ самомъ дѣлѣ, съ помощію чисто-логическихъ и математическихъ понятій, не примыкая ни къ какому опытному элементу, никто не выведетъ, что при центральномъ ударѣ и при одинаковыхъ массахъ, формѣ и упругости движущійся шаръ сообщаетъ свое движеніе покоящемуся, а самъ останавливается. Начало сообщенія движенія или силы должно быть выведено изъ опыта, и хотя оно и будетъ добыто расчлененіемъ сложныхъ фактовъ опыта, слѣдовательно, при посредствѣ анализирующаго сужденія, тѣмъ не менѣе, оно въ силу этого не перестаетъ быть опытнымъ элементомъ. Въ этомъ разѣ, умъ добылъ этотъ принципъ не изъ себя, какъ напри- математическую аксіому, но лишь выдѣлилъ его изъ области опыта и сдѣлалъ очевиднымъ какъ простой основной феноменъ. И Юмъ совершенно послѣдовательно утверждаетъ ³, что о внутренней сущности сообщенія движенія мы не могли бы имѣть никакого понятія. Въ томъ же мѣстѣ, гдѣ онъ объясняетъ, что законъ сообщенія, именно, что тѣло получаетъ столько движенія, сколько другое передаетъ, есть законъ въ сущности эмпирической, тамъ онъ выражаетъ подобное же воззрѣніе и на законъ косности. Должное отношеніе:

¹ David Hume, Essays. Т. II, изд. 1753 (concerning human Understanding). Nr. VII.

² Ibid., особенно во 2 части 7-го опыта, стр. 122.

³ Тамъ же. Примѣчаніе въ концѣ 1-й части 7-го Essay.

къ этому и подобнымъ понятіямъ будетъ то, когда въ подобныхъ выраженіяхъ мы будемъ видѣть ничто иное какъ описаніе явленій. Въ этомъ же родѣ будетъ и точный смыслъ Ньютонова тяготѣнія, ибо оно должно представлять не сущность силы, а явленія и, ничего болѣе. Въ заключительномъ примѣчаніи къ седьмому Essay Юмъ замѣчаетъ, что вопросъ объ измѣреніи силы поставленъ такъ, что отвѣтъ на него предполагалъ возможность сдѣлать силу самое по себѣ непосредственно предметомъ познанія и измѣренія. Но всѣ мыслители были-де того мнѣнія, что силы слѣдуетъ познавать и измѣрять по ихъ дѣйствіямъ. Такимъ образомъ, разница между измѣреніемъ силъ квадратами скоростей или же просто скоростями относится-де къ количеству разнороднаго ошутимаго дѣйствія. Сила, какъ и вообще всякая причина, есть-де всегда нѣчто относительное, пріобрѣтающее смыслъ только чрезъ коррелятъ дѣйствія. Но какимъ образомъ два дѣйствія необходимо связаны одно съ другимъ, объ этомъ мы совсѣмъ-де не имѣемъ непосредственнаго понятія, но вырабатываемъ себѣ правило этой зависимости только изъ наблюденій надъ состояніями природы.

Съ точки зрѣнія Юмовскаго способа воззрѣнія, важный и продолжительный споръ объ измѣреніи силъ былъ бы совсѣмъ невозможенъ; ибо о непосредственныхъ количествахъ дѣйствія, т.-е. о количествахъ явленій нельзя долго спорить, не приходя къ окончательному рѣшенію, ибо математика и опытъ должны тотчасъ несомнѣнно охарактеризовать открыто подлежащій предметъ и овладѣть имъ. Статическое дѣйствіе, въ своей особой формѣ, не тождественно съ динамическимъ, и большая разница—измѣрять ли рядъ накопившихся дѣйствій, или же элементъ этого ряда. Масштабъ вездѣ одинъ и тотъ же; но измѣряемые факты различны. Въ своемъ изслѣдованіи механическихъ понятій Юмъ не особенно глубоко вникалъ въ особые представленія, и только въ виду этого мы должны ограничиться сказаннымъ. Но легко видѣть, что Юмовскіе принципы, если ихъ разсматривать не со стороны ихъ механически неудовлетворительной постановки, но какъ руководящія точки зрѣнія для возможныхъ дальнѣйшихъ слѣдствій, могутъ способствовать болѣе строгому способу представленія объ основныхъ понятіяхъ механики, по меньшей мѣрѣ, тѣмъ, что держатся въ сторонѣ отъ ложной метафизики и въ этомъ смыслѣ даютъ свободу уму.

Конечно, на Юма нельзя смотрѣть какъ на послѣднюю инстанцію. Онъ не только не питалъ положительнаго интереса къ точной спеціальной наукѣ, но и до такой степени поддавался путаницѣ, господствовавшей у математиковъ касательно понятія о безконечно-маломъ, что заимствовалъ отсюда основаніе къ нѣкоторому скептициз-

му. Самъ онъ не былъ расположенъ, а по характеру своихъ занятій не былъ и подготовленъ, даже, судя по всѣмъ видимостямъ, по складу ума былъ и неспособенъ, короче говоря, былъ не въ состояніи разглядѣть или даже аналитически распутать математическихъ трудностей и, въ частности, математическаго предразсудка безконечности. Но чувство личной несостоятельности не должно бы было дозволить ему взвалить всю отвѣтственность вообще на разумъ и такимъ образомъ быть прикосновеннымъ и тому, вредному для науки, скепсису, который, вмѣсто того чтобы обратиться противъ суевѣрія и культа ложныхъ догмъ, непроизвольно обращается противъ разума или, по крайней мѣрѣ, не мѣшаетъ такому обращенію. Подобный подозрительнаго свойства элементъ обрѣтался въ Юмовскомъ настроеніи, хотя было бы ошибочно, какъ это вообще принято, помѣщать его въ ряду скептиковъ. Противъ этого я выставилъ вѣскія возраженія въ моей Критической Исторіи Философіи; этотъ остроумнѣйшій и просвѣщеннѣйшій мыслитель 18-го вѣка имѣлъ достаточно характера и былъ слишкомъ положителенъ, и потому его никакъ нельзя помѣстить въ рубрикѣ безсодержательнаго скепсиса. Не имѣй онъ этого послѣдняго свойства, его вышеприведенныя случайныя замѣчанія о предметахъ механики не были бы, относительно говоря, такъ мѣткі. Они были полезны и истинно научному духу благоприятны, ибо имѣли антиметафизическій смыслъ.

155. Только-что указаннаго у Юма преимущества не имѣется у Канта, который, впрочемъ, кое-чему иному понаучился у великаго Шотландца и могъ бы поучиться и по части механическихъ понятій; но мы встрѣчаемъ у него совсѣмъ противоположное, а именно метафизическое искаженіе позитивно твердо установленныхъ представлений. Въ многорѣчивомъ первомъ произведеніи Канта¹ всего осязательнѣе эти метафизическія несообразности, позднѣе нѣсколько прикрытыя. Примѣромъ ихъ можетъ служить допущеніе нѣкоторой промежуточной вещи между мертвою и живою силою², т.-е. нѣкотораго промежуточнаго состоянія, въ которомъ сила еще не вполне живая. И здѣсь великій мыслитель идетъ объ руку съ великимъ экспериментаторомъ; въ самомъ дѣлѣ, онъ дозналъ собственнымъ опытомъ, что ружейная пуля глубже проникаетъ, когда вылетаетъ изъ дула въ нѣсколькихъ шагахъ отъ цѣли, нежели когда лишь въ нѣсколькихъ дюймахъ³. Именно, она требуетъ этого пространства, чтобы сдѣлаться живою въ болѣе высокой степени и подтвердить

¹ Мысли объ истинной оцѣнкѣ живыхъ силъ etc. 1747.

² Ibid. § 122.

³ Ibid. § 130; сравни также § 134.

эту новую Кантову теорію объ оживленіи («Vivification») силы. Нѣсколькихъ дюймовъ пройденнаго пути не достаточно для этого Кантовскаго оживленія въ метафизическомъ родѣ. Это оживленіе, натурально, имѣетъ свои предѣлы, при которыхъ оно завершается. Впрочемъ, мы можемъ не распространяться далѣе о томъ, какъ мало понималъ Кантъ принципы механики и какъ онъ вначалѣ толковалъ въ мірѣ своей метафизической идеологіи.

Распространеніе Ньютоновской системы побудило Канта написать популярное сочиненіе «Общая естественная исторія и теорія неба» (1755), въ которомъ онъ выставленное еще при самомъ зарожденіи греческой философіи допущеніе первоначальнаго воздухообразнаго состоянія міра сочеталъ съ неопредѣленными представленіями притяженія и сгущенія согласно новымъ образцамъ, и это сочетаніе въ цѣломъ получило у него сносное выраженіе, въ частностяхъ же сплошь перемѣшано съ произвольными допущеніями. Впервыхъ, мы не имѣемъ никакихъ представленій о томъ, каковъ былъ механическій распорядокъ космической системы первобытнаго тумана, каковѣ наприм. пространство занимала разсѣянная матерія и каково могло быть въ ней состояніе движенія въ данный моментъ. Еслибы между частями ея когда-либо существовало полное равновѣсіе, то въ силу закона инерціи оно существовало бы и теперь. Но такихъ строго механическихъ соображеній Кантъ не представляетъ, а потому у него и не дано никакого отчета о туманной системѣ какъ о нѣкоторомъ, подлежащемъ опредѣленной механической характеристикѣ, распорядкѣ матеріальныхъ частицъ и дѣйствующихъ между ними силъ. Неопредѣленно общее представленіе о притяженіи, съ прибавкою, въ совершенно античномъ смыслѣ, исполнѣ произвольной, и потому не обоснованной на фактахъ, взаимной помѣхи и потому бокового отклоненія частицъ (2 часть, середина 1 главнаго отдѣла), — вотъ и все, чѣмъ достаточно должны объясняться группировка, сгущеніе и движеніе міровыхъ тѣлъ. Какъ первоначально могли бы возникнуть центры притяженія, и почему именно опредѣленные мѣста въ этомъ міровомъ туманѣ могли бы играть роль ядеръ, около которыхъ происходило сгущеніе, этого теорія даже совсѣмъ не касается, и такъ какъ на подобные пробы даже и не указывается, то начертаніе этой теоріи, такъ богатой вымыслами, есть просто собраніе туманно шаткихъ очерковъ. Не говоря уже объ отсутствіи посредства математики, и чисто логическая цѣпь заключеній невѣрна и даже не свидѣтельствуетъ о надлежащемъ пониманіи системы тяготѣнія, въ которой рѣчь идетъ не о боковыхъ помѣхахъ движенію частицъ, а лишь о комбинаціи болѣе или менѣе косвеннаго движенія по инерціи съ притяженіемъ.

Такая неустойчивая шаткость отнюдь не строго механическаго способа мышленія подтверждается даже такими примѣрами, гдѣ Кантъ, идя ложнымъ путемъ, совершенно случайно наталкивается на правильные выводы. Такъ (ч. I, въ концѣ), начавъ съ фактически ложной идеи, что эксцентрицитеты планетъ съ удаленіемъ отъ солнца должны болѣе и болѣе уменьшаться, въ заключеніе онъ постепенно приходитъ къ большимъ эксцентрицитетамъ кометъ и заключаетъ отсюда, что по ту сторону Сатурна должны быть еще планеты. Здѣсь ложное основаніе повело случайно къ предположенію, подтвердившемуся позднѣе Гершелевскимъ открытіемъ Урана. Дѣйствительно же механическое заключеніе, какъ это въ нашемъ столѣтіи случилось относительно Нептуна, могло бы основываться только на дознанномъ возмущающемъ дѣйствіи тяготѣнія неизвѣстныхъ массъ. Въ противоположность этому, вышеприведенныя Кантовскія заключенія производятъ даже комическое впечатлѣніе, если разсматривать ихъ не въ общихъ чертахъ, а ближе сравнить предсказанія съ дѣйствительностью. Кантъ напророчилъ, что по ту сторону Сатурна нужно ожидать планету съ бѣльшимъ эксцентрицитетомъ, тогда какъ на дѣлѣ эксцентрицитетъ Урана почти на 10 процентовъ менѣе чѣмъ у Сатурна, а Нептунъ оказался еще болѣе неблагопріятенъ Кантовской гипотезѣ, ибо его эксцентрицитетъ имѣлъ дерзость быть почти въ пять разъ менѣе чѣмъ у Урана. Кометы же просто взбунтовались противъ Кенигсбергскаго мудреца; ибо въ теченіе одного столѣтія нашлось около дюжины такихъ, которыя даже остаются по сю сторону Сатурна и при этомъ имѣютъ несравненно большіе эксцентрицитеты, чѣмъ какая-либо изъ извѣстныхъ планетъ.

156. Кантъ вполне разрываетъ съ положительно научнымъ характеромъ уже существующихъ механики и воззрѣнія на природу въ тѣхъ своихъ опытахъ, гдѣ онъ заявляетъ претензію точнѣе схватить отдѣльныя основныя представленія механики. Въ одномъ сочиненіи 1758 г., носящемъ притязательное заглавіе «Новое ученіе о движеніи и покоѣ и т. д.», котораго мысли нашли себѣ мѣсто и въ главномъ натурфилософскомъ сочиненіи 1786 г., въ «Метафизическихъ началахъ естествознанія» (3 отдѣлъ, доказательство предложенія 4 о дѣйствіи и противодѣйствіи), отрицается сообщеніе движенія вообще и specially при неупругомъ ударѣ. Ни одно-де изъ обоихъ тѣлъ не сообщаетъ движенія другому, но покоются рядомъ вслѣдствіе равенства дѣйствія и противодѣйствія съ той и другой стороны. Еще темнѣе, чѣмъ этотъ какъ бы суррогатъ дѣйствительнаго и постепеннаго сообщенія движенія, искаженіе метода чисто феноменальныхъ кажущихся движеній, которымъ уже пользовался Гюйгенсъ при доказательствѣ законовъ упругаго удара и

который получилъ уже права гражданства въ механикѣ. Ударяется ли шаръ о стѣну, или стѣна о шаръ, для абсолютнаго пространства должно быть все равно. Между тѣмъ, абсолютное пространство — понятіе, у Канта совершенно неясное и позднѣе серьезно не прояснено несостоятельнымъ допущеніемъ субъективности пространства. Но въ отношеніи къ третьимъ предметамъ, которые принимаются неподвижными, оказывается очевиднымъ, что допущеніе сказаннаго безразличія ложно и попытка—считать покой и движеніе въ метафизическомъ туманѣ за одно и то же, не породила даже и обманчивой видимости. Основаніемъ этой странно вычурной замѣны прежде допущеннаго сообщенія движенія было, какъ въ особенности обнаруживаетъ примѣчаніе къ упомянутому сочиненію, предположеніе, что непрерывность въ сообщеніи движенія немислима. Въ этомъ направленіи Элеаты поступали гораздо основательнѣе, ибо они вовсе отрицали всякое движеніе, и позднѣе Кантъ въ своей критикѣ разума самъ поднялся почти до той же высоты, но впрочемъ не сумѣлъ извлечь правильныхъ слѣдствій изъ этой воздушной точки зрѣнія.

Съ изданіемъ «Критики чистаго разума» (1781) и все относящееся къ механикѣ, о чемъ трактовалъ Кантъ въ вышеупомянутомъ натурфилософскомъ главномъ произведеніи, нужно было подчинить четверной и двѣнадцатичленной таблицѣ метафизическихъ категорій, искусственно построенной согласно логическимъ формамъ сужденій, и такимъ образомъ получить четырежды три высшихъ закона природы, которые должны были быть независимы отъ опыта, а вытекать изъ простыхъ возможностей мышленія. О рѣдкостной путаницѣ, обнаружившейся въ этой произвольной игрѣ категоріями, мы получимъ только приблизительное понятіе, если въ видѣ примѣра выставимъ относительно самое понятное и самое благовидное, что только и можетъ сколько-нибудь заинтересовать. Такъ, гипотетическому сужденію соотвѣтствуетъ законъ причинности, а послѣднему въ механикѣ—принципъ инерціи. Отрицательное воззрѣніе, что всякому измѣненію соотвѣтствуетъ измѣняющая причина, и что, слѣдовательно, отсутствіе измѣненія указываетъ на отсутствіе измѣняющей силы и сообразно этому на сохраненіе состоянія движенія или покоя,—воззрѣніе это, во всякомъ случаѣ, могло бы, если слѣдовать логическимъ рамкамъ, найти здѣсь себѣ мѣсто, еслибы вообще стоило говорить о такой самопонятной и безплодной характеристикѣ. Напротивъ, положительно мыслима инерція только подъ логическою рубрикою тождества состоянія, но здѣсь ее Кантъ не ищетъ. Вмѣсто того, эта форма категорическаго сужденія даетъ ему такъ-называемую субстанцію, а говоря языкомъ механики, сохраненіе одинаковаго количества матеріи, но,

кстати замѣтить, невзирая на всѣ царящія надъ природою свойства категорій, не даетъ ни одного общаго закона несотворимости и неразрушимости запаса механической силы, и объ истинномъ смыслѣ этого закона, какъ мы нынѣ его понимаемъ, Кантъ не имѣлъ даже ни малѣйшаго предчувствія. Необходимые элементы опыта,—а одинъ изъ таковыхъ и есть фактичность механическаго закона ксности,—нигдѣ не были оцѣнены, а принесены въ жертву взвинченности ложной мыслительной необходимости. Даже понятіе фороніи не представлено у Канта чисто и прямо; ибо, по истинѣ, это—строго математическое понятіе и вовсе не предполагаетъ матеріи. Въ заключеніе мы даже узнаемъ у него, что возможное движеніе есть прямолинейное, дѣйствительное—круговое, а необходимое—эллиптически, и этимъ, въ самомъ дѣлѣ, достаточнo просвѣщаемся насчетъ характера возможности, дѣйствительности и необходимости метафизическаго мышленія Кантовской философіи. Тѣмъ не менѣе, мы не можемъ не обратить вниманія на одно воззрѣніе, концепція котораго обыкновенно раціональнѣе, нежели у самого Канта. Съ утвердительною и отрицательною формою логическаго сужденія нашъ метафизикъ соединяетъ категоріи реальности и отрицанія, а соотвѣтственно этой игрушкѣ такъ называемое построеніе матеріи. Одно притяженіе повело бы, по Канту, къ концентраціи матеріи въ непротяженную точку, а одно отталкиваніе—къ разсѣянію до безконечности; сообразно этому, сущность матеріи слѣдуетъ представлять какъ соединеніе притягательной и отталкивательной силы. Но, къ сожалѣнію, мы не знаемъ никакой отталкивательной силы между міровыми тѣлами; ибо сохраненіе разстояній, т.-е. слерживаніе исключительно притягательныхъ дѣйствій, производитъ никакъ не отталкивательная сила, а инерція. Конечно, идеологъ желаетъ, по примѣру епископа Берклея, устранить матерію и потому просто приравниваетъ ее силовой комбинаціи. Но при такомъ фантазерствѣ забывается дѣйствительность матеріи, которая не допускаетъ замѣны безпредметными силами. Кромѣ того, этотъ антагонизмъ мыслится совершенно нематематически и ведетъ начало отъ той взаимной помѣхи частицъ, на которую мы наткнулись, говоря о туманной гипотезѣ происхожденія міра. Противоположныя силы, дѣйствующія между двумя матеріальными частицами, будутъ или въ равновѣсіи, или произведутъ перевѣсъ въ сторону одной изъ нихъ. Въ случаѣ равновѣсія нѣтъ мѣста причинѣ движенія, а въ случаѣ перевѣса обнаруживается неограниченное приближеніе или неограниченное удаленіе совершенно такъ, какъ бы дѣло шло только объ одной силѣ. Кантовское заблужденіе вмѣстѣ съ этимъ становится вполнѣ очевидно. Еслибы этого метафизика и въ ту-

манной области воздушныхъ формальныхъ концепцій было бы такъ же легко изболтать, какъ и въ области натурфилософіи, то математикѣ и механикѣ нечего было бы опасаться и его мистическаго ученія о пространствѣ. Насколько правильно само по себѣ было недопускать безсмыслицы безконечнаго пространства, настолько было большимъ самообольщеніемъ дѣлать изъ субъективности носительницу дѣйствительнаго пространства, вмѣсто того, чтобы просто сдѣлать ее отвѣтственною за фантазмъ безконечности и за заключеніе изъ произвольнаго представленія къ соотвѣтствующей дѣйствительности. Впрочемъ, изъ всего знаменитаго ученія о пространствѣ не нашлось для Кантовской натурфилософіи ни одного плодотворнаго зернышка, и объясненіе природы приняло у этого метафизика такой видъ, какъ будто бы его ученія объ идеальности пространства и времени совсѣмъ не существовало. Въ этомъ мы усматриваемъ внѣшнее доказательство, именно доказательство собственнымъ примѣромъ Канта, насколько его ученіе о пространствѣ и времени прямо было пусто и ненадежно.

Единственно, что можно сдѣлать въ пользу Канта, это — указать на то обстоятельство, что математики и физики, получившіе образованіе въ его время или подъ вліяніемъ его философіи, оказались сравнительно болѣе солидными, нежели все, что уродилось въ сферѣ послѣ—кантовскихъ метафизическихъ несообразностей Шеллинга, Гегеля и Гербарта. Но весьма многое въ этомъ относительно лучшемъ направленіи слѣдуетъ приписать совсѣмъ не заслугамъ Канта и его моральныхъ тенденцій, но болѣе ясному и болѣе разумному духу XVIII-го столѣтія, подъ вліяніемъ коего находился Кантъ со своими, впрочемъ реакціонными, наклонностями и вопреки имъ. Что касается скоро кончающагося послѣдняго десятилѣтія 19-го стол., то можно сказать, подводя итоги, что поворотъ къ Канту, вотъ уже двадцать лѣтъ все болѣе и болѣе входящій въ моду и породившій въ литературѣ университетовъ настоящихъ рыцарей Канта, а въ профессорской философіи младшаго поколѣнія, такъ сказать, поклоненіе Канту, —этотъ поворотъ угрожаетъ строго-научному духу тамъ, гдѣ онъ вообще можетъ существовать, а именно въ непрямомъ соприкосновеніи съ математикою и естествознаніемъ. Подумать только, что будетъ, когда нелѣпости математической метафизики, слѣдовательно, Гауссовскія пространства болѣе чѣмъ съ тремя измѣреніями, сюда же относящаяся неэвклидовская гипергеометрія съ ея пересекающимися параллельными и съ ея треугольниками, въ которыхъ сумма угловъ не равна двумъ прямымъ, наконецъ, геометрическія построенія мнимыхъ, —что будетъ, когда всѣ эти нелѣпости сочетаются съ Кантовскою метафизикою пространства!

Причиною поворота къ такъ называемой Кантовской Критикѣ чистаго разума было вліяніе Шопенгауера на младшее поколѣніе профессоръ философіи въ нѣмецкихъ университетахъ, хотя иногда пытались скрыть это истинное основаніе и выставить какое-либо менѣе значительное подставное лицо. Шопенгауеръ, въ виду перевѣса въ немъ слабыхъ сторонъ, между тѣмъ, уже успѣлъ сдѣлаться въ нѣкоторой мѣрѣ философомъ университетовъ, хотя его лучшія и сильныя стороны должны были при этомъ отступить на второй планъ. Главная его заслуга—это родъ орьентирующаго путеводительства въ сумасшедшемъ домѣ нѣмецкой метафизики 19-го столѣтія. Будучи своимъ человекомъ въ этомъ помѣщеніи, хорошо знакомый съ моральными и интеллектуальными уродствами и гримами своихъ сосѣдей, Фихте, Шеллинговъ, Гегелей, Гербартовъ и т. п., при этомъ, превосходя ихъ естественными способностями, онъ могъ сдѣлаться весьма недурнымъ чичероне. Вмѣстѣ съ тѣмъ честный и остроумный, онъ могъ раздражаться дрянностью и потѣшаться надъ глупостью, но потѣшаться лишь до тѣхъ поръ, пока самъ онъ не сдѣлался въ этой клѣткѣ своеобразнымъ сычомъ или, лучше сказать, въ своемъ родѣ птицей. Такою метафизическою птицей сдѣлался онъ благодаря изученію такъ называемой критики разума Канта, которую правильнѣе нужно было бы назвать упраздненіемъ разума въ дѣлѣ пользованія имъ противъ всякихъ предметовъ вѣры. Въ юности, въ годы студенчества, его самого водили за носъ, ибо онъ слушался совѣтовъ своего профессора, а сверхъ того, его внѣміровыя метафизическія склонности нашли удобную себѣ пищу въ отрицаніи пространства и времени. Такимъ-то образомъ, особенно потому, что у него мало было смысла по части логически абстрактныхъ заключеній, и потому, что онъ не разглядѣлъ новой скептической двойной игры Кантовской манеры, возникло его поклоненіе книгѣ Кенигсбергскаго профессора, и когда послѣ-кантовскіе метафизики кончили свои дѣла, его сужденіе пріобрѣло въ своемъ родѣ историческое значеніе, но, конечно, въ схоластически-университетскомъ родѣ. Честно увлекшись Кантомъ, онъ дошелъ до того, что рекомендовалъ естествоиспытателямъ выкинуть изъ головы все и углубиться въ Кантовскія „Метафизическія начала естествознанія“. Къ сожалѣнію, я, съ своей вещественно-логической и вмѣстѣ естественно—научной точки зрѣнія, такого совѣта дать не могу; ибо кто хочетъ оставаться метафизикомъ, т.-е. алхимикомъ духа, тотъ, вслѣдствіе этого, будетъ неспособенъ воспринять точныя понятія изъ области свободного мышленія и истиннаго естествознанія, не исковеркавъ ихъ.

157. Мы снова вступаемъ въ область свѣжаго воздуха, освѣдом-

ляясь у специалистов механики 18-го столѣтія, нѣтъ ли здѣсь слѣдовъ философскихъ и логическихъ основныхъ воззрѣній. Д'Аламберъ (1717—1783) и Лагранжъ (1736—1813) являются въ этомъ отношеніи главными представителями, такъ какъ объ Эйлерѣ, въ виду слабости его чисто-логическихъ точекъ зрѣнія, здѣсь не можетъ быть рѣчи. Какъ показываютъ введеніе и первый отдѣлъ д'Аламберовской динамики ¹, этотъ рационально мыслящій и отрицающій цѣле-причины математикъ хочетъ основать всю механику на трехъ началахъ. Это—законъ инерціи, параллелограммъ силъ и, какъ третье предположеніе, теорема, что двѣ силы находятся въ равновѣсіи, когда онѣ равны и противоположны, т.-е. когда возможные скорости, которыми выражаются ихъ двигательныя стремленія, обратно пропорціональны массамъ. Но эти исходные пункты не принимаются непосредственно за аксіомы, но подлежатъ раціональному выводу. Приступая къ задачѣ, которую Берлинская Академія облекла въ форму вопроса, представляютъ ли принципы механики необходимыя, или же случайныя истины, д'Аламберъ начинаетъ съ того, что истолковываетъ неудачную постановку вопроса такъ, что она получаетъ смыслъ для философскаго изслѣдованія. А именно, еслибъ спрашивалось только о томъ, согласуются-ли механическія начала, необходимо вытекающія изъ предположенія матеріи и движенія, съ фактами опыта, то, какъ это такъ и есть,—на фактическія основоположенія слѣдовало бы смотрѣть какъ на истины необходимыя. Разсматривая же, наприм., непроницаемость матеріи, д'Аламберъ какъ бы приводитъ съ нею въ столкновеніе представленіе о движеніи тѣлъ навстрѣчу другъ другу. Между тѣмъ, уже напередъ можно видѣть, что подобныя дедукціи изъ понятій о матеріи, которая сама должны быть добыты опытомъ, не имѣютъ большаго значенія. Косность движенія онъ выводитъ не иначе, какъ въ предположеніи, что она уже мыслится для нѣкотораго протяженія и что нѣтъ основанія, почему бы уклоненіе пути и скорости должно бы было послѣдовать скорѣе въ одномъ смыслѣ, чѣмъ въ другомъ. Подобное же основаніе, котораго не имѣется, требуется и для того, чтобы при сложеніи двухъ силъ средняя сила могла уклоняться скорѣе по одну, чѣмъ по другую сторону плоскости силовыхъ направленій. Не говоря уже о несостоятельности подобныхъ основаній выводовъ, и само по себѣ уже плохо, что избирается не прямой позитивный путь. Но удивляться тому, что эти д'Аламберовы попытки выводовъ не удались, нече-

¹ *Traité de dynamique* (первое изд. 1743), позднѣйшее 1796, *Discours préliminaire* и три слѣдующія главы, соответствующія тремъ главнымъ принципамъ.

го; ибо для послѣднихъ простыхъ принциповъ механики возможны только расчленяющія доказательства изъ опыта, а не выводы изъ понятій разума или изъ эмпирическихъ понятій. Простыя понятія разума, опредѣляемая для пространства и времени, хороши для чистой математики со включеніемъ форономіи, но не для матеріальной механики природы. Но эмпирическія понятія, дѣйствительно простыя, въ силу именно этой абсолютной простоты, не могутъ быть выведены изъ еще простѣйшихъ опытныхъ гипотезъ. Единственно чего можно достигнуть чистымъ мышленіемъ, было бы доказательство, что, несмотря на всѣ вымыслы и на весь произволъ, къ какимъ способенъ умъ независимо отъ опыта, тѣмъ не менѣе, въ его послѣдовательныхъ предположеніяхъ найдется нѣчто такое, благодаря чему въ первоначальныхъ исходныхъ пунктахъ основные законы мышленія не противорѣчатъ основнымъ законамъ природы.

Но д'Аламберъ, несмотря на то, что питалъ положительную непріязнь къ метафизикѣ, тѣмъ не менѣе, еще слишкомъ былъ не свободенъ отъ ея логическихъ миражей. Если названный его именемъ принципъ позднѣе онъ и считалъ плодомъ своего философскаго размышленія, то этимъ еще не много было сказано; ибо Яковъ Бернулли уже исполнилъ нефилософскую главную работу. Примыкающая же къ ней философская работа д'Аламбера состояла просто въ томъ, что онъ абстрактно формулировалъ и кореннымъ образомъ выдѣлилъ не только существующую, но уже и практически засвидѣтельствованную мысль, причемъ сюда присоединялась и второстепенная механическая работа приложенія къ дальнѣйшимъ примѣрамъ. Въ самомъ дѣлѣ, этотъ философствующій механикъ¹ только сравнилъ свободное дѣйствіе динамической силы съ ея редукией статическими помѣхами, причемъ отдѣлилъ вычетъ, т.-е. потерянную силу, какъ нѣчто своеобразное, и сообразно этому далъ принципу Якова Бернулли иное выраженіе, а именно, что въ системѣ потерянные силы должны сами собою находиться въ равновѣсіи. Ради этого онъ и формулировалъ свою упомянутую выше третью аксіому, назвавъ ее аксіомою равновѣсія. Но болѣе цѣлостное пониманіе повело бы къ усмотрѣнію возникновенія парціальнаго равновѣсія при всякой комбинаціи свободныхъ силъ, слѣдовательно, уже въ параллелограммѣ силъ; ибо, сообразно нашей не разъ упомянутой концепціи, перпендикулярныя къ средней силѣ силовыя части слѣдуетъ разсматривать какъ части, статически уравновѣшивающіяся.

¹ Traité de dynamique, изд. 1796, первый отд. гл. 3, Art. 35.

158. Всего чише въ философскомъ отношеніи выглядеть направление Лагранжа, и не только потому, что оно всего позитивнѣе, но также и въ виду такта, съ какимъ этотъ великій математикъ избираетъ натуральнѣйшіе способы представленія. Впрочемъ, первое принципиальное логическое сочетаніе остается для него областью, которой онъ только слегка касается; но такое воздержаніе въ направленіи, куда сила его не простиралась, предохранило его начертаніе отъ болѣе рѣзкихъ промаховъ. А его чистый и благородный характеръ въ соединеніи съ его гениальною непосредственностью служилъ болѣе глубокимъ основаніемъ тому, что онъ сторонился лжи и двусмысленности метафизики.

Внѣшнимъ признакомъ упомянутой осмотрительности служить тотъ фактъ, что Лагранжъ смотритъ на историческіе четыре принципа статики, а именно на теоремы о рычагѣ, о наклонной плоскости, о параллелограммѣ силъ и о виртуальныхъ скоростяхъ какъ на существенно эмпирическіе исходные пункты, изъ коихъ каждый, съ исключеніемъ остальныхъ, могъ бы образовать основу для дальнѣйшаго развитія статики. Благодаря этому, его не коснулся д'Аламберовскій дуализмъ. Въ собственной системѣ онъ избираетъ принципъ виртуальныхъ скоростей какъ простѣйшій и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе всеобъемлющій и для вычисленій удобнѣйшій. Въ Теоріи функций, какъ мы видѣли (§ 134), онъ идетъ другимъ путемъ, ибо тамъ онъ съ самаго начала сливаетъ во-едино динамику и статику. Слѣдуетъ упомянуть, что при этомъ онъ прямо выставляетъ представленіе, что приводящее дѣйствіе второй силы даетъ тотъ же результатъ, какъ будто бы первое движеніе происходило нѣкоторое время одно, и лишь послѣ этого начинало дѣйствовать и второе движеніе. Такой способъ пониманія высказанъ такъ ясно ¹, что философское значеніе его не можетъ подлежать сомнѣнію. Сообразно этому, вертикально поднимающееся тѣло должно разсматривать такъ, какъ будто бы оно вслѣдствіе начальной скорости сперва поднималось равномерно на высоту вдвое большую дѣйствительной, а затѣмъ въ такое же время, т.-е. на однократную высоту, падало. Такой приѣмъ представляетъ, можетъ быть, единственный примѣръ, въ которомъ Лагранжъ прямо выставляетъ философски не безразличный способъ представленія, какъ собственный свой способъ воззрѣнія на внутренній силовой синтезъ, тогда какъ вездѣ исключаетъ рѣшительно все, что могло бы показаться съ метафизической точки зрѣнія сомнительнымъ. Вообще, чисто каузальное развитіе есть для него основной законъ и, слѣдуя этой

¹ Théorie des fonctions (1813), 3 отд. Заключительныя слова Art. 3.

руководящей точкѣ зрѣнія, общей у него съ д'Аламберомъ, онъ даже отвергъ, какъ мы видѣли (§ 124), финальную форму принципа наименьшаго дѣйствія.

Такимъ образомъ, въ рубрикѣ философскихъ вліяній Лагранжъ потребовалъ лишь краткаго упоминанія, тогда какъ въ специально-вещественномъ отношеніи мы должны были посвятить ему обширный очеркъ, и это подконецъ можетъ служить указаніемъ, что количество метафизическаго дѣйствія стоитъ въ обратномъ отношеніи къ степени научной основательности. Лучшее философское вліяніе всюду держится въ сторонѣ отъ метафизики, какъ между прочимъ показываетъ это и отношеніе Юма. Истинный смыслъ философскаго духа въ научныхъ работахъ засвидѣтельствовалъ себя у ревнителей механики универсальною широтою и гармоническимъ единствомъ воззрѣній, а никакъ не примѣсю питающейся вымыслами метафизики. И дальнѣйшая исторія научааетъ, что безумно ожидать отъ метафизиковъ въ позитивныхъ наукахъ чего-нибудь инаго, кромѣ искаженія и затемнѣнія предмета. Истинные же философы только тогда могутъ кое-что дать позитивной спеціальной наукѣ, когда сами они станутъ позитивными спеціалистами-ревнителями ея и откажутся отъ метафизической заносчивости, будто-бы при посредствѣ философіи можно было добыть что-либо особенное, чего бы нельзя было добиться уже самимъ позитивнымъ методомъ.

ЧЕТВЕРТЫЙ ОТДѢЛЪ.

Девятнадцатое столѣтіе.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Расширеніе основныхъ понятій механики въ работахъ Пуансо.

159. Въ научныхъ работахъ 19-го столѣтія, оказавшихся вліятельными въ дѣлѣ постиженія принциповъ, особенно выдаются два факта. Первый, это—введеніе геометромъ Пуансо ¹ новаго понятія силовыхъ паръ, съ примыкающими сюда—новою концепціей и обогащеніемъ теоріи вращенія. Другой фактъ относится къ исходнымъ пунктамъ, слѣдствіямъ и способамъ представленія, появляющимся вслѣдствіе открытія механическаго эквивалента теплоты. Исходные пункты того и другаго изъ этихъ событій, расширившихъ границы механическаго мышленія, раздѣлены промежуткомъ почти въ 40 лѣтъ. На зарѣ нашего столѣтія были даны Пуансо лучшія основы статики, а въ началѣ сороковыхъ годовъ было впервые обнародовано открытіе механическаго эквивалента теплоты. Измѣненія механическихъ воззрѣній, а именно понятія о силѣ и ея сохраненіи, примыкающія къ открытію Ю. Р. Майера, начали распространяться собственно съ 1850 года. Что касается работъ Пуансо, то уже гораздо труднѣе указать, съ какого времени онѣ были усвоены общою механикою, и какъ неизбѣжныя основы приняты авторами ². Что же касается полной оцѣнки этихъ работъ со всѣми ихъ послѣдствіями, то таковая могла быть дана только по установленіи Пуансо новой теоріи вращенія, слѣдовательно послѣ 1834 года. Но подробнѣйшее

¹ Род. 1777, ум. 1859.

² Auguste Comte, въ своемъ Cours de philosophie positive (6 томовъ, Paris 1830—42) вполне оцѣнилъ Пуансотовскія улучшенія и предсказалъ важныя послѣдствія ихъ для динамики и спеціально для теоріи вращенія (т. I, 16 лекція, стр. 612 и 613). Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ прибавляетъ, что большинство математиковъ еще не оцѣнили этого предмета подобающимъ образомъ.

изъ всѣхъ появившихся послѣ Лагранжа общихъ начертаній механики, именно 2-е изданіе *Traité de mécanique* Пуассона (1833) появилось годомъ ранѣе, чѣмъ теорія вращенія Пуансо, и хотя произведеніе Пуассона въ отдѣлѣ статики и не умалчиваетъ о понятіи силовой пары, тѣмъ не менѣе, оно еще очень далеко отъ того, чтобы сплошь соображаться съ новыми воззрѣніями на статическіе принципы. Да односторонне-аналитическій методъ и не могъ задаться идѣю сдѣлать основой изложенія особый синтетическій методъ воззрѣній и развитія, какой былъ введенъ въ механику Пуансо. Пуансо взялъ въ помощь совсѣмъ не то, что называютъ новою синтетическою геометріей, но создалъ себѣ свой особый простой способъ сочетанія идей, который вполне исключительно принадлежалъ только механикѣ и ея принципамъ и можетъ считаться первымъ введеніемъ въ будущую синтетическую механику. Можетъ-быть, эта противоположность метода была причиною того, что выводъ всѣхъ слѣдствій изъ Пуансотовскихъ идей замедлился. Только въ послѣдующія десятилѣтія, приблизительно съ 1840 г., если вообще можно указать такому факту границы, Пуансотовскія основоположенія и его образъ мыслей вполне были приняты ¹. Впрочемъ, достойно замѣчанія, что еще въ 1851 г. могло появиться пространное, буквальное воспроизведеніе первоначальной формы Пуансотовской теоріи вращенія во французскомъ главномъ математическомъ журналѣ ².

160. Прежде всего припомнимъ себѣ нѣкоторыя основныя черты того состоянія, которое предшествовало новымъ стремленіямъ и все еще продолжаетъ указывать рамки, въ которыхъ движутся научныя завоеванія 19-го столѣтія. Эти рамки, если отвлечься отъ вещественнаго расширенія ихъ механикою теплоты, т.-е. если обращать вниманіе только на механическую сторону, рассматривая ее самоё по себѣ, а не новыя ея приложенія, рамки эти все еще представляютъ Лагранжевое систематическое резюмирование и построеніе аналитической механики. Ни одно изъ послѣдующихъ систематическихъ начертаній не можетъ даже и сравниться съ этимъ фундаментальнымъ произведеніемъ. Ни абрисъ механики, помѣщенный Лапласомъ во главѣ его *Mécanique céleste* ³, къ которому у него

¹ Результаты были уже введены въ учебники, наприм. Navier, *Résumé des leçons de mécanique* etc. Paris 1841, тогда какъ вліяніе методовъ подвигалось значительно медленнѣе. Объ отношеніи Мёбіуса къ воззрѣніямъ Пуансо ср. Учебникъ статики первого, 1837, и журналъ Крелля, т. 18 (1838), стр. 189.

² Liouville, *Journal des Mathématiques*, т. XVI, стр. 9—129 и 289—336.

³ Т. I (впервые 1799), въ новѣйшемъ изд. также т. I (1843).

примыкаетъ въ цѣломъ рядъ томовъ¹ специальное изложеніе и отчетъ обо всемъ, что дано его предшественниками по планетной механикѣ, ни механика Пуассона, этотъ по ясности изложенія, во всякомъ случаѣ, выдающийся трудъ, ни въ одномъ существенномъ отношеніи не могутъ быть даже приблизительно сравниваемы съ начертаніемъ этого величественнаго образцоваго произведенія. Но и съ другой точки зрѣнія Аналитическая Механика Лагранжа осталась фундаментальнымъ твореніемъ, на основѣ котораго воздвигнуты были существенныя чисто-аналитическія обогащенія позднѣйшаго механическаго знанія. Не наше дѣло заниматься указаніемъ на приведеніе къ интегрируемой формѣ или на новыя формы уравненій динамики, какихъ успѣли добиться математики въ нашемъ столѣтіи, какъ напр. Гамильтонъ и его подражатель Якоби, поскольку такія измѣненія формы не дали намъ новыхъ фундаментальныхъ теоремъ или характеристическихъ отношеній, имѣющихъ общее принципиальное значеніе. Но теперь же мы должны замѣтить, что строгое понятіе исключительно аналитической механики создано Лагранжемъ и потому понятіе это должно разсматривать какъ руководящую точку зрѣнія того историческаго развитія, которое, придерживаясь этого чистаго и абстрактнаго понятія, имѣетъ въ виду только разработку различныхъ формъ уравненій механики. Эта особая метода испытала въ 19 столѣтіи нѣкоторое измѣненіе; но эти неважныя успѣхи должно разсматривать какъ вѣтви дерева, стволъ и главную форму котораго представляетъ Лагранжъ.

Въ противоположность исключительно аналитическому методу, наглядные и нагляднымъ путемъ добытые результаты Пуансо давали ему право свысока смотрѣть на то, что онъ называлъ «утомительными околичностями»² вычисленія. Лучшимъ изъ всего³ въ Аналитической Механикѣ Лагранжа казались ему четыре историческіе эскиза, тогда какъ аналитическій способъ вывода у этого великаго систематика онъ не могъ не считать чѣмъ-то такимъ, что не въ себѣ самомъ имѣло основаніе, и безъ особаго генія автора,

¹ 3 и 4 томы *Mécanique céleste* появились 1804—5; 5 только въ 1825 г. Въ Собраніи сочиненій 1843 г. томъ 1 — 5 *Méc. cél. Système du monde*, впервые 1796, послѣднее изд. 1824, въ Собраніи т. IV, есть изложеніе безъ вычисленій и также содержитъ принципы механики.

² *Mém. sur la composition des moments et des aires* (читано въ 1804), II въ началѣ. (Этотъ *Mémoire* отпечатанъ какъ прибавленіе ко многимъ изданіямъ *Eléments de Statique* Пуансо).

³ *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Paris 1834, стр. 33. Въ изд. 1851 г. Второе отд., Art. 23.

руководимаго правильной интуиціей, не получило бы такой соразмѣрной формы. Впрочемъ, и самъ онъ умѣренно пользовался вычисленіемъ, какъ средствомъ изложенія, когда прочно установилъ свои главные точки зрѣнія. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя смѣшивать аналитическую механику съ раціональною; первая — просто методъ, послѣдняя — довлѣющая себѣ наука. Раціональность состоитъ не въ иномъ чемъ, какъ въ сведеніи къ послѣднимъ принципамъ сужденія, т.-е. въ сущности въ дедуктивномъ сочетаніи простыхъ истинъ. Аналитическій же методъ можетъ образовать только одну стадію такого сужденія, ибо онъ начинается тамъ, гдѣ уравненіе обрабатывается, слѣдуя чисто алгебраическимъ основоположеніямъ, и достигаетъ своего предѣла тамъ, гдѣ обрывается исключительное руководство чисто алгебраическими заключеніями. Поэтому, природа его — второстепенная, ибо въ концѣ концовъ онъ всегда можетъ двигаться дальше только посредствомъ разсмотрѣній, которыя непосредственно извлекаются изъ самыхъ вещей, а не просто изъ алгориѳма операций. Поэтому, Пуансо былъ правъ, указывая вычисленію служебную роль и, слѣдовательно, отводя ему второе мѣсто. Но онъ былъ неправъ, поскольку не могъ оцѣнить автономіи разъ налаженного исчисленія, и еще болѣе неправъ, ибо не понималъ даже геометрическаго распорядка въ Лангражевской Аналитической Механикѣ, о чемъ ближайшія указанія мы дадимъ въ § 210. Тѣмъ не менѣе, ошибка этой личности не можетъ пошатнуть правомочной стороны въ общемъ дѣлѣ и даже иныхъ личныхъ заслугъ. Правда, геометрическую и непосредственно механическую разработку задачъ нашей науки можно разсматривать какъ нѣкотораго рода реакцію противъ аналитической абстракціи и, слѣдовательно, противъ высшей ступени мышленія, и тѣмъ не менѣе, если только эту методу надлежало ограничить, она можетъ оставаться благодѣтельнымъ коррективомъ противъ всякихъ одностороннихъ поведеній чистаго исчисленія.

161. Принципіально новое и для порядка элементовъ механики въ высшей степени важное, даже для полноты фундаментальныхъ доказательствъ необходимое понятіе, найденное Пуансо, есть понятіе силовой пары. Эта идея, внесшая столько свѣта и ясности въ уразумѣніе всѣхъ эффектовъ вращенія или вращательныхъ стремленій, была впервые выяснена Пуансо въ его *Eléments de Statique*¹; а ближайшее ея значеніе всего легче видѣть изъ уже цитованнаго мемуара о теоріи моментовъ. Но плодотворность этого понятія

¹ Впервые 1804; 9-е изд. въ 1848, съ прибавленіемъ важнѣйшаго мемуара, 11-е изд. Paris 1872.

обнаружилась особенно блестящимъ образомъ только съ появленіемъ въ мемуарѣ 1834 г. новой теоріи вращенія ¹.

Двѣ равныя, параллельныя, но противоположныя силы, точки приложенія которыхъ можно представить себѣ гдѣ-нибудь на прям ой нельзя уравновѣсить никакою третьею силою. Тогда какъ вообще три силы, дѣйствующія на прямую въ одной и той же плоскости, по закону рычага всегда могутъ быть взяты такъ, чтобы съ двумя данными третья образовала систему равновѣсія и, слѣдовательно, была бы противоположна равновѣствующей двухъ другихъ,—этой возможности не существуетъ въ одномъ частномъ случаѣ. Въ этомъ случаѣ двѣ данныя силы совѣмъ не имѣютъ равновѣствующей, и потому нельзя представить ихъ уравновѣшенными одною силою, которая была бы равна и противоположна этой равновѣствующей. Для простоты вообразимъ, что силы приложены подъ прямымъ угломъ, въ особенности потому, что не можетъ быть рѣчи о тѣхъ составныхъ частяхъ силъ, которыя, будучи проеціями на линію приложенія, дѣйствуютъ вдоль нея и потому взаимно уничтожаются.

Называя вмѣстѣ съ Пуансо двѣ равныя, параллельныя, но противоположныя силы, дѣйствующія на одну и ту же систему, слѣдовательно, приведенныя въ нѣкоторое соотношеніе связью,—называя ихъ парю силъ, получимъ нагляднѣйшую картину ихъ дѣйствія, вообразивъ, что обѣ силы приложены къ какой-либо изъ многихъ равныхъ, пересѣкающихся ихъ подъ прямымъ угломъ, линій. Если исходить отъ идеальнаго рычага или твердой линіи, то мы представимъ себѣ то же самое, вообразивъ, что въ двухъ точкахъ ея приложены въ противоположныхъ направленіяхъ въ одной и той же плоскости двѣ силы, къ этой линіи перпендикулярныя. Пуансо не фиксируетъ такимъ образомъ это представленіе, но даетъ мѣсто разнымъ наклоненіямъ параллельныхъ силъ, но это только мѣшаетъ видѣть рѣшающее обстоятельство; ибо вопросъ всегда объ эффектѣ вращенія относительно линіи или вообще относительно плоскости силъ.

Пуансо желаетъ, чтобы подъ понятіемъ его силовой пары мыслили ничто иное, какъ совокупность (ensemble) обѣихъ силъ, и вообще и принципиально отнюдь ничего не рѣшаетъ о способѣ, какъ представлять себѣ эту совокупность какъ механическое отношеніе въ формѣ связи, опредѣляющей взаимное дѣйствіе. Впрочемъ, на дѣлѣ онъ вводитъ разстояніе между обоими силовыми направленіями, какъ важную въ механическомъ смыслѣ величину; но здѣсь онъ поступаетъ въ томъ же родѣ, въ какомъ и прежняя

¹ И отдѣльно какъ *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Paris 1834.

механика понимала и выражала моменты какъ силы, дѣйствующія какъ бы на плечи рычага. Произведеніе силы, редуцированной на плоскость, на разстояніе отъ какой-либо оси, перпендикулярной къ этой плоскости, образуетъ моментъ силы относительно этой оси. Это—понятіе, свойственное древней механикѣ, и Пуансо также исходитъ отъ существеннаго тождества силовыхъ паръ и моментовъ. Его силовая пара измѣряется произведеніемъ одной изъ обѣихъ равныхъ силъ на ихъ взаимное разстояніе, и точно такъ, какъ анализъ вводилъ въ вычисленіе моменты, такъ же точно и Пуансо оперировалъ съ силовыми парами и соотвѣтствующимъ количественнымъ представленіемъ ихъ эффекта.

Смыслъ дѣйствія въ случаѣ силовой пары слѣдуетъ иначе понимать, чѣмъ въ случаѣ одной силы, хотя нельзя не признать здѣсь аналогіи. Если измѣнить смыслъ дѣйствія обѣихъ силъ, то измѣнится и смыслъ дѣйствія пары, т.-е. вращательное стремленіе, представляющее собою ея эффектъ, будетъ противоположно. То, что въ случаѣ единичной силы представляетъ ея направленіе, т.-е. прямая, въ которой или по которой она дѣйствуетъ, то самое, вполне аналогично, представляетъ, въ случаѣ силовой пары, плоскость, въ которой или по направленію которой эта пара дѣйствуетъ. Какъ точку приложенія отдѣльной силы можно перенести по ея направленію въ другую, неизмѣняемо соединенную съ нею, точку, не измѣняя этимъ дѣйствія, такъ точно можно и бинарную силу, названную Пуансо силовой парой, привести въ ея плоскости въ другое, совершенно произвольное, положеніе. Слѣдовательно, въ предположеніи двухъ опредѣленныхъ точекъ приложенія, можно силовую пару не только вращать какъ угодно около середины разстоянія силъ, но можно переносно перемѣщать и въ самой плоскости и по всѣмъ параллельнымъ плоскостямъ. Направленіе ея плоскости въ пространствѣ, а не какое либо частное положеніе этой плоскости, образуетъ то, что должно представлять себѣ подъ направленіемъ силовой пары, какъ аналогонъ направленія отдѣльной силы.

162. По воззрѣнію Пуансо, обыкновенное вычисленіе, посредствомъ котораго находятъ равнодѣйствующую двухъ параллельныхъ силъ, даетъ въ частномъ случаѣ, когда берутъ двѣ равныя и противоположныя силы, результатъ, не имѣющій никакого смысла, а именно силу равную нулю, приложенную въ безконечномъ разстояніи. Впрочемъ, при безконечномалой разницѣ между обѣими силами, если придавать безконечномалому точный смыслъ, т.-е. неограниченно-малого, вычисленіе это даетъ неограниченно-малую силу, приложенную въ неограниченно большемъ разстояніи съ той или съ другой стороны, смотря по тому, той или другой силѣ принад-

лежитъ этотъ неограниченно-малый избытокъ. Напротивъ, когда эта разница не безконечно мала, но равна нулю, то вычисленіе показываетъ, что ни съ той, ни съ другой стороны невозможно приложить переносной равнодѣйствующей, и что, слѣдовательно, невозможно возстановить равновѣсія приложеніемъ одной силы; ибо такъ называемое *безконечно-большое*, которое должно противуполагаться нулю, какъ и самый нуль, есть отрицаніе всякой реальности и вообще величины, и не должно быть смѣшиваемо съ точнымъ понятіемъ неограниченно большаго.

Сложеніе параллельныхъ силъ основывается или на параллелограммѣ силъ, или же должно непосредственно примыкать къ принципу рычага. Въ первомъ случаѣ нужно сдѣлать скачокъ отъ безконечно-малаго угла къ строгой параллельности и отъ существованія точки пересѣченія силовыхъ направленій къ несуществованію такой точки. Второй же случай, хотя и не связанъ съ такимъ непрямымъ способомъ опредѣленія и съ его логическимъ окольнымъ путемъ; но являетъ другаго рода несовершенство, такъ какъ сначала должно предположить неподвижную точку, чтобы затѣмъ сдѣлать переходъ къ свободной неизмѣняемой линіи и къ тремъ дѣйствующимъ на нее силамъ. Непосредственно имѣется для трехъ силъ только законъ равновѣсія; но можно равную, но противуположную каждой силу разсматривать какъ равнодѣйствующую двухъ другихъ. Но это понятіе равнодѣйствующей, полученное изъ принципа рычага, есть не прямое понятіе, ибо оно выводится изъ статическаго отношенія. Правда, сила, которую можно вообразить себѣ приложенною въ точкѣ опоры въ обыкновенной схемѣ рычага, замѣняетъ дѣйствіе неподвижной точки опоры и уничтожаетъ двигательное стремленіе, производимое въ этой точкѣ силами, дѣйствующими въ конечныхъ точкахъ. Потому это двигательное стремленіе можно разсматривать какъ переносную равнодѣйствующую, которую даютъ обѣ другія силы своимъ дѣйствіемъ на эту твердую линію. Но кромѣ того взаимно уничтожаются и вращательныя стремленія обѣихъ силъ, когда рычагъ находится въ равновѣсіи. Слѣдовательно, въ такомъ арранжементѣ нужно имѣть въ виду двѣ вещи, а именно: во-первыхъ, переносную равнодѣйствующую обѣихъ силъ, а затѣмъ то обстоятельство, что указывается просто перемѣщеніе твердой линіи по равнодѣйствующей, т.е. перпендикулярно къ ней, тогда какъ вращеніе около точки пересѣченія съ равнодѣйствующей не имѣетъ мѣста. Оба эти вращательныя стремленія взаимно уничтожаются; но самостоятельность этого обстоятельства не видна изъ самого принципа рычага. Представляютъ только переносную равнодѣйствующую обѣихъ силъ, но упускаютъ изъ

виду, что обѣ эти силы, помимо того, что онѣ даютъ двигательную равнодѣйствующую, кромѣ того, должны еще въ нѣкоторомъ родѣ находиться въ равновѣсіи, т. е. находиться въ чисто-статическомъ отношеніи. Если предположить неподвижную точку опоры, то ясно видно, что кромѣ давленія, ею испытываемаго и представляющаго сумму обѣихъ силъ, существуетъ рядомъ съ нимъ и другое, легко различимое дѣйствіе—взаимное уничтоженіе обоихъ вращательныхъ стремленій. Если же сдѣлаемъ эту систему свободною, замѣнивъ точку опоры силою, противоположною этому давленію, то это нисколько не измѣнитъ сказаннаго вращательнаго отношенія. Если сдѣлать еще шагъ дальше и устранить подставленную силу, то появится ей равная и противоположная двигательная равнодѣйствующая, и хотя теперь перваго основанія къ механическому вращательному стремленію не будетъ, все же это простое отсутствіе вращенія можно понимать какъ равновѣсіе по отношенію къ идеальнымъ вращательнымъ стремленіямъ. Но при всѣхъ обстоятельствахъ случай, когда параллельныя и равныя силы дѣйствуютъ не въ одну сторону, какъ мы только-что предполагали, но въ противныя, случай этотъ по отношенію къ схемѣ рычага слѣдуетъ представлять такъ, что давленіе или двигательная равнодѣйствующая въ точкѣ опоры равна нулю, ибо обѣ силы, въ нее перенесенныя, въ случаѣ ихъ равновѣсія даютъ алгебраическую сумму нуль или сами по себѣ находятся въ равновѣсіи. Такъ какъ независимаго давленія или тяги въ неподвижной точкѣ нѣтъ, то можно устранить силы въ этой точкѣ и не только систему сдѣлать свободною, но и совершенно независимою отъ воображаемыхъ въ неподвижной точкѣ подстановокъ. Тогда не можетъ быть никакой переносной равнодѣйствующей, и единственно что еще подлежитъ разсмотрѣнію, это—вращательное дѣйствіе.

Что касается строгости доказательства, то, повидимому, общей проблемѣ сложенія параллельныхъ силъ суждено представлять такія же трудности, какія въ чистой геометріи представляетъ теорія параллельныхъ линій. Благодаря Пуансо, дѣло это впервые стало ясно видно. Недостаточность параллелограмма силъ всего яснѣе усматривается прямо изъ того, что хотя съ помощью его и посредствомъ перехода чрезъ безконечность и можно дать общее доказательство двигательной равнодѣйствующей для какихъ угодно силъ, но нельзя найти равнодѣйствующихъ вращенія. Это зависитъ отъ того, что нахожденіе ихъ существенно основывается на предположеніи, чтобы отдѣльная точка образовала предметъ приложенія взаимодействующихъ силъ. Но въ случаѣ точки, какъ таковой, вращеніе не имѣетъ ни основанія, ни смысла. Но какъ скоро перейдемъ къ линіи или вообще

въ двумъ, механически между собою связаннымъ точкамъ, то имѣемъ систему, для которой взаимодѣйствіе силъ даетъ кромѣ поступательнаго и вращательное движеніе, которое только въ частныхъ случаяхъ можно разсматривать какъ нуль, т.-е. какъ уничтожающееся движеніе. Такимъ образомъ, въ собственномъ смыслѣ вращательное дѣйствіе, въ сущности, обусловливается не параллельностью и не равенствомъ силъ, но линіей, какъ объектомъ приложения силъ. Итакъ, двѣ силы ведутъ къ вращательнымъ дѣйствіямъ не потому, что онѣ противоположны, параллельны и равны, а потому, что онѣ дѣйствуютъ не на одну, но на двѣ точки при посредствѣ линіи и эти-то точки и ставятъ ихъ въ извѣстное отношеніе другъ къ другу. Итакъ, какъ скоро дана линія, аффицируемая въ двухъ точкахъ произвольными силами какого угодно направленія и величины, то можно спросить, какое дѣйствіе производятъ проэкціи силы на эту линію, и какое дѣйствіе—слагающія, къ ней перпендикулярныя. Если эти перпендикулярныя силовые элементы лежатъ непосредственно въ одной плоскости, то, если они не равны, ихъ можно превратить въ пару равныхъ и въ нѣкоторый избытокъ. Во всякомъ случаѣ, какимъ бы ни было путемъ, мы должны придти къ эффектамъ вращенія, если только проблему сложения силъ, дѣйствующихъ на прямую, какъ и проблему сложения силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, трактовать во всей ея общности и разрѣшить во всѣхъ отношеніяхъ. Отсюда вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что притязаніе Пуансо, что онъ далъ существенное дополненіе параллелограмма силъ своимъ понятіемъ силовой пары и параллелограммомъ силовыхъ паръ, притязаніе это вполне законно. Но, естественно, остается еще кое-чего желать какъ въ способѣ вывода и въ единствѣ концепціи, такъ и въ отношеніи этого новаго понятія къ анализу.

163. Давъ въ своемъ мемуарѣ 1804 г. наглядное обозрѣніе основныхъ представленій и главныхъ приложений теоріи силовыхъ паръ, Пуансо приводитъ доказательства для перенесенія точки приложения, равно и для мѣры и для правила сложения силовыхъ паръ, главнымъ образомъ, во второмъ отдѣлѣ первой главы своихъ Элементовъ статики, откуда намъ придется выбрать лишь немногіе параграфы ¹. Синтетическій, постоянно опирающійся на силовыя подстановки и геометрической аранжementъ, а по формѣ нерасторжимый ходъ Пуансотовской элементарной статики едва позволяетъ выборку при такомъ связномъ изложеніи. Тѣмъ не менѣе, рѣшающія обстоятельства должны быть отмѣчены, по крайней мѣрѣ, вообще. Кромѣ изобрѣтенія понятія силовой пары, въ изъясненіи

¹ Чапр. Art. 25 и сл., 50, 102 и сл., 3-го изд. *Eléments de statique*, 1821.

первыхъ принципіальныхъ элементовъ, именно сложенія силъ вообще, не дано новаго доказательства, которое отличалось бы основательностью. Наперекоръ внѣшней видимости и несмотря на то обстоятельство, что закону параллелограмма, какъ онъ является въ полномъ своемъ объемѣ, предпослало сложеніе направленныхъ въ одну сторону параллельныхъ силъ, всѣ эти частныя попытки не дали возможности построить систему, которая по строгости напоминала бы эвклидовскую. Спеціальная логическая критика завела бы здѣсь слишкомъ далеко; но по отношенію къ главной цѣли нашего сообщенія, именно представленія о дѣйствіи силовой пары, не должно забывать, что объ этомъ не дается никакой рѣшительной идеи, подобной наприм. идеѣ, соотвѣтствующей параллелограмму движеній и, какъ извѣстно, показывающей, какимъ образомъ точка можетъ имѣть совмѣстно два движенія. Идею вращенія Пуансо прямо разсматриваетъ какъ „чисто побочную“ вещь, допуская ее лишь въ качествѣ образа ¹. Въ самомъ дѣлѣ, самъ онъ пользуется ею лишь при случаѣ, дѣлая для разъясненія частное предположеніе, что центръ рычажнаго плеча неподвиженъ. Но это предположеніе существенно измѣняетъ чистый эффектъ, поэтому въ системѣ Пуансо нѣтъ непосредственно нагляднаго, даже вообще вполне яснаго представленія о двигательномъ дѣйствіи силовой пары на объектъ ея приложенія. Движеніе пары точекъ, происходящее отъ приложенія обѣихъ силъ, нельзя разсматривать какъ таковое. На этомъ основаніи и эффектъ на плоскость или на твердое тѣло принципиально не сдѣланъ въ такой мѣры очевиднымъ, какъ этого должно требовать отъ элементарныхъ фундаментальныхъ представленій. Этотъ недостатокъ объяснится, если только принять въ соображеніе, что уже старое понятіе статическаго момента съ самаго начала, и прежде чѣмъ появился сколько-нибудь усовершенствованный анализъ, было, въ своемъ изолированномъ положеніи, въ сущности, аналитическимъ понятіемъ, и что Пуансо только сдѣлалъ попытку это аналитическое понятіе момента вращенія истолковать наглядно.

Общая метода Пуансо для доказательства возможности перенесенія силовой пары, равно и для опредѣленія мѣры и сложенія силовыхъ паръ, основывается, съ одной стороны, на подстановкахъ паръ, коихъ хотя и неизвѣстное дѣйствіе, при одинаковыхъ, впрочемъ, обстоятельствахъ, все-таки должно оставаться себѣ равнымъ, а въ случаѣ противоположенія ему равнаго, уничтожаться, — съ другой же стороны, основывается на уловкѣ, состоящей въ томъ, что пары съ равными плечами и съ одинаковымъ направленіемъ плоско-

¹ Ibid. Конецъ Art. 47.

стей, совмѣщаютъ точками приложеній, или же пары равныхъ силъ, одинаковаго направленія плоскостей, но съ неравными плечами координируютъ такъ, чтобы плечи образовали одно плечо и чтобы одна точка приложенія была каждой парѣ общео. Въ такомъ случаѣ силы, приложенныя въ одной и той же точкѣ, въ предположеніи одинаковаго смысла паръ, взаимно уничтожаются, и остается одна пара, плечо которой равно суммѣ плечъ. Отсюда слѣдуетъ, что совмѣстное дѣйствіе нѣсколькихъ силовыхъ паръ, если эти пары совершенно тождественны, при всѣхъ обстоятельствахъ даетъ увеличеніе въ нѣсколько разъ длины плеча, каково бы ни было это дѣйствіе. Слѣдовательно, можно силовую пару, принятую за единицу, превратить въ кратную двоякимъ образомъ, именно, увеличивая силу, или плечо, или обѣ величины. Вмѣстѣ съ этимъ, найдена и мѣра и, что замѣчательно, безъ посредства особаго и самого-по-себѣ достаточнаго тотальнаго представленія о дѣйствіи силовой пары. Въ самомъ дѣлѣ, въ основѣ лежала ясная идея только относительно отдѣльныхъ силъ, взаимно уничтожавшихся или слагавшихся. Тѣмъ не менѣе, въ сущности, Пуансо, слѣдуя сжато изложенной нами схемѣ, выработалъ свои болѣе спеціальныя точки зрѣнія доказательства для простѣйшаго рода сложенія, а вмѣстѣ съ тѣмъ и правило измѣренія, въ силу котораго величина пары слагается изъ двухъ факторовъ—перпендикулярнаго разстоянія и силы. Это произведеніе онъ назвалъ моментомъ силовой пары, чѣмъ еще болѣе приводится на память въ сущности идентичное обыкновенное понятіе момента, т.-е. произведеніе силы на нѣкоторое разстояніе.

Сложеніе силовыхъ паръ, которыхъ плоскости образуютъ уголь, доказывается приведеніемъ паръ къ равнымъ плечамъ, вслѣдствіе чего отношеніе ихъ величинъ выражается только силами, а затѣмъ пары переносятся на линію пересѣченія плоскостей, такъ чтобы равныя плечи совпадали. Такимъ образомъ, сложеніемъ отдѣльныхъ силъ, приложенныхъ къ каждой изъ общихъ точекъ приложенія, при каждой точкѣ возникаетъ новая замѣняющая сила, а слѣдовательно эти силы, вмѣстѣ взятыя, даютъ новую, составную пару. Такимъ образомъ, правило обыкновеннаго силового сложенія оказывается правиломъ сложенія силовыхъ паръ, поскольку величина этихъ паръ выражается линіями, соотвѣтствующими произведеніямъ изъ силы на плечо. Уголь, подъ которымъ эти линіи подлежатъ сложенію по правилу параллелограмма, есть уголь плоскостей или, что то же, уголь осей, перпендикулярныхъ къ плоскостямъ силовыхъ паръ и называемыхъ у Пуансо прямо осями силовыхъ паръ. Смотря по смыслу силовыхъ паръ, натурально, слѣдуетъ брать одинъ изъ четырехъ возможныхъ угловъ,

образуемыхъ пересѣченіемъ плоскостей или осей. Впрочемъ, все это строжайшимъ образомъ аналогично параллелограмму силъ и не требуетъ здѣсь дальнѣйшихъ разъясненій.

164. Изложенное доселѣ содержитъ элементы теоріи, и главное ея основаніе состоитъ въ томъ, что двѣ разнородныя причины или два существенно различныя дѣйствія отдѣляются другъ отъ друга. Силовая пара никогда не можетъ быть уничтожена или замѣнена отдѣльною силой, но только себѣ равною парой. Поэтому исходный пунктъ общаго сложенія силъ долженъ въ отношеніи къ равновѣсію состоятъ въ томъ, что взаимное уничтоженіи двигательныхъ импульсовъ должно имѣть мѣсто отдѣльно для каждого изъ обоихъ видовъ причинъ. И мы составимъ себѣ по истинѣ наглядное понятіе о легкости, съ какою Пуансо выводитъ общія условія равновѣсія твердой системы, т. е. вообще шесть уравненій равновѣсія для какой угодно системы, если послѣдуемъ за нимъ въ изложеніи его главнаго пріема. Послѣдній состоитъ въ перенесеніи силы параллельно самой себѣ въ произвольную другую точку системы и въ уравниваніи измѣненія дѣйствія, отсюда возникающаго, введеніемъ силовой пары, помѣщающейся въ плоскости первоначальнаго и новаго положенія силы. Въ самомъ дѣлѣ, можно перенести силу параллельно самой себѣ въ произвольную точку, если только тотчасъ же уничтожимъ ее тамъ равною и противоположною силою. Такимъ образомъ получается система трехъ силъ, которую можно раздѣлить на пару и силу, дѣйствующую въ новой точкѣ приложенія. Итакъ, перенесеніе силы параллельно самой себѣ порождаетъ только необходимость разсмотрѣнія возникающей такимъ образомъ пары. Пару же можно помѣстить гдѣ угодно въ той же или въ нѣкоторой параллельной плоскости, и такимъ образомъ, очевидно, первоначальное простое дѣйствіе силы въ данной точкѣ приложенія совершенно наглядно замѣняется комбинаціей, одинъ членъ которой есть та же самая сила въ новой точкѣ приложенія, а другой членъ—силовая пара, плечо которой равно перпендикулярному разстоянію переноса.

Этимъ способомъ можно всѣ силы перенести въ одну точку, гдѣ угодно взятую, если только она неизмѣнимо связана съ системою; ибо только при этомъ предположеніи получаютъ при перенесеніи настоящія пары, и группу трехъ силъ можно разсматривать какъ относящуюся къ системѣ. Такимъ образомъ для всякой произвольной точки получается одна и та же переносная равнодѣйствующая, тогда какъ сложеніемъ всѣхъ силовыхъ паръ также должна получаться одна составная пара. Этимъ задача общаго силового сложенія рѣшена новымъ путемъ. Равнымъ образомъ, тотчасъ же получаются

условія равновѣсія; ибо, во первыхъ, переносная равнодѣйствующая должна быть нулемъ, а это возможно лишь тогда, когда разложеніе силъ по тремъ перпендикулярнымъ осямъ даетъ на каждой оси равнодѣйствующую или сумму равную нулю. Но эти послѣднія три соотношенія суть ничто иное какъ извѣстныя три уравненія переноснаго равновѣсія. Далѣе, если по отношенію къ силовымъ парамъ должно имѣть мѣсто равновѣсіе, то и равнодѣйствующая пара также должна быть равна нулю, а это опять только тогда возможно, когда разложенія паръ по тремъ координатнымъ плоскостямъ въ каждой изъ этихъ трехъ плоскостей также приводятся къ нулю или, что тоже, когда разложенныя пары находятся въ равновѣсії около соотвѣтствующихъ осей координатъ, т.-е. даютъ сумму равную нулю. Но приравниваніе этихъ суммъ паръ нулю даетъ извѣстныя три уравненія моментовъ, которыми выражается вращательное равновѣсіе. Такимъ образомъ, пополненіе элементовъ статики понятіемъ силовой пары послужило къ выводу простѣйшимъ путемъ шести основныхъ уравненій статики. Двѣ главные стороны равновѣсія и возможности движенія, а именно, точки зрѣнія переноса и вращенія, выступаютъ фундаментально и прослѣжены до самой области первыхъ принциповъ. Съ методической и систематической точки зрѣнія, это успѣхъ, имѣющій высокую цѣнность. Прежде къ вращенію приходили какъ къ чему-то случайному, что произвольно входило въ общія слѣдствія силовыхъ дѣйствій и силовыхъ сложений, каковыя ранѣе представляли себѣ просто переносными. Теперь же, слѣдуя теоріи Пуансо, возможно уже въ первыхъ основаніяхъ встрѣтить распорядки, слѣдствія которыхъ овладѣваютъ, затѣмъ, обѣими сторонами движенія и равновѣсія.

Отдѣльная сила только тогда слагается съ парюю въ одну равнодѣйствующую, когда направленіе силы параллельно направленію плоскости пары. Слѣдовательно, это — условіе, необходимое для того, чтобы въ системѣ при общемъ сложеніи силъ и паръ возникла одна равнодѣйствующая. Во всѣхъ другихъ случаяхъ, когда направленіе силы пересѣкаетъ плоскость пары, результатъ обнимаетъ двоякаго рода движеніе, т.-е. онъ будетъ состоять изъ составной пары и изъ отдѣльной равнодѣйствующей силы.

Въ числѣ дальнѣйшихъ приложеній методы Пуансо слѣдуетъ отмѣтить изобрѣтеніе понятія такой плоскости, что если на нее проэктировать дѣйствующія на систему пары, то проекція дастъ maximum. Это есть просто плоскость равнодѣйствующей пары, и рассматриваемая максимальная сумма паръ, редуцированных на эту плоскость, представляется самою равнодѣйствующею парюю. Поэтому, если вмѣсто того, чтобы непосредственно держаться пло-

скостей, будемъ держаться произвольно взятыхъ осей, перпендикулярныхъ къ этимъ плоскостямъ, т.-е. осей паръ, и возьмемъ нѣкоторую точку, вообразивъ, что кромѣ оси равнодѣйствующей пары чрезъ нее проходитъ еще безчисленное множество произвольно выбранныхъ прямоугольныхъ осей координатъ, то можно также сказать, что плоскость перпендикулярная къ результирующей оси, сравнительно со всѣми другими плоскостями, которыя, какъ можно вообразить себѣ, въ видѣ координатныхъ плоскостей проходятъ чрезъ то же самое начало, представляетъ maximum суммъ паръ, редуцированныхъ на эти различныя плоскости. Эта теорема есть точная аналогія одной истины, относящейся къ отдѣльнымъ силамъ, но которой ни Пуансо, ни другіе не выставляли въ подобающемъ ей принципиальному значенію свѣтѣ. А именно, между всѣми направленіями, направленіе равнодѣйствующей есть такое, что если редуцировать на него произвольную систему силъ, то она дастъ maximum; или, выражаясь въ нѣсколько иной формѣ, сама равнодѣйствующая, въ сравненіи со всѣми другими направленіями, по которымъ силы можно представить дѣйствующими, представляетъ этотъ maximum дѣйствія. Но точно то же относится, какъ доказалъ Пуансо, и къ силовымъ парамъ. Относительно послѣднихъ всего естественнѣе въ основу положить не направленіе осей, а направленіе плоскостей, или же непосредственно плоскость равнодѣйствующей пары и сказать, что эта плоскость и есть плоскость maximum'a паръ.

165. Любопытное и необходимое основное понятіе, относящееся къ главному приему Пуансо, есть понятіе плоскости minimum'a между плоскостями максимальныхъ паръ, являющихся равнодѣйствующими парами для различныхъ точекъ приложенія переносныхъ равнодѣйствующихъ. А именно, если разсматривать окончательную общую равнодѣйствующую въ нѣкоторомъ опредѣленномъ положеніи и относящуюся къ этому положенію пару, то перенесеніе этой равнодѣйствующей въ какое угодно другое ей параллельное положеніе, сообразно главному приему, даетъ новую пару, которую нужно сложить съ равнодѣйствующею парюю для стараго положенія, и такимъ образомъ получится равнодѣйствующая пара для новаго положенія. Такъ какъ новое положеніе равнодѣйствующей можно выбрать какъ угодно, лишь бы только она прилагалась въ точкѣ, неизмѣняемо соединенной съ системою, себѣ параллельно, то величину удовлетворяющей этому перенесенію пары, вслѣдствіе того, что длину ея плеча можно выбрать по произволу, можно взять такую, чтобы въ сложении съ первою равнодѣйствующею парюю она давала новую равнодѣйствующую пару, плоскость которой была бы

перпендикулярна къ равнодѣйствующей. Это и будетъ минимальная пара; ибо всякое новое перенесеніе переносной равнодѣйствующей ввело бы пару, которой плоскость была бы перпендикулярна къ плоскости минимальной пары и въ сложении съ минимальною парою всегда должна бы была дать большую пару. Пуансо называетъ такимъ образомъ найденную минимальную пару *minimum maximorum*¹, ибо онъ равнодѣйствующія пары и ихъ плоскости, для всѣхъ положеній переносной равнодѣйствующей, на указанномъ въ предыдущемъ § основаніи, разсматриваетъ какъ *maxima* и такъ ихъ и называетъ. Выраженія и представленія получаютъ не столь неудобную форму, если сказанное максимальное свойство разъ навсегда принять характеристическою принадлежностью всѣхъ составныхъ эффектовъ, слѣдовательно и равнодѣйствующихъ паръ, но въ такомъ разѣ уже не употреблять *maximum* какъ средство наименованія для болѣе важнаго свойства. Свойство быть плоскостью равнодѣйствующей пары есть болѣе естественное и болѣе простое средство опредѣленія, нежели свойство быть тою плоскостью, на которую если редуцировать слагающія пары, то получимъ *maximum* по сравненію со всѣми другими плоскостями. Итакъ, *minimum maximorum* Пуансо просто есть наименьшая изъ всѣхъ равнодѣйствующихъ паръ, и всегда существуетъ единственное положеніе переносной равнодѣйствующей, которому соотвѣтствуетъ эта наименьшая пара. Плоскость этой пары, какъ уже сказано, перпендикулярна къ направленію этой равнодѣйствующей. Въ случаѣ переноснаго равновѣсія, въ каковомъ уже не приходится принимать въ соображеніе никакой двигательной равнодѣйствующей съ ея отличнымъ способомъ приложенія, очевидно, соотвѣтствующая разница даже совсѣмъ не имѣетъ мѣста. Въ такомъ случаѣ нѣтъ никакого *minimum*'а, ибо плоскость равнодѣйствующей или, другими словами, максимальной пары не можетъ испытать никакого измѣненія введеніемъ новой пары. Въ такомъ случаѣ она будетъ имѣть единственное, столь же неизмѣнно опредѣленное, направленіе въ пространствѣ, какъ и всякая обыкновенная силовая равнодѣйствующая. Впрочемъ, случаю равновѣсія равносильно предположеніе, что отвлекаются отъ переноснаго движенія системы, что ее, слѣдовательно, разсматриваютъ какъ систему покоящуюся и взвѣшиваютъ только остающіеся такимъ образомъ относительные процессы и отношенія. И тогда прямо получится только одна единственная неизмѣнная плоскость равнодѣйствующей пары или, другими словами, максимума паръ.

¹ Въ уже цитир. *Mémoire sur la composition des moments et des aires* II, (Прибавл. къ *Eléments de statique*).

Если принять въ соображеніе, что Пуансо вездѣ кладетъ въ основаніе существенное тождество трехъ понятій—пары, момента и той величины, которая въ принципѣ площадей называется площадью и справедливо видитъ въ этихъ трехъ понятіяхъ лишь различные способы представленія одной и той же вещи, то ясно, что теорія паръ вмѣстѣ съ тѣмъ включаетъ теорію моментовъ и площадей. Такимъ образомъ, имѣя въ виду динамику, онъ даетъ намекъ ¹, что представленія сохраненія въ отношеніи къ переноснымъ силамъ и вращательнымъ моментамъ или площадямъ совершенно просто получаются изъ его обобщенія сложенія силъ. Но любопытно по отношенію къ этой простой точкѣ зрѣнія то, что здѣсь выступаетъ не только сохраненіе величины суммъ, но и неизмѣняемость направленія плоскости, нынѣ обыкновенно называемой плоскостью максимума площадей. Въ самомъ дѣлѣ, эта плоскость есть ничто иное какъ плоскость равнодѣйствующей пары или, говоря иначе, составнаго момента или составной площади. Она не имѣетъ существенно инаго значенія, какъ то, какое приличествуетъ и направленію всякой переносной равнодѣйствующей; ибо онѣ обѣ имѣютъ свойства максимума, если сравнивать ихъ съ другими направленіями или плоскостями, и вообразить, что на послѣднія проектируются или редуцируются отдѣльныя слагающія силы или слагающія пары (моменты, площади) системы. Поэтому теорія Пуансо, по крайней мѣрѣ, частію разъясняетъ вопросъ, какъ принципиально возникаютъ максимальныя свойства въ способѣ дѣйствія силъ. Поэтому, здѣсь уместно припомнить, что болѣе глубокое изслѣдованіе всякихъ максимальныхъ или минимальныхъ свойствъ силовыхъ дѣйствій должно болѣе и болѣе вести къ признанію этихъ свойствъ уже въ фундаментальномъ принципѣ сложенія силъ или вообще въ первыхъ элементарныхъ исходныхъ пунктахъ механики. Насколько второстепенны, можно даже сказать, случайны эти максимальныя свойства въ сравненіи съ ихъ истинною причиною, видно изъ того, что всякій составной эффектъ, уже какъ таковой, представляетъ maximum, если сравнить его съ нескончаемыми возможностями всѣхъ тѣхъ эффектовъ, какіе должны бы были получиться для переносныхъ силъ по какому угодно иному линейному направленію или для силовыхъ паръ и имъ соотвѣтствующихъ понятій по какому угодно иному направленію плоскостей.

166. Хотя теорія Пуансо непосредственно освѣщаетъ важные принципы динамики, какъ принципъ площадей, все-таки, въ сущности, на нее нужно смотрѣть лишь какъ на болѣе полное ученіе

¹ Ibid. III. Application.... à la dynamique.

о сложении силъ. Безъ сложения паръ и безъ введенія этихъ особаго рода двигательныхъ причинъ нельзя послѣдовательнымъ образомъ и совершенно строго ступить за предѣлы задачи о сложении силъ, дѣйствующихъ на одну точку. Уже матеріальной линіи или механически связанной пары точекъ нельзя строго трактовать безъ этого новаго понятія. Моменты, въ обычномъ смыслѣ этого слова, были недостаточнымъ средствомъ замѣны, ибо при нихъ всегда должно было идеально фиксировать нѣкоторыя оси. Но особенно странное исключеніе представляли площади, ибо сами по себѣ онѣ отнюдь не представляли чего-либо похожаго на силы, и тѣмъ не менѣе должны были служить для выраженія общаго главнаго свойства движенія системы, понимаемаго съ точки зрѣнія вращенія. Впредь съ первыхъ же шаговъ будутъ имѣть дѣло не съ инымъ чѣмъ, какъ съ сложениемъ тѣхъ своеобразныхъ двигательныхъ причинъ, которыя называются силовыми парами. Параллелизмъ первыхъ принциповъ, общихъ свойствъ и дальнѣйшаго развитія касательно перемѣщенія и вращенія сдѣлался чрезъ это полнымъ.

Понятно, Пуансо съ бѣльшимъ успѣхомъ доказалъ права своего особеннаго, на наглядное обращеннаго, метода въ новой теоріи вращенія. О теоріи силовыхъ паръ самой по себѣ можно было сказать, что она обогатила элементы и принципы, что же касается механическаго знанія, то она расширила собственно не матеріаль его, а лишь формы представленія и способы выводовъ. Какъ ранѣе указано (§ 120), уже Эйлеръ весьма близко подошелъ къ понятію силовой пары, замѣтивъ, что моментъ вращенія, при которомъ переносное дѣйствіе силы исчезало бы, можно бы было только тогда мыслить, когда бы вообразили, что этой силѣ противопоставлена равная параллельная ей сила. Поэтому, было очень естественно, что Пуансо связалъ такимъ образомъ понятіе момента съ мыслью двойной силы и сверхъ того освободилъ его отъ всякаго отношенія къ опредѣленной оси. Только признавъ повсюду существеннымъ общее осевое направленіе въ пространствѣ или, что то же, общее направленіе плоскостей, онъ превратилъ понятіе момента въ понятіе силовой пары. Несмотря на важность этого превращенія въ логическомъ отношеніи, можно бы было, однако, подумать, что оно просто формально и потому сообщаетъ только изящество и строгость элементамъ, принципамъ и доказательствамъ. Тѣмъ не менѣе, своимъ рѣшеніемъ задачи объ изображеніи законовъ вращенія тѣла Пуансо на дѣлѣ доказалъ плодотворность своихъ способовъ представленія и точекъ зрѣнія.

Первое особое и вмѣстѣ краткое начертаніе новой теоріи вра-

щенія содержится въ уже цитованномъ мемуарѣ 1834 г. ¹. Однимъ изъ извѣстѣйшихъ главныхъ результатовъ служить представленіе о центральномъ эллипсоидѣ или, какъ теперь еще называютъ, о центральномъ эллипсоидѣ инерціи, катящееся движеніе котораго по неизмѣняемой плоскости нѣкоторой пары, сообщающей импульсъ, изображаетъ и наглядно уясняетъ обстоятельства и свойства вращенія тѣла около точки. Впрочемъ, задача вращенія собственно здѣсь насъ не касается, ибо ея рѣшеніе само по себѣ не даетъ новыхъ принциповъ, а лишь спеціальныя слѣдствія извѣстныхъ элементарныхъ основоположеній.

Что касается этихъ основоположеній, то Пуансо слагаетъ вращенія точно такъ же, какъ и переносныя силы, комбинируя ихъ сообразно угловымъ скоростямъ и положеніямъ осей. Такимъ образомъ, оси, длины которыхъ берутъ пропорціональными угловымъ скоростямъ, даютъ параллелограммъ вращеній, соотвѣтствующій параллелограмму силъ. Діагональ своимъ направленіемъ и положеніемъ представляетъ ось, а своею величиною угловую скорость составнаго вращенія. Аналогичныя правила являются и для сложенія вращеній около параллельныхъ осей, ибо здѣсь все соотвѣтствуетъ сложенію параллельныхъ силъ. Ось составнаго вращенія располагается въ этихъ случаяхъ такъ же, какъ и равнодѣйствующая параллельныхъ силъ, и величина ея опять представляетъ угловую скорость. Такъ какъ при вращеніяхъ около данныхъ осей всякій принципъ и всякая теорема, справедливая для переносныхъ силъ, аналогично повторяется, то нечего и удивляться, что два вращенія противоположнаго направленія около параллельныхъ осей, когда они равны, даютъ пару вращенія, которая не можетъ имѣть равнодѣйствующей вращенія и не можетъ быть уравновѣшена никакимъ вращеніемъ. Эффектъ этой пары вращенія переносный и, совершенно аналогично эффекту силовой пары, измѣняется произведеніемъ угловой скорости на разстояніе между осями. Подобная пара вращеній имѣетъ стремленіе переносно двигать систему перпендикулярно къ плоскости пары, т.-е. къ плоскости осей данныхъ вращеній со скоростью, соотвѣтствующею означенному произведенію.

¹ Уже упомянутое несравненно обширнѣйшее воспроизведеніе въ *Journal des Mathématiques* 1851 появилось въ томъ же году въ изданіяхъ in-4^o и in-8^o. Для историческаго изслѣдованія изданіе 1834 должно все-таки служить образцомъ; но, не говоря уже о томъ, что въ болѣе пространномъ изложеніи оно просто скопировано, оно еще имѣетъ и то преимущество, что даетъ существенные пункты, не обременяя ихъ подробностями, и такимъ образомъ повышаетъ для иныхъ читателей ясность и силу впечатлѣнія. И отсутствіе фигуръ въ 1 изданіи также было методическимъ преимуществомъ.

Вращеніе можно переносить, какъ и переносную отдѣльную силу, отодвигая ось параллельно самой себѣ на извѣстное разстояніе. Только нужно вмѣстѣ съ тѣмъ, аналогично главному приему при перенесеніи отдѣльныхъ силъ, ввести соотвѣтственную этому перемѣщенію пару вращеній. Поэтому, сколько бы вращеній ни было дано, можно всю ихъ совокупность перенести такъ, чтобы ихъ оси проходили чрезъ произвольно избранную точку и чтобы они такимъ образомъ слагались въ одно единственное составное вращеніе. Что же, съ другой стороны, касается произведенныхъ паръ вращеній, то ихъ можно переносить и слагать какъ силовыя пары. Слѣдовательно, есть также и параллелограммъ паръ вращеній, и ясно, что этимъ сложеніемъ, въ концѣ концовъ, должно придти къ послѣдней составной парѣ вращеній. Отсюда видно, что всевозможныя вращенія около какихъ угодно осей при сложеніи даютъ подобный же результатъ, какъ и общее, упорядоченное Пуансо, сложеніе силъ. Если припомнить себѣ *minimum maximorum*, то очевидно будетъ, что и для сложения вращеній произвольная точка, чрезъ которую проходятъ оси вращеній, а слѣдовательно и ось составнаго вращенія, или, скорѣе, эта послѣдняя сама можетъ быть перенесена такъ, что получится составная пара вращеній, плоскость которой перпендикулярна къ сказанной оси составнаго вращенія. Но какъ эта пара вращеній означаетъ переносъ перпендикулярный къ своей плоскости, то этотъ переносъ падаетъ въ направленіе оси составнаго вращенія, и доказано, что всякій произвольный агрегатъ данныхъ вращеній около произвольныхъ осей производитъ въ системѣ ничто иное, какъ одно вращеніе около оси, соединенное съ одновременнымъ перемѣщеніемъ по направленію этой оси. Поэтому, отдѣльныя точки будутъ двигаться по винтовой линіи.

167. Если что особенно характеризуетъ методу Пуансо, такъ это—его виртуозность въ ясныхъ наглядныхъ поясненіяхъ. Вращеніе около оси не представляетъ здѣсь никакихъ трудностей, и даже въ соединеніи съ поступательнымъ движеніемъ даетъ движеніе каждой точки около круговаго цилиндра по винтовой линіи. Напротивъ, вращеніе около точки, при которомъ ось не сохраняется, но можетъ быть рѣчь только о такъ-называемой мгновенной оси, для объясненія значительно труднѣе. Здѣсь Пуансо, какъ извѣстно, ввелъ свои два произвольные конуса, имѣющіе эту точку вращенія общою вершиною. Въ то время какъ движущаяся коническая поверхность катится по неподвижной, онѣ всегда имѣютъ общее ребро, по которому касаются, и которое для строго непротяженного пункта времени представляетъ мгновенную ось вращенія. Такимъ образомъ, подвиж-

ной конусъ показываетъ, что собственно совершаетъ тѣло, которому онъ принадлежитъ, при вращеніи около точки, и какимъ образомъ мгновенная ось, разсматриваемая въ тѣлѣ и внѣ его, непрерывно мѣняетъ свое мѣсто.

Къ этимъ форономическимъ образамъ, при помощи которыхъ Пуансо ввелъ свою, въ собственномъ и механическомъ смыслѣ слова, теорію вращенія, присоединяется, какъ наиболѣе общее, представленіе о произвольномъ движеніи тѣла вслѣдствіе данныхъ вращеній, и распространеніе уже приведенной схемы цилиндра или, другими словами, перемѣщенія вдоль оси вращенія. Именно, если измѣняются ежемгновенно данныя разсматриваемаго сложенія, то измѣняется и направленіе оси, равно и угловая скорость, а наконецъ и скорость поступательнаго движенія. Поэтому, отдѣльная точка движется все еще винтообразно, но какъ бы съ непрерывнымъ измѣненіемъ элементовъ этого движенія, такъ что можно представлять себѣ ее какъ бы въ каналѣ, который каждымъ малѣйшимъ элементомъ своего протяженія соотвѣтствуетъ опредѣленному винтообразному движенію, причемъ, однако, особые условія этого движенія измѣняются отъ элемента къ элементу или, точнѣе говоря, непрерывно отъ точки къ точкѣ.

Механическая теорія вращенія, трактующая силы какъ таковыя и въ отношеніи къ массамъ и ихъ инерціи, естественно, начинается съ общаго сложенія силъ и ближайшимъ предметомъ имѣетъ опредѣленіе дѣйствія составной пары на тѣло. Переносная равнодѣйствующая въ центрѣ тяжести относится ко всей массѣ тѣла и слѣдовательно для полученія скорости должна быть раздѣлена на эту массу. Пару силъ, которой плоскость всегда можетъ быть проведена чрезъ центръ тяжести, Пуансо разсматриваетъ прежде всего въ ея частныхъ дѣйствіяхъ по тремъ главнымъ осямъ, и, по аналогіи этихъ особыхъ осей съ свойствомъ центра тяжести, дѣйствіе около каждой изъ нихъ относится къ соотвѣтственному ей моменту инерціи, такъ сказать, какъ къ массѣ, и потому должно быть раздѣлено на этотъ моментъ инерціи. Каждую изъ трехъ слагающихъ силовой пары, которая должна дѣйствовать на тѣло, дѣлятъ на соотвѣтствующій моментъ инерціи и затѣмъ составное дѣйствіе опредѣляется діагональю параллелопипеда.

На этой стадіи вопроса Пуансо вводитъ свой, упомянутый выше, извѣстный центральный эллипсоидъ или центральный эллипсоидъ инерціи, откладывая на главныхъ осяхъ тѣла длины, обратно пропорціональныя квадратнымъ корнямъ изъ моментовъ инерціи. Если теперь плоскость пары перенести параллельно самой себѣ, такъ чтобы она касалась эллипсоида, то можно дѣйствіе пары предста-

вить наглядно вращеніемъ около точки касанія какъ около мгновеннаго полюса, причѣмъ центръ эллипсоида остается на своемъ мѣстѣ. Затѣмъ, все дальнѣйшее опредѣленіе движенія сводится къ движенію эллипсоида, который катится по неподвижной касательной плоскости пары при опредѣленномъ положеніи своего центра и такимъ образомъ дѣлаетъ видимыми всѣ элементы и модальности вращенія. Поэтому, на тѣло можно совсѣмъ не обращать вниманія и разсматривать эллипсоидъ какъ ему эквивалентный. Впрочемъ, частности и особые доказательства приведеннаго Пуансотоваго арранжамента тѣмъ менѣе относятся къ предмету нашего историческаго изложенія, что они непосредственно уже не связаны съ принципиальными вопросами, и къ тому же опредѣленіе мѣста, занимаемаго вращающимися тѣломъ по истеченіи опредѣленнаго времени, по своей аналитической формѣ приводитъ къ эллиптическимъ трансцендентнымъ ¹.

Если эти частности и имѣютъ общее значеніе, то только благодаря характеру метода, и въ этомъ отношеніи наше изложеніе достаточно показало, что Пуансо въ самомъ дѣлѣ положилъ начало—наряду съ преобладающе аналитическимъ приѣмомъ пускать въ ходъ и способы представленія и вывода механическихъ отношеній, обращающіея непосредственно къ понятіямъ и созерцанію. Такимъ образомъ, заслуга его не ограничивается простымъ уясненіемъ элементовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе простою и богатою слѣдствіями разработкою труднѣйшихъ специальныхъ проблемъ, но хватаетъ дальше, заявляя о себѣ созданіемъ новыхъ методическихъ особенностей. Пуансо въ весьма значительной мѣрѣ способствовалъ весьма естественной потребности—не ограничиваться признаками понятій, выражающимися просто вычисленіемъ, но изслѣдовать и механическое значеніе этихъ понятій самихъ по себѣ, и первые шаги, сдѣланные имъ въ этомъ направленіи, только тогда получаютъ полнѣйшую оцѣнку, когда сдѣланы будутъ новые шаги въ томъ же или въ подобномъ смыслѣ. Но обманывать себя нечего: времени съ тѣхъ поръ прошло много, а вполне консеквентнаго построенія всѣхъ основныхъ истинъ механики въ законченной систематической формѣ все еще недостигли. Для этого, скорѣе, было бы нужно разложеніе понятій, и, очевидно, все еще сложная форма силовой пары не можетъ быть послѣднимъ средствомъ. Нужно бы было обратиться къ предметамъ приложенія силъ, слѣдовательно, прежде всего къ механической линіи,—необходимость, которая еще доселѣ, какъ

¹ Ср. объ этомъ цитованное увеличенное изд. новой теоріи о вращеніи 1851, третій отдѣлъ, особенно чл. 10.

показываетъ исторія механики, все еще не вошла въ сознаніе, и которая, въ виду того, что уже отчасти она могла объяснить недостатки архимедовскаго доказательства теоремы о рычагѣ, даетъ и вообще указанія насчетъ того, гдѣ источникъ всюду дающихъ себя чувствовать пробѣловъ современной механической дедукціи. Дальнѣйшее развитіе этого предмета не соотвѣтствовало бы рамкамъ предлежащей темы и всего менѣе примыкаетъ къ Пуансотовскому направленію.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

О проблематическихъ принципахъ механики у Гаусса, Гамильтона, Якоби, Дирикле и другихъ.

168. Еслибы мы вмѣсто общихъ принциповъ имѣли дѣло съ частными проблемами, то въ этой главѣ мы собрали бы нѣчто большее того, что на дѣлѣ въ ней дается. Прежде всего, что касается К. Ф. Гаусса ¹, то стоить упомянуть только о его разработкѣ задачъ аттракціоннаго исчисленія, особенно же его статью о притяженіи сфероидовъ ² и статью о притягательныхъ и отталкивательныхъ силахъ, дѣйствующихъ въ обратномъ отношеніи квадратамъ разстояній ³. Введеніе потенціала ⁴, т.-е. характеристичной для аттракціонныхъ вычисленій функціи, выражающей сумму или интегралъ массовыхъ частицъ, раздѣленныхъ на разстоянія,—введеніе этого потенціала массъ, слѣдствія чего извлечены въ послѣдней изъ упомянутыхъ статей, имѣетъ значеніе прежде всего для соотвѣтственнаго особаго класса задачъ. Равнымъ образомъ, притяженіе эллиптическихъ сфероидовъ есть специальная задача, относительно которой существуетъ цѣлая исторія, въ которой игралъ

¹ Род. 1777, ум. 1855.

² *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum*; *Comment. der Societät zu Göttingen*, Bd. II (1813); *Gauss Werke* Bd. V (1867), стр. 3—22.

³ «Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte»; въ *Gauss und Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*, Leipzig 1840; *Gauss Werke* Bd. V, стр. 197—242.

⁴ Названіе «потенціалъ» находится въ выше цитованной статьѣ, тогда какъ разсматриваемая функція отмѣчена уже у Лапласа (*Méc. céleste*, кн. II, Art. 11), и во 2 изд. *Méc. anal.* Лагранжа (1 отд., сек. V, Art. 9) выступаетъ какъ особый случай сложения силъ. Впрочемъ, наименованіе *potential function* находимъ уже въ 1828 г. у Грина; ср. его *Mathematical Papers*, edited by N. M. Ferrers, London 1871, стр. 9.

роль и Лапласъ ¹; тѣмъ не менѣе, эти нужныя для приложений спеціальныя теоріи возникли только на почвѣ существующихъ и признанныхъ общихъ принциповъ механики и не дали никакого повода къ новому пониманію принциповъ. Также и теорія отношеній равновѣсія жидкостей, впервые изслѣдованныхъ Лапласомъ ² въ особомъ направленіи, по поводу капиллярныхъ явленій, причемъ принимается въ расчетъ особое, отъ Ньютоновскаго притяженія отличное, молекулярное притяженіе, дѣйствіе котораго допускается лишь на малѣйшихъ разстояніяхъ, теорія эта и въ новой обработкѣ Гаусса ³ не даетъ ничего важнаго, не говоря уже о чемъ-либо принципиально существенномъ.

Общими принципиальными основаніями механики Гауссъ занимается прямо только въ одной, спеціально этому предмету посвященной, статьѣ ⁴, гдѣ, обозрѣвая принципъ наименьшаго дѣйствія и его исторію, устанавливаетъ сродную схему, посредствомъ которой законъ статическихъ и динамическихъ отношеній силовой системы ставится къ арранжементу, т.-е. къ совокупности препятствій, которыми она измѣняется, въ отношеніе, формулируемое нѣкоторымъ простымъ понятіемъ. Это понятіе есть понятіе наименьшаго отклоняющаго дѣйствія, причемъ подъ отклоненіемъ разумѣется занятіе мѣстъ, отличныхъ отъ тѣхъ, на какихъ находились бы точки системы, еслибъ онѣ находились только подъ вліяніемъ свободно дѣйствующихъ силъ, а не подъ вліяніемъ измѣняющихся системныхъ условій. Отклоняющее дѣйствіе измѣняется квадратами отклоненій, т.-е. возможныхъ или гипотетическихъ и дѣйствительныхъ мѣстъ. Слѣдовательно, аналитически, рассматриваемая схема есть принципъ наименьшихъ суммъ квадратовъ, и самъ Гауссъ отнюдь не упускаетъ упомянуть объ аналогіи, по которой методъ природы въ компенсаціи препятствій совпадаетъ съ извѣстнымъ методомъ наименьшихъ суммъ квадратовъ, посредствомъ котораго вѣроятность погрѣшностей наблюденія подчиняется нѣкоторому закону. Въ самомъ дѣлѣ, представителю ⁵ этого послѣдняго метода было весьма свойственно понимать этотъ механическій основной принципъ въ смыслѣ именно

¹ Мéc. céleste, кн. III, гл. I, и кн. II, Art. 11—12.

² Ibid. кн. X, Дополненіе.

³ Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii; Comment. der Societ. zu Götting. Bd. VII (1830); Gauss Werke Bd. V, стр. 31—77.

⁴ „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“; Crelle, Journal für Mathematik, Bd. IV (1829); Gauss Werke Bd. V, стр. 25—28.

⁵ Излож. въ Gauss, Theoria motus corporum coelestium, 1809; о первоначальномъ открытіи ср. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Leipzig. 1856, стр. 16, 42 и сл.

такой аналогіи, сравнивая пріемъ природы въ аккомодациі ея свободныхъ силъ къ даннымъ преградамъ съ приспособленіемъ математика къ предварительнымъ условіямъ согласованія и взаимной зависимости наблюдаемыхъ величинъ. Механическій принципъ, формулированный Гауссомъ, утверждаетъ, что сумма квадратовъ сказанныхъ отклоненій должна быть *minima*. Понятіе отклоненія приложимо и къ случаю равновѣсія; ибо въ этомъ случаѣ точки фактически остаются на своихъ мѣстахъ, и потому должно расчислить разстояніе этихъ мѣстъ отъ тѣхъ положеній, какія эти точки заняли бы при свободномъ дѣйствіи силъ по истеченіи неограниченно малаго времени. Итакъ, отношеніе силъ въ состояніи движенія и въ частномъ случаѣ равновѣсія выражается совершенно одинаковымъ правиломъ. И Гауссъ прямо замѣчаетъ, что статику слѣдуетъ разсматривать просто какъ частный случай динамики.

Если разсматриваемую концепцію принциповъ формулировать независимо отъ ея аналитическаго выраженія, то въ смыслѣ Гауссса пришлось бы только сказать, что отклоняющее дѣйствіе елико-возможно мало, а вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ замѣчаетъ самъ Гауссъ, свободное дѣйствіе при этомъ возможно-велико. Исходя же вообще изъ того, что дѣйствіе пропорціонально массѣ и квадрату скорости, получится принятое и Гауссомъ выраженіе для спеціальнаго отклоняющаго дѣйствія, такъ какъ для одного и того же мгновенія произведенія изъ массъ на квадраты отклоненія, фактически имѣющіяся въ виду, оказываются только безъ общаго дѣлителя—времени. Означенный принципъ, долженствующій у Гауссса представлять нѣчто большее простой замѣны начала виртуальныхъ скоростей, гласить въ цитованной статьѣ такъ: «Движеніе системы матеріальныхъ точекъ, какимъ бы образомъ онѣ ни были между собою связаны и какъ бы ихъ движенія ни были связаны съ внѣшними ограниченіями, совершается въ каждое мгновеніе въ наибольшемъ согласіи, какое только возможно, съ движеніемъ, какое онѣ имѣли бы, если бы всѣ слѣлались свободны, или, иначе, оно совершается съ наименьшимъ принужденіемъ, причеиъ за мѣру принужденія, какое вся система испытываетъ въ каждый элементъ времени, принимается сумма произведеній изъ квадрата отклоненія каждой точки отъ свободнаго ея движенія на ея массу».

169. Чтобъ уразумѣть выше упомянутый принципъ въ его связи съ предшествовавшею исторіей, мы должны припомнить себѣ концепцію и судьбы принципа наименьшаго дѣйствія и выставить здѣсь особенно нѣкоторыя ихъ черты. Карно вѣрно замѣтилъ, что часть представлений, метафизическая сторона которыхъ привлекала къ себѣ Мопертюи, можно свести къ тому, что потерянные живыя силы при

ударѣ, или силы, которая въ случаѣ отсутствія упругости можно бы было считать потерянными, представляютъ *minimum*. Въ томъ мѣстѣ (§ 125), гдѣ мы говорили объ этомъ воззрѣніи Карно, было уже указано на возможное обобщеніе, въ силу котораго дѣйствія потерянныхъ силъ должны бы быть минимальными. Если перенести это начало на дѣйствія, подлежащія эвентуально компенсаціи въ элементъ времени вслѣдствіе ограниченной системы, то Гауссово формулированіе представится варіантомъ, сроднымъ принципу наименьшаго дѣйствія.

Если на разсматриваемый принципъ во всей его полнотѣ смотрѣть не какъ на первый исходный пунктъ, слѣдовательно, не какъ на первое начало въ собственномъ смыслѣ, но, какъ это слѣдуетъ, какъ на теорему, выражающую общее свойство отношенія силъ, то о немъ можно также сказать, что онъ въ тѣсномъ смыслѣ слова дедуцируемъ или доказуемъ. Въ такомъ случаѣ, онъ основывается на взаимной комбинаціи принципа виртуальныхъ скоростей съ д'Аламбертовымъ. Въ самомъ дѣлѣ, если рядомъ съ дѣйствительнымъ мѣстомъ, какое заняла точка по истеченіи элемента времени, взять нѣкоторое произвольное, но такое, чтобы оно могло вытекать изъ возможнаго для системы перемѣщенія, то это виртуальное мѣсто по отношенію къ тому, какое опредѣлилось бы свободнымъ дѣйствіемъ силы, даетъ отклоненіе, для котораго разсматриваемая въ этомъ принципѣ сумма квадратовъ всегда больше, чѣмъ въ предположеніи дѣйствительнаго отклоненія. Такимъ образомъ, изъ всѣхъ виртуальныхъ мѣстъ дѣйствительное положеніе есть такое, которому соотвѣтствуетъ *minimum* отклоненій, имѣющихъ мѣсто по отношенію къ эвентуальнымъ совершенно свободнымъ мѣстамъ. Доказательство, основанное у Гаусса на принципахъ д'Аламбера и виртуальныхъ скоростей, имѣетъ то преимущество, что устанавливаетъ этотъ *minimum* независимо отъ обыкновенныхъ аналитическихъ критеріевъ, такъ сказать, изъ простаго понятія вещи. Имено, чтобы доказать это минимальное свойство, Гауссъ непосредственно показываетъ, что разсматриваемая сумма отклоненій въ предположенномъ случаѣ меньше, чѣмъ еслибы въ основаніе положены были прежде указанныя другія отклоненія. Три разсматриваемыя мѣста точки, а именно дѣйствительное мѣсто, гипотетическое свободное мѣсто и произвольно выбранное виртуальное мѣсто образуютъ треугольникъ, къ которому примѣняется обобщенная Пиагорова теорема, и затѣмъ убѣждаются, что неквадратичный членъ этого уравненія, при введеніи общей для всѣхъ членовъ массы точки, представляетъ виртуальный моментъ потерянной силы. Сумма же этихъ виртуальныхъ моментовъ для всѣхъ точекъ, по принципамъ д'Алам-

бера и виртуальныхъ скоростей, равна нулю. Поэтому при суммировании всѣхъ такихъ уравнений, вытекающихъ для всѣхъ точекъ изъ обобщенной Пиагоровой теоремы, исчезаютъ тѣ неквадратичные члены, которые соотвѣтствуютъ виртуальнымъ моментамъ потерянныхъ силъ, и остаются только простыя суммы квадратовъ какой-либо изъ сторонъ треугольниковъ, причемъ послѣднія помножаются на соотвѣтственные массы. Одна сторона треугольника представляетъ дѣйствительное отклоненіе, другая—виртуальное отклоненіе, т.-е. разстояніе виртуальнаго мѣста отъ свободнаго. Но сумма квадратовъ, относящихся къ этимъ послѣднимъ, никогда не равна суммѣ квадратовъ, относящихся къ первымъ, но, въ силу найденнаго уравненія, всегда больше на сумму квадратовъ, относящихся къ третьей сторонѣ. Такимъ образомъ, minimum доказанъ, и притомъ безъ всякаго усмотрѣнія понятія о дѣйствиіи или какой-либо чуждой точки зрѣнія, скорѣе, въ основѣ Гауссовской дедукціи лежитъ просто комбинація геометрической теоремы съ принципами д'Аламбера и виртуальныхъ скоростей. Слѣдовательно, какъ это само собою понятно, въ основѣ лежитъ и сложеніе силъ, даже въ частномъ случаѣ очевидно примѣненіе разложенія и параллелограмма силъ.

Какъ уже указано, мнимый новый принципъ Гаусса просто есть вариантъ принципа наименьшаго дѣйствія и, какъ таковой, имѣетъ лишь небольшую, къ тому же просто формальную, цѣну. Новаго онъ не даетъ ничего, а, какъ обыкновенно и всѣ прочія математическія работы Гаусса, есть просто видоизмѣненіе даннаго ранѣе другими. Въ нашемъ основномъ трудѣ по математикѣ мы нѣсколько ближе очертили характеръ мнимыхъ Гауссовскихъ вкладовъ, а потому здѣсь можемъ освободить себя отъ труда детально слѣдовать за нимъ. Здѣсь, т.-е. въ механикѣ, рѣшающимъ обстоятельствомъ было бы уже одно то, что Гринъ, исходя отъ общей механической формулы Лагранжа, создалъ аналитическія основы для разработки электричества и далъ впервые широкія примѣненія потенциальной функціи, впоследствии для краткости названной потенциаломъ, тогда какъ въ Германіи Гауссъ, идя по его стопамъ, но не называя Грина, выдавалъ себя мастеромъ дѣла. Что же касается, въ частности, вышеуказаннаго варианта по механикѣ, то замѣчательно, что именно нераціонально схваченный и съ самаго начала неясно выраженный принципъ наименьшаго дѣйствія оказалъ двусмысленную притягательную силу на представителей неяснаго мышленія въ 19-мъ столѣтіи и прежде всего въ особенности на самаго именитаго между ними.

170. Примыкая къ нормированной Лагранжемъ концепціи принципа наименьшаго дѣйствія и изслѣдуя уравненіе живыхъ силъ, ирландскій астрономъ и остроумный аналитъ Вилльямъ Роуэнъ

Гамильтонъ (1805—1865) пришелъ къ постановкѣ новой аналитической формы общихъ механическихъ отношеній, нынѣ просто называемой Гамильтоновскимъ началомъ. Эта новая форма въ самомъ дѣлѣ есть значительное приближеніе къ рѣшенію проблемы о нахожденіи кореннаго уравненія къ Лагранжевскому универсальному уравненію динамики или, по крайней мѣрѣ, общихъ типовъ или характерныхъ признаковъ для этого кореннаго уравненія, т. е. послѣднихъ интегральныхъ формъ. Всеобщность, въ силу которой изъ подобной заключительной интегральной формы должны бы были получиться всѣ типическія главныя теоремы механики возстановленіемъ соответственныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго и втораго порядка, — всеобщность эта заставила бы даже, еслибы принципу этому дана была надлежащая форма, разсматривать его какъ корень всѣхъ остальныхъ началъ.

Еще въ молодости, въ своихъ работахъ о системахъ пучковъ ¹, Гамильтонъ аналитически подготовилъ позднѣйшія свои механическія воззрѣнія ². Правда, эти механическія построенія непосредственно относились только къ системѣ свободныхъ точекъ; но Гамильтонъ правильно замѣчаетъ, что всѣ дѣйствительныя отношенія и дѣйствія природы въ концѣ концовъ должны бы были сводиться къ изслѣдованію подобныхъ системъ точекъ. И Лагранжъ всегда упиралъ на то, что свободное взаимное дѣйствіе по образу функций разстояній есть случай природы; а такъ какъ и несвободныя системы введеніемъ реакцій могутъ быть приведены къ общему типу свободныхъ силовыхъ комбинацій, то Гамильтоновское предположеніе не вредитъ общему характеру результатовъ.

Самъ Гамильтонъ называетъ свой принципъ принципомъ перемѣннаго дѣйствія (law of varying action) и видитъ въ принципѣ наименьшаго дѣйствія только законъ «стаціонарнаго дѣйствія». Чтобы понять приѣмъ ирландскаго математика, нужно обратить вниманіе на то, въ какой формѣ принципъ наименьшаго дѣйствія былъ понимаемъ во времена Лагранжа и позднѣе. Въ рукахъ автора Аналитической Механики онъ былъ сведенъ къ чисто аналитическому выраженію, а о механическомъ его смыслѣ не особенно заботились. Такъ наприм. Лапласъ ³ примкнулъ въ этомъ отношеніи къ Ла-

¹ Theory of systems of rays, въ Transactions of the Royal Irish Academy. Т. 15 (1828).

² On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function; въ Philosophical Transactions за 1834, стр. 247—308, Продолженіе 1835, ibid. стр. 95—144.

³ Méc. céleste, кн. I, гл. 5, § 23.

транжу, отвергая всякія точки зрѣнія цѣли, и только по непослѣдовательности случайно ¹ высказалъ представленіе въ метафизическомъ родѣ. И Пуассонъ ² воспроизвелъ этотъ принципъ въ томъ же смыслѣ. Изъ двухъ аналитическихъ формъ не та, въ которой скорость умножается на элементъ пути, а та, гдѣ квадратъ скорости умножается на элементъ времени, всего удобнѣе для вывода Гамильтоновской интегральной формы уравненія живыхъ силъ. Взявъ варіацію уравненія живой силы въ Лагранжевой формѣ ³, умноживъ на элементъ времени и взявъ интегралъ, онъ нашелъ ту форму соотношеній высшей ступени, которой далъ наименованіе уравненія характеристической функціи. Этимъ мгновенная живая сила, накопляющаяся между двумя переменными предѣльными положеніями, сдѣлана была предметомъ динамически возможной варіаціи. Гамильтонъ прямо замѣчаетъ, что варіація, лежащая въ основаніи принципа наименьшаго дѣйствія, динамически невозможна, тогда какъ въ его принципѣ рѣчь идетъ объ актуальномъ движеніи.

Чтобы оцѣнить значеніе характеристической функціи, прежде всего замѣтимъ, что Лагранжево общее уравненіе живой силы содержитъ функцію, которая вмѣстѣ съ постоянною приравняется полусуммѣ живыхъ силъ, и природа которой опредѣляется допущеніемъ, что дифференціалъ ея даетъ извѣстную сумму силовыхъ моментовъ универсальнаго уравненія. Эта послѣдняя функція, возможность которой предполагается неопредѣленно, названа Гамильтономъ силовою функціею (*force-function*), и отъ ея уравненія, посредствомъ выше указанной варіаціи и интеграціи, дѣлается переходъ къ высшей ступени характеристической функціи. Силовая функція, по разложеніи уравненія по тремъ координатамъ, даетъ весьма простую форму дифференціальныхъ уравненій движенія, если силовую функцію, продифференцированную только по одной координатѣ, т.-е. ея частную производную, приравнять произведенію массы на производную координаты. Слѣдовательно, функція эта — ничто иное какъ общая потенциальная функція. Если уже обыкновенный спеціальнй потенциалъ отличается тѣмъ, что тому, что въ механикѣ называется уско-ряющею силою, доставляетъ высшую причину дѣйствія, относящуюся не просто къ мгновению, то ясно, что подъемъ на точку зрѣнія, еще высшую силовой функціи, долженъ имѣть большое значеніе.

¹ *Système du monde*, кн. III, гл. 5, Сочиненія Т. VI, стр. 205, гдѣ онъ говоритъ: «Интегралъ живой силы системы, умноженной на элементъ времени, есть minimum; такъ что, слѣдоват., истинная экономія природы есть экономія живой силы».

² *Traité de mécanique*, 2 изд. Paris 1833 (по нѣм. Штерна) Т. II, § 573.

³ *Méc. anal.* Т. I (1811), 2 отд. Sect. IV, Art. 34 и Sect. IV, Art. 14.

Эта точка зрѣнія и представляется характеристическою функціею Гамильтона. Это — функція двухъ положеній системы и времени, потребнаго для перехода отъ одного къ другому, т.-е. отъ опредѣленнаго даннаго положенія къ произвольному. Отношеніе къ постояннымъ—обстоятельство характерное; ибо только благодаря тому, что воображаютъ себѣ измѣненіе живой силы въ отношеніи къ данной постоянной ея зависящимъ отъ общей, предписывающей законъ этого измѣненія, функціи, — только благодаря этому и выходятъ за предѣлы силовой функціи, представляющей вмѣстѣ съ этими постоянными ходъ измѣненій живой силы. Интеграль мгновенной живой силы, точнѣе изъясненный обработкою другой части уравненія живыхъ силъ, есть главное понятіе, около котораго всего натуральнѣе группируются, такъ сказать, характеристическія мысли Гамильтона.

Уравненіе принципа наименьшаго дѣйствія Лагранжъ считалъ неплодотворнымъ и Гамильтонъ присоединился къ этому мнѣнію, по скольку онъ доказалъ вмѣстѣ съ этимъ, что его принципъ даетъ окончательный и промежуточный интегралы, тогда какъ первый служилъ только къ воспроизведенію и безъ того извѣстныхъ уравненій втораго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, послѣдній выводъ всегда былъ лишь логическимъ кругомъ, такъ какъ вторично находили только то, что уже должны были предположить для общей аналитической постановки принципа наименьшаго дѣйствія. Хотя Гамильтонъ въ своемъ изложеніи, всегда обращаясь къ дѣйствительности механическихъ процессовъ, и отличается ясностью, какой не встрѣчается у сродныхъ ему изслѣдователей-аналистовъ по механическимъ проблемамъ, тѣмъ не менѣе его новой формы механическихъ соотношеній нельзя считать такимъ предложеніемъ, которое можно бы было поставить на одну доску съ типическими общими свойствами, какія доселѣ мы приводили подъ именемъ принциповъ. Однако же было бы возможно и нѣчто большее этого, т.-е. можно бы было дать его началу дѣйствительно высшее мѣсто, еслибы реальная сторона Гамильтоновскихъ способовъ представленія развита была болѣе основательно. Единственное реальное понятіе, которое Гамильтонъ формулировалъ нѣсколько опредѣленнѣе, есть накопленіе живой силы или то дѣйствіе въ болѣе узкомъ смыслѣ, которое, соображаясь съ измѣненнымъ актуальнымъ движеніемъ, сдѣлано предметомъ варьяціи.

171. Труды К. Г. І. Якоби ¹ по разработкѣ аналитическихъ

¹ Род. 1804, ум. 1851. Ср. о немъ Дирикле въ *Abh. der. Berliner Akademie* von 1852.

вспомогательныхъ средствъ механики состоятъ, преимущественно, изъ специальныхъ работъ, или совсѣмъ не касающихся новаго формировапія принципѡвъ, или имѣющихъ къ таковому совершенно второстепенное отношеніе. Изъ числа этихъ специальныхъ вкладовъ всего извѣстнѣе выводъ общей формы равновѣсія вращающейся жидкой массы, частицы которыхъ тяготѣютъ другъ къ другу. Для этого случая Якоби вывелъ слѣдствіе, на которомъ Лагранжъ особенно не останавливался, и пришелъ къ тому результату, что экваторомъ разсматриваемой равномерно вращающейся массы можетъ быть какой угодно эллипсъ¹.

Якоби даже смотрѣлъ на механическое примѣненіе своей чисто аналитической теоріи новаго множителя какъ на новый принципъ динамики² и сообщилъ его Петербургской Академіи еще за три года до разсматриваемаго обширнаго изложенія въ 1845 г. Это начало послѣдняго множителя служить для вывода послѣдней интегральной формы динамическихъ уравненій и, по мнѣнію автора, должно въ этомъ отношеніи давать значительно больше, чѣмъ другія извѣстныя главные предложенія съ соотвѣтствующими имъ уравненіями. Въ цитованной большой статьѣ о новомъ множителѣ это начало примѣняется къ отдѣльнымъ случаямъ, а именно къ движенію точки, притягиваемой неподвижнымъ центромъ, и точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами по закону Ньютона, затѣмъ, къ вращенію тѣла около точки вслѣдствіе удара и т. д.³ Простѣйшій случай для примѣненія принципа составляетъ движеніе точки въ одной и той же плоскости, когда она притягивается неподвижнымъ центромъ. Здѣсь оба прежде всего требуемые интеграла даетъ принципъ сохраненія живыхъ силъ и принципъ площадей. Присоединивъ къ этимъ двумъ даннымъ соотношеніе, получаемое чисто аналитическою манипуляціей по принципу послѣдняго множителя, Якоби вполнѣ опредѣляетъ движеніе, притомъ, какъ заранѣе можно было предвидѣть, простыми квадратурами⁴.

То, что намъ извѣстно изъ лекцій Якоби по динамикѣ⁵, читанныхъ зимою 1842—43 г. и изданныхъ и редактированныхъ не самимъ авторомъ, хотя только въ рѣдкихъ случаяхъ даетъ вѣрныя

¹ Якоби: «О формѣ равновѣсія» въ *Анналахъ Поггендорфа*, т. 33 (1834).

² *Theoria novi multiplicatoris etc. особенно сар. III*, именно § 22, подъ заглавіемъ: *Novum principium generale mechanicum*; въ *Opuscula mathematica* (3 т. Берл. 1846—71), Т. I., стр. 162 и сл.; впервые появилась по частямъ въ журналѣ Крелля.

³ *Ibid.* § 25 sq. Ср. также статью, посланную во Франц. Академію: *Sur la rotation d'un corps*, въ *Opuscula*, Т. II (1851), стр. 139—196.

⁴ Ср. тамъ же § 25, стр. 176.

⁵ Изд. Клебшемъ, Берлинъ, 1866 (Борхардтовская тетрадь).

заключения о частностяхъ, зато даетъ возможность вообще ближе вникнуть въ отношенія изслѣдованій Якоби къ предшествовавшимъ работамъ Гамильтона, и кромѣ того позволяетъ бросить взглядъ и на представленія, которыя составилъ себѣ этотъ нѣмецко-еврейскій математикъ о принципѣ наименьшаго дѣйствія и его аналитическомъ выраженіи. То обстоятельство, что онъ вообще выдвинулъ на первый планъ такъ называемую изопериметрическую форму концепціи механическихъ проблемъ и отношеній, какъ форму, отличающуюся наибольшею общностью и широтою, согласовалось съ Гамильтоновскимъ поворотомъ къ принципу наименьшаго дѣйствія. Особенная критика, какую посвящаетъ Якоби этому принципу въ своихъ лекціяхъ¹, показываетъ, сверхъ того, что онъ не удовлетворялся аналитическою формою его, господствующею со временъ Лагранжа. Подразумѣваемое предположеніе, посредствомъ котораго уравненіе наименьшаго дѣйствія только и могло бы имѣть надлежащій смыслъ, это — исключеніе времени, и именно при помощи уравненія живыхъ силъ, благодаря чему все сводилось бы къ пространственнымъ элементамъ. Черезъ это аналитическое выраженіе принципа получило бы форму, которой не могло бы соответствовать никакое простое механическое понятіе. Подъ знакомъ интеграла, гдѣ прежде находилось произведеніе скорости на элементъ пространства, выраженіе это превращается въ произведеніе двухъ корней, изъ которыхъ одинъ относится къ той части уравненія живыхъ силъ, въ которой находится силовая функція съ постоянною, тогда какъ подъ другимъ знакомъ корня фигурируетъ сумма произведеній массъ на квадраты пространственныхъ элементовъ. Кромѣ того, еще особо Якоби доказываетъ, что постоянные предѣлы, между которыми берется интегралъ, должны бы быть достаточно близки, чтобы принципъ не терялъ силы; такъ, наприм., кратчайшія линіи, описываемыя тѣломъ, движущимся по шару подъ вліяніемъ импульса, не могли бы выходить изъ предѣла 180° ². Кромѣ того, и у Якоби, естественно, имѣетъ силу предположеніе, что это начало «наименьшей затраты силы», какъ онъ желаетъ называть его, имѣетъ значеніе только въ границахъ предварительныхъ условій, въ которыхъ имѣетъ силу и уравненіе живыхъ силъ съ соответствующимъ ему принципомъ, а именно только тогда, когда согласныя съ порядкомъ системы условныя уравненія не содержатъ явно времени.

Фактъ, что Якоби въ своихъ лекціяхъ главнымъ предметомъ взялъ динамику системы точекъ и въ сущности занялся только раз-

¹ Ibid. преимущественно стр. 44 и 52.

² Ibid стр. 46—49.

работкою аналитических средств интеграціи уравненій динамики, напоминаетъ кругъ задачъ, въ которомъ болѣе важное далѣ Гамильтонъ, предначертавъ направленіе изслѣдованій. Самый ходъ лекцій таковъ, что за выводомъ фундаментальныхъ формъ уравненій и за изложеніемъ принципиальныхъ главныхъ теоремъ о центрѣ тяжести, о живыхъ силахъ, о площадяхъ и о наименьшемъ дѣйствіи, слѣдуетъ переходъ къ приемамъ Гамильтона, а затѣмъ идетъ развитіе принципа послѣдняго множителя и его приложений. Въ посмертной статьѣ, помѣщенной въ лекціяхъ въ видѣ дополненія ¹, Якоби признаетъ точки зрѣнія Гамильтона первыми послѣ Лагранжа, составившими эпоху, обогащеніями общихъ формъ аналитической разработки механики. Стремленія же самого Якоби относились къ дѣйствительному выполненію требуемыхъ интеграцій, и изъ того, что приемы его, главнымъ образомъ, имѣли въ виду чисто внѣшнюю сторону вычисленій, можно, кажется, заключить, что въ фундаментальные принципы проникалъ онъ не особенно глубоко. Безпечность его въ этомъ отношеніи достаточно характеризуется его отзывомъ въ одной популярной лекціи ², гдѣ онъ, что очень комично, называетъ Декарта творцомъ принципа виртуальныхъ скоростей. Вообще, его критика и его пониманіе того, что дано было другими и къ чему, главнымъ образомъ, и примыкали его ничтожныя работы, не обличаютъ въ немъ сильнаго ума, хотя іудейская реклама упорно старалась всякую мелочь раздуть елико возможно, пуская въ обращеніе лживыя версіи о небывалыхъ работахъ и даже о яко бы великихъ трудахъ. Такъ онъ копошился, критикуя вкривь и вкосъ Лагранжа, и даже не совсѣмъ былъ правъ и въ вышеприведенномъ случаѣ по вопросу о фигурѣ равновѣсія, причѣмъ іудейство ревностно хлопотало за своего матадора. Приэтомъ, версія объ ошибкѣ Лагранжа была ложью; послѣдній трактовалъ вопросъ въ вещественномъ смыслѣ своей опредѣленной задачи о земномъ сфероидѣ, относившейся къ специальнымъ условіямъ происхожденія формы и съ самаго начала исключавшей случай трехоснаго эллипсоида. Упрекать въ этомъ случаѣ Лагранжа, какъ это дѣлалъ Якоби, значить не понимать дѣла и самому дать промахъ. А желаніе низвести Лагранжево основное уравненіе механики до уровня просто символическаго уравненія обнаруживаетъ еще меньшее пониманіе. Но довольно объ этомъ! Нескладная манера Якоби, неспособность къ глубокому проникновенію въ дѣло, всегдашнее заимствованіе чужого, простая виртуозность въ буквенныхъ выкладкахъ,—все это объ-

¹ Ibid. стр. 303.

² Ueber Descartes' Leben, Berlin 1846, стр. 8.

ясняется расовыми свойствами, на каковыя по поводу отношенія къ Абелю мы указывали въ нашемъ основномъ произведеніи по математикѣ, а вообще, въ связи съ общимъ освѣщеніемъ вопроса о неспособности еврейскаго племени къ наукѣ, въ нашемъ сочиненіи о еврейскомъ вопросѣ. Въ самомъ дѣлѣ, участіе въ научныхъ работахъ освѣщаетъ эти дрянныя расовыя свойства и ихъ вредныя стороны для знатока еще яснѣе, нежели можетъ уяснить это каждому вторженіе въ область практической жизни.

172. Г. П. Леженъ Дирикле (1805 — 59), въ концѣ жизни исключительно отдавшійся общимъ механическимъ проблемамъ принципиальнаго характера, и кромѣ доказательства устойчивости системы міра имѣвшій въ виду заняться и новою методою универсальнаго рѣшенія задачъ механики, оставилъ только незаконченную статью¹ касательно движеній жидкаго эллипсоида. Это — примѣръ строгой интеграціи гидродинамическихъ уравненій для случая, когда жидкость, части которой взаимно тяготеютъ другъ къ другу, первоначально имѣетъ форму эллипсоида. При движеніи жидкость остается эллипсоидомъ съ тѣмъ же центромъ, но положеніе и величина главныхъ осей измѣняются. Въ частномъ случаѣ эллипсоида вращения жидкость колеблется между формами удлиненнаго и сплюснутаго эллипсоида. Если и здѣсь оставить въ сторонѣ частную задачу, напоминающую первые, именно Клеротовскіе, шаги въ разработкѣ вопроса о фигурѣ земли, и вообще имѣющую большое значеніе въ вопросѣ образованія космическихъ тѣлъ, — то все же мы должны указать на замѣчаніе Дирикле въ введеніи къ разсматриваемой статьѣ, что Лагранжъ не долженъ бы былъ въ приложеніяхъ замѣнять свою болѣе общую форму гидродинамическихъ уравненій, основывающуюся на изслѣдованіи каждаго элемента отдѣльно, Эйлеровскою формою ихъ.

Изъ числа болѣе раннихъ работъ Дирикле имѣютъ принципиальный интересъ въ особенности двѣ статьи. Одна «Объ устойчивости равновѣсія»² даетъ доказательство ея изъ непосредственнаго понятія *maximum*'а и такимъ образомъ прокладываетъ путь, на которомъ не подлежатъ разсмотрѣнію обыкновенные аналитическіе критеріи *maximum*'а, получаемые посредствомъ обыкновенныхъ рядовъ, а равно не имѣютъ мѣста и практически непреодолимыя затрудненія болѣе сложныхъ случаевъ. Другая статья³ разсматри-

¹ Объ одномъ вопросѣ гидродинамики, *Abh. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Т. 8 (1858—59). Также отпечатано въ журналѣ Крелля, Т. 58 (1861).

² Въ журналѣ Крелля, Т. 32 (1846).

³ *Monatsbericht der Berliner Akademie* за 1852.

васть движеніе твердаго шара въ неограниченной, несжимаемой жидкости и, кромѣ выполненія интеграціи гидродинамическихъ уравненій для этого случая, еще особенно привлекаетъ вниманіе въ высшей степени изумительнымъ результатомъ, а именно, что математическій результатъ противорѣчитъ обычнымъ представленіямъ о сопротивленіи среды.

Особыя предположенія, при которыхъ Дирикле изслѣдоваль эту задачу, состояли въ томъ, что частицы жидкости аффицируются ускорительною силою постоянного направленія, и прежде всего онъ исходилъ отъ идеи, что шаръ неподвиженъ, а жидкость движется около него поступательнымъ движеніемъ. Затѣмъ, онъ показалъ, что можно вообразить, что шаръ свободенъ, т.-е. что вся система жидкости и шара свободна, и что при этомъ покой шара въ движущейся жидкости при предположенномъ родѣ движенія не будетъ нарушенъ. Переходъ, которымъ вмѣсто жидкости движеніе сообщается шару, легко понять. Впрочемъ, чтобы не было никакого сомнѣнія касательно особой стороны результата, что измѣняющее сопротивленіе въ концѣ концовъ зависитъ вовсе не отъ сохраняющейся скорости, а слѣдовательно только отъ ускоренія и безъ послѣдняго совсѣмъ не существуетъ, приводимъ подлинныя слова Дирикле. Въ концѣ разсматриваемой работы онъ говоритъ: «Это сопротивленіе не соотвѣтствуетъ представленію, какое надлежитъ имѣть о дѣйствіи жидкой среды на движущееся въ ней твердое тѣло, и по которому сопротивленіе уже существуетъ и должно быть преодоливаемо и тогда, когда имѣющееся въ нѣкоторый моментъ времени движеніе не должно измѣняться для ближайшей частицы времени, напротивъ, какъ выше найдено, въ нашемъ случаѣ движеніе твердаго тѣла мгновенно переходитъ въ прямолинейное и равномерное, какъ скоро перестаетъ дѣйствовать ускоряющая сила. Сопротивленіе зависитъ здѣсь совсѣмъ не отъ существующаго движенія, а исключительно отъ измѣненія движенія, имѣющаго произойти въ слѣдующую частицу времени...». Все, на что еще обратилъ вниманіе Дирикле въ особыхъ, относящихся къ механикѣ, изслѣдованіяхъ, и что главнымъ образомъ примыкало къ Гауссовскимъ работамъ о силахъ, дѣйствующихъ обратно-пропорціонально квадратамъ разстояній, для нашей исторіи принциповъ не имѣетъ никакого значенія.

173. Съ исторической точки зрѣнія, въ дѣлѣ разработки механическихъ принциповъ не безъ значенія то обстоятельство, что попытки дать болѣе строгую форму первѣйшимъ основоположеніямъ или, лучше, дать удовлетворительныя доказательства первыхъ главныхъ теоремъ, повторились и въ новѣйшее время, и даже у значи-

тельныхъ анализовъ. Такъ, наприм., Коши ¹ занимался новымъ выводомъ параллелограмма силъ и такимъ образомъ ранѣе предпринимавшіяся попытки въ этомъ родѣ увеличилъ новымъ вариантомъ. Въ нашей исторіи мы не обращали особаго вниманія на такого рода старанія, даже когда они принадлежали великимъ математикамъ, ибо въ сущности уже съ самаго начала, по поводу попытокъ Вариньона и Ньютона, можно было видѣть, что обыкновеннымъ путемъ нельзя дать сколько-нибудь основательныхъ выводовъ. И Лагранжъ былъ убѣжденъ въ неизбѣжной неудачѣ такого рода опытовъ, и результаты новой критики, какимъ бы путемъ онъ ни получался, всегда долженъ приводить къ признанію того факта, что редукція силы къ другому направленію дѣйствія есть вещь простая, но потому-то она и играла роль аксіомы, и въ этомъ втихомолку соглашались всѣ со временъ Галилея и до настоящаго времени. При томъ состояніи развитія механики, которое, какъ это доказалъ примѣръ Дирикле, дѣйствительно еще позволяетъ усомниться въ унаслѣдованныхъ отъ Ньютона основныхъ представленіяхъ о сопротивленіи срединъ, нечего удивляться, что и фундаментальнѣйшія истины, стоящія во главѣ статики и динамики, все еще требуютъ, въ извѣстной степени, формальнаго ихъ упроченія. Объ этомъ, кромѣ занятія вопросомъ о параллелограммѣ силъ, свидѣтельствуетъ и другой опытъ Коши ², относящійся къ гидростатическому принципу равенства давленія во всѣхъ направленіяхъ.

Этихъ двухъ примѣровъ достаточно, и мы можемъ не касаться множества другихъ попытокъ въ томъ же родѣ, которыя можно найти частію въ болѣе извѣстныхъ общихъ трактатахъ по механикѣ, какъ наприм. Пуассона, частію въ особыхъ статьяхъ или специальныхъ сочиненіяхъ.

Отношеніе математики къ формулированію самыхъ общихъ принциповъ механики, о чемъ мы особенно поведемъ рѣчь въ четвертой главѣ, даетъ косвенное рѣшеніе и вопроса о значеніи чисто аналитическихъ составныхъ частей разсмотрѣнныхъ или подобныхъ попытокъ доказательствъ. Но какъ въ настоящей главѣ рѣчь идетъ о работахъ, принадлежавшихъ лицамъ, которыя прежде всего были математиками и даже преимущественно анализатами, то, кажется, будетъ умѣстно не пройти молчаніемъ и соприкосновеній механики съ различными чисто математическими методами новѣйшаго времени. Нерасторжимость отношеній механики къ анализу и къ теоріи функций отчетливѣйшимъ образомъ показана была уже по поводу Ла-

¹ Exercices de mathématiques. T. I Paris 1826, «Sur la resultante etc.», стр. 29 и слѣд.

² Ibid. T. II (1827). «De la pression dans les fluides», стр. 23 и слѣд.

гранжа, а что касается тѣхъ математиковъ, о которыхъ мы только что говорили, то достаточно только упомянуть о разсмотрѣнныхъ пунктахъ, а именно о Гамильтоновскихъ способахъ представленія, чтобы охарактеризовать типъ, въ этой области неизбежный. Напротивъ того, можно бы было спросить, не могла ли бы новѣйшая синтетическая геометрія, т.-е. область методовъ Понсле и Штейнера, не могла ли бы она въ дальнѣйшемъ своемъ развитіи оказать воздѣйствія на способъ пониманія механическихъ истинъ и повести къ своеобразному развитію способовъ представленія въ какомъ-либо направленіи. Прежде всего само собою понятно, что тамъ, гдѣ геометрическіе образы опредѣляютъ отчасти форму механическаго дѣйствія, тамъ всякій способъ изслѣдованія законовъ этихъ образовъ можетъ оказаться цѣлесообразнымъ и для потребностей механики. Такимъ образомъ, синтетическая геометрія въ тѣсномъ смыслѣ слова, смотря по тому, какова ея сила въ отдѣльныхъ направленіяхъ требуемаго математическаго знанія, должна способствовать своими результатами и разрѣшенію задачъ механики. Примѣромъ можетъ служить Штейнерово рѣшеніе вопроса о притяженіи внѣшней точки эллипсоидальнымъ слоемъ»¹. Но, можетъ быть, и вообще разработка этихъ преимущественно проэктивныхъ геометрическихъ методовъ можетъ повести не только къ большей наглядности механическаго пониманія въ нѣкоторыхъ направленіяхъ, но и выставить на видъ извѣстныя фундаментальныя аналогіи всякихъ пространственно реальныхъ процессовъ. Напримѣръ, то же самое важное отношеніе, которое служитъ средствомъ къ переходу отъ угловъ или количествъ вращенія къ линейнымъ протяженіямъ, дастъ панданъ и въ механикѣ отношенію вращенія и переноса, и господствующая здѣсь двойственность отношеній окажется сплошь надежнымъ средствомъ. Но дѣйствительно синтетическая механика, въ концѣ концовъ, должна бы была разрабатываться скорѣе въ духѣ Пуансотовскихъ пріемовъ, нежели держаться проэктивныхъ геометрическихъ методовъ, да въ концѣ концовъ вообще должно дать мѣсто болѣе натуральному общему методу, который стоялъ бы выше анализа, какъ и выше направленной противъ него реакціи. Въ числѣ явленій, приведенныхъ въ настоящей главѣ, Гамильтоновское направленіе есть единственное, какое можно, по крайней мѣрѣ, назвать оригинальною аналитическою попыткою, тогда какъ все остальное или не имѣетъ никакого практическаго значенія, или же выглядитъ прямо проблематично.

¹ Crelles Journal, T. 12 (1834). «Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur», стр 141 и сл.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Представленія, примыкающія къ механическому эквиваленту теплоты.

174. Если предположить, что причину тепловыхъ явленій можно разсматривать какъ механическую силу, статически и динамически проявляющуюся въ нѣкоторой, намъ хорошо неизвѣстной, средѣ, то этимъ допущеніемъ примѣненію механическихъ принциповъ открывается новая, весьма обширная область. Но если сдѣлать еще шагъ дальше и представить себѣ, что причины всѣхъ явленій, какого бы рода они ни были, въ послѣднемъ основаніи суть механическія силы, то ни единый процессъ въ природѣ не минуетъ всеобщей возможности механическаго объясненія. Различныя силы природы могутъ тогда быть чѣмъ угодно; всѣ онѣ будутъ согласоваться въ томъ, что будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ выраженіемъ механическихъ дѣйствій, заключающихся въ ихъ дѣйствованіи. Какъ разнородность веществъ не несовмѣстна съ существованіемъ единой всеобщей матеріи, и какъ разнообразныя физическіе процессы не могутъ измѣнить всегда равнаго себѣ количества этой всеобщей матеріи; такъ и съ величайшимъ разнообразіемъ силъ соединимо предположеніе, что во всѣхъ этихъ различныхъ силахъ содержится единая всеобщая сила, т.-е. механическая сила, и въ нѣкоторой мѣрѣ дана во всякомъ проявленіи специфическихъ силъ. Идея, что количество механической силы, дѣйствующее такимъ образомъ во всѣхъ причинахъ явленій и образующее фундаментъ всѣхъ дѣйствій въ природѣ, подобно матеріи должно быть чѣмъ-то не увеличивающимся и не уменьшающимся; идея эта тотчасъ же является, какъ только будетъ взято въ помощь основное представленіе, что механическая сила не возникаетъ изъ ничего. Но это послѣднее основное представленіе опять-таки само неизбѣжно, какъ скоро механическая сила полагается какъ то послѣднее, во что разрѣшаются всѣ процессы въ природѣ.

Разъ эта идея серьезно принята, то механика со своими принципами становится реальною основною наукою. Въ такомъ разѣ область механики простирается на столько, на сколько самыя явленія, и нѣтъ ни одного процесса, о которомъ нельзя бы было спросить, каковы механическія посылки его возможности. Хотя на эти вопросы пока можно дать отвѣты только въ немногихъ случаяхъ, и хотя даже эти отвѣты не могутъ быть полнымъ объясненіемъ разсматриваемаго каждый разъ явленія, тѣмъ не менѣе, съ подобнымъ способомъ разсмотрѣнія все же связывается нѣкоторое соображе-

ніе о послѣднемъ ощутимомъ основаніи фактически даннаго. Мы имѣемъ о процессѣ весьма недостаточное представленіе, когда не знаемъ о немъ ничего кромѣ того, что для его произвожденія послужило извѣстное количество матеріи. Мы будемъ знать уже нѣсколько больше, когда будемъ знать количество механической силы, которое потребно было для произвожденія тѣхъ измѣненій, какія этотъ процессъ представляетъ. Но и этимъ еще не дано будетъ познаніе разнообразія формъ, но какъ бы лишь матеріалъ, изъ котораго эти формы образовались. Отсюда слѣдуетъ, что колоссальное распространеніе механическаго способа пониманія, связаннаго съ этою новою точкою зрѣнія по изслѣдованію всякаго рода силъ, не должно ложно истолковываться въ томъ смыслѣ, что будто бы всякое болѣе опредѣленное познаніе естественныхъ процессовъ исчерпывается одною механикою.

Принимая въ соображеніе вышесказанное ограниченіе, можно сказать, что начиная приблизительно съ 1842 г. механика вступила въ эпоху, въ которой ея принципы стремятся къ завоеванію всей области явленій природы и въ отношеніи своей компетенціи не допускаютъ никакихъ исключеній. Открытіе механическаго эквивалента теплоты хотя и стало пограничнымъ столбомъ между областями болѣе узкой и болѣе широкой концепціи механики природы, но было бы заблужденіемъ смотрѣть на это открытіе и на распространеніе общихъ, связанныхъ съ нимъ, представленій о силовомъ дѣйствіи лишь какъ на основаніе для дальнѣйшаго, а не какъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, и на плодъ прежняго, уже давно стремящагося къ завершенію, развитія. Нахожденіе механическаго силового выраженія для характеристики тепловаго дѣйствія и пониманіе этого послѣдняго дѣйствія какъ механическаго молекулярнаго отношенія, во всякомъ случаѣ, были фактами, составившими эпоху; но положительное направленіе, въ которомъ и заключалось это, составляющее эпоху, свойство, было подготовлено общимъ ходомъ представленій. Отсюда же объясняется и то, что позднѣе, когда это новое воззрѣніе имѣлось на-лицо въ болѣе совершенной формѣ, можно было указать и его историческій прологъ, и что вниманіе было обращено и на такія болѣе старыя идеи, на которыя въ эпоху перваго ихъ появленія вообще не обращали вниманія.

Чтобы воспроизвести естественную послѣдовательность этихъ научныхъ событій, мы должны начать не съ только что указанныхъ, лишь частныхъ, приближеній, но съ того положенія дѣла, когда впервые раскрылось ясное, несомнѣнное и совершенное выраженіе новыхъ идей и фактовъ. Хотя и эта форма новаго воззрѣнія привлекла общее вниманіе не сразу, то позднѣе все-таки она была

признана первою положительною основою, а сверхъ того и при дальнѣйшемъ развитіи, благодаря своему виновнику, привела къ выраженію тѣхъ концепцій, которыя всего важнѣе для изъясненія общихъ механическихъ принциповъ. Въ виду этого, мы начнемъ съ работъ Ю. Р. Майера изъ Гейльбронна и лишь впослѣдствіи упомянемъ о болѣе старыхъ идейныхъ побѣдахъ, равно какъ и вообще о все большемъ и большемъ обобщеніи предварительныхъ концепцій о сохраненіи силы.

175. Юліусъ Робертъ Майеръ (1814—78) напечаталъ въ майскомъ номерѣ *Анналь химіи и фармаціи* за 1842 г. ¹ статью подъ заглавіемъ «Замѣчанія о силахъ неодушевленной природы» ², въ которой дана числовая величина механическаго эквивалента теплоты и выведена такъ кратко, что относящееся сюда мѣсто мы можемъ привести буквально. Рѣчь идетъ объ изъясненіи слѣдствій изъ основоположенія, что дѣйствіе должно быть равно причинѣ, касательно связи и количественнаго отношенія между теплотою и механическою силою, причемъ все выражено слѣдующими опредѣленнѣйшими словами и понятіями: «Примѣняя установленныя положенія къ тепловымъ и объемнымъ отношеніямъ газовъ, находимъ, что паденіе сжимающаго газъ ртутнаго столба равно освобожденному сжатіемъ количеству теплоты, а отсюда слѣдуетъ, — полагая, что показатель отношенія емкостей атмосфернаго воздуха при постоянномъ давленіи и постоянномъ объемѣ равенъ 1,421, — что паденію груза съ высоты около 365 м. соотвѣтствуетъ нагрѣваніе равнаго вѣса воды отъ 0° на 1°».

Небольшая статья, въ концѣ которой вышеприведеннымъ образомъ констатировано механическое силовое значеніе теплоты, а также достаточно ясно набросана и метода нахожденія относящагося къ нему числа, имѣла предметомъ опредѣленіе яснаго понятія о силѣ. Преслѣдуя задачу, — столь же недвусмысленно оформить представленіе о силѣ, какъ недвусмысленно понятіе о матеріи, авторъ пришелъ къ нѣкоторымъ формальнымъ измѣненіямъ обычнаго способа воззрѣнія, которыя, помимо механическаго эквивалента теплоты, имѣютъ интересъ и въ отношеніи концепціи самыхъ общихъ принциповъ механики. Но какъ, сверхъ того, они образовали и первыя послылки, изъ которыхъ была выведена необходимость механи-

¹ Изд. Вѣлеромъ и Либихомъ, Т. 42, стр. 233 и сл.

² Также отпечатана въ собраніи Майеровскихъ статей: „Механика теплоты“, Штуттгартъ 1867, стр. 3—12. 2-е изд. (1874) кладетъ въ основаніе вычисленій нѣсколько иное числовое значеніе эквивалента, именно 425 вм. 365 и отличается только прибавленіемъ „Естественнонаучныхъ лекцій“, появившихся отдѣльно только въ 1871 г.

ческой эквиваленціи всѣхъ явленій, то мы имѣемъ двоякое основаніе изслѣдовать ихъ съ особенною тщательностью.

По Майеру, сила есть объектъ, остающійся неразрушимо тождественнымъ въ различныхъ формахъ явленій, слѣдовательно, несмотря на какія угодно качественныя измѣненія. Во главѣ поставлено основоположеніе: *causa aequat effectum*. Это равенство между причиною и дѣйствіемъ онъ разумѣетъ какъ въ понятіи, такъ и количественно. Причина сохраняется въ дѣйствіи и остается въ послѣднемъ причиною въ своемъ родѣ. Когда сила дѣйствуетъ, то это дѣйствіе опять есть сила, и качественное измѣненіе, состоящее въ различіи формъ проявленія, совсѣмъ не касается главной вещи, т.-е. тождественно лежащаго въ основѣ объекта и его количества. Если это равенство между причиною и дѣйствіемъ или вообще между многообразными членами каузальнаго ряда явленій точнѣе примѣнить къ извѣстнымъ формамъ механической силы, то оно приметъ слѣдующій видъ. Поднятіе груза есть дѣйствіе нѣкоторой силы; если грузъ находится на данной ему такимъ образомъ высотѣ, то такое его отношеніе есть лишь иная форма силы. Грузъ можетъ, затѣмъ, упасть, и такъ какъ онъ, — если отвлечься отъ противоположнаго груза, — съ причиною этого необходимаго паденія находится въ извѣстной системной связи, то эта связь или это отношеніе само будетъ представлять силу, форма которой порождается поднятіемъ и которая снова можетъ превратиться въ движеніе паденія. Силу, которою можно располагать при данномъ разстояніи между тяготеющими предметами, Майеръ называетъ силою паденія, желая это выраженіе противопоставить тѣмъ представленіямъ, которыя съ словомъ тяжесть соединяютъ свойство, присущее тѣламъ при всякихъ обстоятельствахъ. При этомъ, основная мысль его та, что пространственный промежутокъ или, какъ онъ выражается, «пространственная разность» есть необходимое предварительное условіе существованія силы въ этой формѣ или, специальнѣе, силы паденія.

Итакъ, согласно Майеровскому способу представленія, сила паденія и движеніе суть двѣ формы проявленія одного и того же предмета, именно механической силы вообще. Поднятіемъ груза сила переводится въ форму силы паденія, а эта послѣдняя опять можетъ превратиться въ движеніе. Если спросить и о томъ третьемъ, что могло бы образовать форму существованія силы тамъ, гдѣ движеніе, какъ такое, исчезаетъ, то отвѣтъ, на основаніи самыхъ обыкновенныхъ наблюденій, а именно надъ теплотою отъ тренія, былъ бы тотъ, что этою третьею формою можетъ быть теплота. Не безынтересно, что Майеръ, напротивъ того, прямо заявляетъ, что, за исключеніемъ лучистой теплоты, онъ вообще не смотритъ

на теплоту какъ на движеніе. Съ его способомъ воззрѣнія связано противоположное предположеніе, а именно, что форма движенія, какъ такого, должна прежде исчезнуть, чтобы могла появиться теплота. Этотъ взглядъ встрѣчаемъ и въ позднѣйшихъ его сочиненіяхъ¹. Представленіе, что разрѣшеніемъ всѣхъ тепловыхъ процессовъ и тепловыхъ состояній въ молекулярное движеніе данъ ключъ къ пониманію механики теплоты, въ настоящее время такъ распространено, что съ исторической точки зрѣнія важно не упустить изъ виду противоположныхъ Майеровскихъ воззрѣній. Иначе можно бы было остаться при одностороннемъ мнѣніи, будто бы теорія эквиваленціи и вообще вся механическая теорія теплоты обязана своимъ происхожденіемъ успѣхамъ волнообразной теоріи свѣта.

176. Виновникъ открытія механическаго эквивалента теплоты, какъ мы отчасти уже видѣли, прежде всего подвергъ критикѣ понятіе силы и относящіяся къ нему основныя механическія представленія, и впослѣдствіи обстоятельнѣе обосновалъ болѣе раннія представленія². Въ этихъ позднѣйшихъ работахъ онъ хочетъ къ Ньютоновскому понятію (ускорительной) силы, нынѣ на обыкновенномъ языкѣ научной механики называемой просто силою, и къ понятію живой силы присоединить еще третье формулированіе, которое имѣло бы преимущество всеобщности и даже допускало бы вполнѣ строгое изложеніе элементовъ механики и соотвѣствующихъ частей физики безъ примѣненія дифференціальныхъ и интегральныхъ понятій. Эта третья концепція, какъ показываетъ ближайшее изслѣдованіе, есть аналогонъ и обобщеніе прежде всего въ прикладной механикѣ ставшаго обычнымъ понятія механической работы, но слѣды его существовали и ранѣе въ измѣреніи силы по высотѣ паденія или поднятія и, если угодно, ихъ можно найти уже у Декарта, въ его идеяхъ объ оцѣнкѣ силы. Обыкновенно механическую работу выражаютъ произведеніемъ вѣса на пройденное пространство; или вообще работа состоитъ въ прохожденіи пространства подѣ дѣйствіемъ опредѣленной силы на опредѣленную массу. Если сопротивленіе есть сила постоянная, развивающаяся по обыкновенной схемѣ силового дѣйствія и какъ бы накапливающая свое дѣйствіе, то понятіе работы еще совершенно просто, все равно о какой бы силѣ рѣчь ни шла. Но какъ скоро сила не постоянна и сама непрерывно измѣняется какъ функція разстоянія, т.-е. пробѣгаемаго подѣ ея вліяніемъ пространства, то понятіе работы должно

¹ Замѣчанія о механическомъ эквивалентѣ теплоты, 1851, также въ сборникѣ: *Механика теплоты* (1867), стр. 279.

² Ibid. стр. 258—278.

быть приноровлено къ этому новому отношенію и. слѣдовательно, обобщено. Итакъ, здѣсь снова является представленіе о силѣ паденія, уже охарактеризованной въ предыдущемъ §, которую Майеръ мыслилъ какъ функцію разстоянія и даже прямо представлялъ себѣ какъ предметъ, которымъ можно располагать и его расходовать. Если разсматривать двѣ тяготящія массы въ двухъ различныхъ разстояніяхъ одну отъ другой, то, по Майеру, переходъ отъ одного положенія къ другому есть перемѣна формы силы. Если большее разстояніе превращается въ меньшее, то сила въ формѣ первоначальной силы паденія истрачивается на такую свою часть, которая соотвѣтствуетъ пространству, на какое уменьшилось разстояніе. Эта трата пространства есть интересный способъ представленія, столь у нашего автора своеобразный, что содержащееся въ немъ уклоненіе отъ традиціонныхъ способовъ воззрѣнія слѣдуетъ тщательно отмѣтить. На первый взглядъ кажется, что практически оно не имѣетъ никакого значенія и въ главномъ дѣлѣ фактически ничего не измѣняетъ; и тѣмъ не менѣе, это—формально рѣшающее направленіе, на которое опирается новый способъ изслѣдованія. Въ самомъ дѣлѣ, сила паденія, если разсматривать ее со стороны статическихъ понятій, не есть мгновенное тяготѣніе или, другими словами, не есть взаимное тяготѣніе двухъ тѣлъ, имѣющее силу только для мгновеннаго мѣста, въ одномъ этомъ положеніи, но обнимаетъ совокупность всѣхъ побудовъ, которые развиваютъ свое дѣйствіе отъ одного положенія до другаго, слѣдовательно, во время пробѣга опредѣленнаго пути. Только въ отношеніи къ подобному расходу пространства говорится о силѣ паденія, и эта сила строго различается отъ результата ея развитія. Результатъ этотъ, согласно обыкновеннымъ понятіямъ механики, есть накопившаяся скорость, т.-е. живая сила. Итакъ, когда Майеръ говоритъ объ уравненіи между силою паденія и движеніемъ, то онъ разумѣетъ обобщенный аналогонъ того, что иначе называютъ уравненіемъ работы. Въ этомъ послѣднемъ уравненіи въ одной части находится работа, т.-е. произведеніе груза на высоту подъема, а въ другой части половина живой силы, т.-е. половина произведенія массы на квадратъ скорости. Если обобщить понятіе работы въ этомъ уравненіи, приспособивъ его къ силамъ, измѣняющимся съ разстояніями по какому угодно правилу, то въ одной части получимъ выраженіе силы въ видѣ функціи массъ и пространствъ, а приравнявъ эту функцію накопленной живой силѣ, выразимъ отношеніе между обѣими формами силы. Поэтому, особенность понятія силы паденія состоитъ въ томъ, что непосредственно соображаются съ первымъ и со вторымъ разстояніемъ, не вводя

разсмотрѣнія моментальнаго тяготѣнія, существующаго для данной точки, которое собственно и называется силою и для мгновѣнія разсматривается какъ величина постоянная, тогда какъ, говоря строго, оно существуетъ лишь для момента времени, слѣдовательно, постояннымъ не бываетъ даже для какъ угодно малаго промежутка времени. Стремленіе дать силовое понятіе въ конечной формѣ и актуально, а не просто какъ дифференціальное частное и гипотетически какъ постоянное въ теченіе единицы времени, очевидно, породило то направленіе, которое разсматриваетъ само разстояніе какъ форму существованія силы, а потребленіе этого разстоянія характеризуетъ какъ форму превращенія силы. При этомъ способѣ, какъ бы пространственно опредѣляемой, полной силы время вполне скрывается изъ виду и появляется въ уравненіи только во второй части, въ скорости. Израсходованная сила паденія или, согласно Майеровскому способу представленія и соотвѣтствующей терминологіи, потребленное разстояніе массъ можно возстановить, израсходовавъ результатъ въ противоположномъ направленіи, и такимъ образомъ воспроизвести первоначальную форму существованія силы. Новаго въ этихъ формахъ мыслей, очевидно, только и есть, что представленіе о превращеніи и понятіе о различныхъ формахъ проявленія одного и того же чего-то, котораго количество и общій механическій характеръ остаются себѣ равными, тогда какъ болѣе опредѣленные отношенія мѣняются. Это нѣчто есть то, что Майеръ просто желалъ бы называть силою, и что, въ отличіе отъ двухъ другихъ силовыхъ понятій и для постиженія въ разсматриваемой здѣсь зависимости для мгновѣнія, можно бы было назвать полною силою. Въ самомъ дѣлѣ, эта интегральная сила, если соразмѣрять понятіе о ней съ обычными и узаконенными способами представленія, есть ничто иное какъ интеграль рядъ мгновенныхъ напряженій, какія должно имѣть тяготѣніе по закону Ньютона для всѣхъ точекъ разстоянія, проходимаго двумя массами навстрѣчу другъ другу. Особую цѣнность придаетъ Майеръ своей идеѣ конечности, которая для этой совокупной силы имѣетъ мѣсто даже и при безконечности пространства, ибо даже въ случаѣ паденія изъ какъ угодно удаленнаго мѣста на поверхность нѣкотораго міроваго тѣла существуетъ извѣстный опредѣленный предѣлъ послѣдней конечной скорости. Выставленіе на видъ этой мысли, во всякомъ случаѣ, необходимо для принциповъ и именно въ изложеніи элементовъ физики. Но для новаго способа воззрѣнія представленіе силы природы, какъ нѣкотораго опредѣленнаго количества, есть идея фундаментальная. Контрастомъ этому воззрѣнію служитъ фикція причинъ неисчерпаемаго производенія конечныхъ количествъ силы, тогда какъ на

дѣлѣ сама сила, подобно матеріи, есть количество конечное, которое можетъ измѣнять только форму своего проявленія и изъ одной формы и мѣста дѣйствія переходить въ другую форму дѣйствія и въ другое мѣсто. Не представленію о превращеніи вообще, а особой формѣ его впослѣдствіи противопоставлена будетъ критическая точка зрѣнія старой основательной и ясной механики. Здѣсь пока замѣтимъ, что сила паденія, если представлять себѣ ее ясно, содержитъ въ себѣ просто мысль о возможности паденія. Но эту возможность паденія, очевидно, нельзя рассматривать какъ механическую аффекцію тѣла, съ нимъ связанную, наприм. на подобіе скорости. А такъ поступали всѣ тѣ, кто, какъ на первыхъ порахъ англичане, вмѣстѣ съ эквивалентомъ заимствовали у Майера и силу паденія, и пустили въ обращеніе понятіе о ней подъ именемъ потенциальной энергіи, яко бы какъ свою оригинальную концепцію. Но объ этомъ уклоненіи подробнѣе поговоримъ послѣ характеристики общихъ положительныхъ слѣдствій Майеровскаго исходнаго пункта!

177. Поскольку очерченныя нами Майеровскія представленія остаются въ области общихъ формъ мысли и поскольку, въ частности, они касаются существованія и опредѣленной числовой величины механическаго силоваго значенія теплоты, они мало по малу сдѣлались общимъ достояніемъ. Мѣткія выраженія, какъ единство силъ природы, соотношеніе физическихъ силъ, сохраненіе силы, неразрушимость силы и т. п. суть лишь различные намеки на мысль, которая еще въ 1842 г. была точно и вмѣстѣ съ тѣмъ универсально развита въ Майеровской статьѣ. Теплота давала только частный случай для уже возможнаго примѣненія закона опредѣленнаго силоваго значенія всѣхъ формъ явленій; но, какъ того требовалъ спекулятивный исходный пунктъ автора, онъ уже съ самаго начала имѣлъ въ виду весь кругъ естественныхъ силъ. Численная же величина эквивалента была настоящимъ открытіемъ, и безъ него можно бы было еще цѣлыя столѣтія разсуждать о единствѣ или сохраненіи силы, никого окончательно не убѣждая. Если же долгое время спустя послѣ Майеровскаго открытія добавочныя разсужденія общаго и неопредѣленнаго характера нерѣдко сходили за главное дѣло, то виною этому отсутствіе пониманія дѣла у публики. Но уже совсѣмъ комично, когда даже простое и къ тому же не только не оригинальное, а тривиальное и ошибочное соучастіе въ подобныхъ шаткихъ изслѣдованіяхъ ¹ смѣшивается съ изображеніемъ мысли и даже съ самимъ открытіемъ.

¹ Однимъ изъ таковыхъ была, наприм., статья г. Гельмгольца «О сохраненіи силы» (Берлинъ, 1847), въ которой встрѣчается эквивалентъ Джоула, разбирается множество маловажныхъ работъ, но не упоминается о Р. Майерѣ. Потому, если

Во всякомъ случаѣ, безусловно должно признать, что Майеръ не только открытіемъ эквивалента, но и прямо своимъ оригинальнымъ способомъ пониманія силъ природы произвелъ такой переворотъ въ

что въ ней и обращаетъ на себя вниманіе, то это—новыя слова для давнымъ-давно извѣстныхъ вещей, какъ, наприм., для уравниенъ живыхъ силъ, при чемъ вмѣсто Ньютоновскаго термина «движущая сила» встрѣчаемъ выраженіе *Spannkraft*, а сверхъ того соотвѣтствующая ему вещь понимается дифференціально-ошибочнымъ образомъ. Что касается замалчиванія о Майерѣ профессорами, то можно констатировать забавныя вещи въ этомъ родѣ, имѣвшія мѣсто годами 10-ю или 15-ю позднѣе. Берлинскій профессоръ физики Поггендорфъ пишетъ въ своемъ биогр.-лит. лексиконѣ по исторіи точныхъ наукъ (2 т. Лейпцигъ, 1863 г.) въ крайне скудной замѣткѣ о Майерѣ буквально: «Кажется, около 1858 г. умеръ въ домѣ умиленныхъ («*Augsb. Всеоб. Газета*»), а въ концѣ тома исправляетъ это извѣстіе такъ: «Не умеръ (какъ значится въ «*Augsb. Газетѣ*») 1858 г. въ домѣ умиленныхъ, но (1862) еще живъ». Естественно, для профессора профессорская газета была авторитетнымъ источникомъ. «*Augsb. Всеоб. Газ.*», какъ профессорскій органъ, еще почти за 10 лѣтъ до ложнаго извѣщенія о смерти Майера, а именно въ Приложеніи отъ 21 мая 1849 г., предостерегала публику касательно «мнимаго открытія г-на д-ра мед. Майера» и указывала на него какъ на неспециалиста-диллетанта, замѣчая, что вдаваться въ сго изслѣдованія специалистамъ нѣтъ болѣе надобности, такъ какъ-де «несостоятельность его дедукцій уже достаточно освѣщена научными органами». На дѣлѣ, злоба и зависть профессоровъ къ такъ называемому диллетанту, извлекшему на свѣтъ Божій главный фактъ физической науки 19-го столѣтія, не покажется странною, а напротивъ вещью самопоятною всякому, кто хорошо знакомъ съ особенностями этого вида. Позднѣе эта тактика слуховъ о духовной и тѣлесной смерти Майера превратилась въ тактику замалчиванія, елико это возможно, и сплошь неуважительныхъ отзывовъ и упоминаній, ибо въ отношеніи къ публикѣ, состоящей не изъ однихъ университетскихъ профессоровъ, да притомъ ставшей догадливѣе, прежніе пріемы уже не удавались. Въ заключеніе можно надѣяться, судя по дѣйствию, оказанному изображеніемъ Майера въ 1 изданіи этого сочиненія (1873), что едва ли какая тактика, клонящаяся къ умаленію его заслугъ, будетъ еще имѣть успѣхъ.

И случившійся въ 1877 г. инцидентъ въ Берлинскомъ университетѣ по поводу 2-го изданія этого сочиненія, и именно по поводу сказаннаго въ настоящемъ примѣчаніи о г-нѣ Гельмгольтцѣ, причемъ въ этой выноскѣ, какъ и въ первомъ изданіи, просто констатировано было умолчаніе о Майерѣ въ Гельмгольтцевскомъ мемуарѣ, — инцидентъ этотъ, несмотря на удаленіе автора изъ университета, повелъ только къ тому, что публика стала яснѣе и правильнѣе оцѣнивать заслуги Майера. Авторъ, разъ принявшись за дѣло, потратилъ на него много усилій и, какъ устно въ лекціяхъ, такъ и въ особыхъ сочиненіяхъ, извлекъ на свѣтъ всѣ обстоятельства дѣла, освѣтивъ его всесторонне съ точки зрѣнія совершенно общихъ, непреходящихъ интересовъ. Первымъ шагомъ въ этомъ направленіи послѣ изгнанія автора является 4-я глава его Новыхъ основныхъ законовъ физики и химіи (1878), гдѣ напечатано и для житейскихъ отношеній небезынтересное письмо Майера. Но общее выраженіе всемірно-историческихъ интересовъ человечества дано въ сочиненіи „Робертъ Майеръ, Галилей 19-го столѣтія. Его судьба и введеніе къ изученію его трудовъ (1880)“. Руководящая основная мысль его, это — контрастъ между Майеромъ и кoterією ученыхъ, — контрастъ, вообще существующій между свободными изслѣдователями и испор-

образѣ мыслей, котораго значеніе доселѣ опредѣлено далеко не въ полной мѣрѣ. Этотъ гейльброннскій врачъ въ своихъ немногихъ и краткихъ статьяхъ, не говоря уже о собственномъ его открытіи, столько сдѣлалъ для простаго и яснаго, соединяющаго научную строгость съ благородною популяризацией, пониманія природы, что возбуждающую силу его гениальнаго способа концепціи и изложенія едва ли могутъ серьезно умалить примѣсь теистической метафизики и черты религіозной сентиментальности, выступившія въ послѣднемъ его произведеніи¹. Что же касается внутреннихъ качествъ его руководящаго понятія, то указанія, данныя въ концѣ предыдущаго §, не могутъ упразднить главнаго значенія и ядра дѣла. Послѣднее состояло въ наведеніи моста между различными способами дѣйствія одного и того же механическаго агента. Если при этомъ одно изъ посредствующихъ понятій оказалось неправильнымъ и приняло характеръ фикціи, то это заблужденіе коренилось въ обстоятельстве, что къ услугамъ не было физической теоріи тяжести. Несмотря на это, результатъ поднятія груза должно было представлять себѣ какъ отдѣльный итогъ, и притомъ какъ нѣкоторую силу. Потому-то это понятіе и было лишено ясности и дало доступъ нѣкотораго рода мистицизму силовыхъ формъ. Чтобы перекинуть мостъ и возстановить, надлежащими вставками, непрерывность процессовъ, нужно было придумать нѣчто третье. Но это третье есть ничто иное, какъ абстрактная случайность паденія, и потому, какъ особая силовая форма, не существуетъ. Механика, чтобы быть критическою, кромѣ массовой скорости и работы не должна признавать еще никакихъ простыхъ формъ и функцій силы. Майеровская неясность, что очень комично, сдѣлалась лозунгомъ для послѣдующаго времени и остается имъ почти полустолѣтіе. Рядомъ съ истинною похитили у Гейльброннскаго изслѣдователя и его заблужденіе и пустили его въ оборотъ, какъ собственный капиталъ. Объ этомъ свидѣтельствуетъ пустая фикція потенциальной энергіи, которая все болѣе и болѣе входила въ моду. Болѣе проникательная критика устранить этотъ вымыселъ, но болѣе общее Майеровское основное представленіе о превращеніяхъ одной и той же механической величины въ другія формы проявленія останется навсегда.

178. Какъ тождество земной тяжести съ силою, препятствующею небеснымъ тѣламъ двигаться по касательной, идеально и фактически установлено было просто изслѣдованіемъ надъ луною и,

ченнымъ сословіемъ ученыхъ, является-ли оно въ цеховыхъ, или государственныхъ, или общественныхъ учрежденіяхъ съ ложнымъ авторитетомъ, ложными задачами и вообще нездоровыми традиціями или интересами.—

¹ Въ сочиненіи «Естественнонаучныя лекціи» Штуттгартъ, 1871.

какъ и все остальное, было просто эмпирическимъ осуществленіемъ и повѣркою нѣкоторой, въ сущности, обеспеченной мысли, такъ и дальнѣйшее экспериментальное доказательство эквивалентности теплоты и механической работы въ различныхъ случаяхъ было просто подтвержденіемъ уже очерченной Майеромъ теоріи и его открытія. Начиная съ 1843 г. Джемсъ Прескоттъ Джоуль обнародовалъ группу опытовъ, которые всѣ давали для механическаго эквивалента довольно согласныя числа и не слишкомъ разнились отъ Майероваго результата, а истолкованіе ихъ — отъ соотвѣствующихъ представленій о превращеніи. Разница была только въ томъ, что Джоуль былъ главнымъ образомъ озабоченъ экспериментальными опредѣленіями и, не заботясь объ общей идеѣ превращенія, не пытался связать свои факты универсальною мыслью и далеко хватающею теоріей. Эксперименты англійскаго изслѣдователя сдѣлались общеизвѣстными ранѣе, нежели теорія и открытіе его нѣмецкаго предшественника, и этимъ объясняется, что Майеръ въ 1851 г. въ особомъ сочиненіи (Замѣтки о механическомъ эквивалентѣ теплоты) долженъ былъ оповѣстить о своемъ первенствѣ въ дѣлѣ открытія и его обнародованія ¹. Хотя намъ, въ нашихъ изслѣдованіяхъ о принципахъ и способахъ представленія въ механикѣ, и нѣтъ дѣла до деталей экспериментовъ, но все-таки замѣтимъ, что Джоуль въ теченіи нѣсколькихъ лѣтъ все еще намѣренно частію умалчивалъ объ открытіяхъ Майера, частію искажалъ его работы. Зная средства, при помощи коихъ Джоуль старался приписать себѣ открытіе, оспаривая права Майера, можно заключить и о способѣ, какимъ онъ хотѣлъ достигнуть открытія. Въ сочиненіи о Робертѣ Майерѣ, а отчасти уже и въ «Новыхъ основныхъ законахъ» (первая серія) я освѣтилъ особыя обстоятельства, позволяющія несомнѣнно заключить, что г. Джоуль присвоилъ себѣ открытіе Майера изъ его статьи 1842 г. и что лично ему принадлежатъ только болѣе грубые опыты, посредствомъ которыхъ ощутительно доказано было согласіе между количествомъ механическаго дѣйствія и соотвѣствующимъ количествомъ теплоты. Первая работа Джоуля, въ которой онъ даетъ механическій эквивалентъ, относится къ изслѣдованіямъ объ электромагнитныхъ тепловыхъ дѣйствіяхъ ². Въ концѣ второй

¹ Ср. Майеръ, *Механика теплоты* (1867), стр. 290: «Этотъ новый предметъ началъ привлекать на себя вниманіе ученыхъ. Но какъ у насъ и за границу его трактовали какъ исключительно чужое открытіе, то это вынудило меня заявить о моемъ приоритетѣ».

² *Philosophical Magazine*, vol. XXIII (1843): On the calorific effects of magneto-electricity, and on the mechanical value of heat (Послѣднее во 2-й части статьи). Различныя работы Джоуля появились въ нѣмецк. переводѣ подъ заглавіемъ: «Das mechanische Wärmeäquivalent». Braunschweig 1872.

части мемуара ¹ законъ формулированъ точнымъ образомъ, причемъ употреблено выраженіе «превратимостьъ теплоты и механической силы другъ въ друга» (*convertibility of heat and mechanical power into one another*). Впрочемъ объ этомъ способѣ представленія у Джоула сомнѣнія быть не можетъ; нѣтъ только идеальнаго выполненія и теоріи, какъ она дана была Майеромъ по отношенію къ неразрушимости силы и къ контрасту между формами явленія и входящимъ въ нихъ силовымъ матеріаломъ. Характеристичнѣе въ этомъ отношеніи уже своимъ заглавіемъ ² статья 1845 г., ибо выраженіе «обыкновенныя формы механической силы» уже даетъ намекъ, что и теплоту должно разсматривать какъ нѣкоторую форму механической силы. Треніе жидкостей, какъ источникъ теплоты, имѣло особое значеніе для новыхъ экспериментовъ, и разсматриваемые опыты дали поводъ также къ спеціальной статьѣ ³. Въ одной работѣ 1850 г. Джоуль далъ во введеніи ⁴ небольшой эскизъ фактовъ, которые, по его воззрѣнію, образовали бы основаніе исторической возможности и развитію доказательствъ эквиваленціи. По справедливости, нельзя оспаривать его воззрѣнія, что опыты Румфорда въ 1798 г. ⁵ представляли какъ бы начало лучшаго пониманія. Когда Румфордъ металлическимъ треніемъ посредствомъ металлическаго бурава въ нѣсколько часовъ заставилъ воду кипѣть и изъ этого опыта вывелъ представленіе, что передачу теплоты онъ не можетъ себѣ представить иначе, какъ посредствомъ движенія, то это былъ ранній и важный шагъ въ опроверженіе господствовавшаго предположенія, что теплота есть вещество; но, несмотря на вычисленія, здѣсь мы не находимъ даже отдаленнѣйшаго намека на идею механическаго эквивалента, т.-е. количества силы, соотвѣтствующаго единицѣ теплоты. Слѣдя далѣе за отчетомъ Джоула, въ которомъ данныя и эксперименты автора под конецъ выступаютъ на первый планъ, мы встрѣчаемъ достойное замѣчанія обстоятельство, именно, здѣсь указывается на Фарадеевскія электрохимическія воззрѣнія 1834 г. и дѣло ставится такъ, какъ будто бы химическое сродство образовало исходный пунктъ для мысли объ эквивалентности теплоты и силы. Хотя о первой статьѣ нѣ-

¹ Philosophical Magazine Ibid. стр. 441.

² Ibid. vol. XXVII (1845): On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power.

³ Ibid. vol. XXXI (1847): On the mechanical equivalent of heat, as determined by the heat evolved by the friction of fluids.

⁴ Philosophical Transactions (1850): On the mechanical equivalent of heat, стр. 61 и сл.

⁵ Philosophical Transactions за 1798 г., стр. 80—102: An inquiry concerning the source of the heat which is excited by friction.

мецкаго открывателя и упоминается, но лишь вообще, какъ будто бы онъ шелъ по пути Румфордовскихъ идей, и притомъ касательно обстоятельства второстепеннаго, а именно замѣтки о произведеніи теплоты треніемъ жидкостей. Что же касается главнаго дѣла, т.-е. того факта, что Майеръ уже далъ и числовую величину эквивалента и методъ ея опредѣленія, то объ этомъ у Джоула мы ничего не находимъ, напротивъ, о главномъ дѣлѣ умалчивается и вмѣсто того подсовывается сказанное второстепенное обстоятельство, которое въ той именно Майеровской статьѣ, гдѣ говорится о главномъ дѣлѣ, было вплетено мимоходомъ.

Въ то время какъ англійскій экспериментаторъ занимался установленіемъ эквивалента разнообразными опытами во всѣхъ направленіяхъ, нѣмецкій открыватель, для котораго истина дѣла и мѣровое опредѣленіе съ самаго начала были достаточно упрочены, началъ уже попытку распространенія новаго закона природы на различныя области примѣненія и притомъ такимъ путемъ, который привелъ къ теоріямъ, которыя позднѣе стали предметомъ общаго изслѣдованія. Слѣдующая статья его отъ 1845 г. «Движеніе въ органическомъ мірѣ въ его связи съ обмѣномъ вещества» ¹, съ одной стороны, распространяла далѣе общія физическія идеи, а съ другой — выводила физиологическія слѣдствія изъ этой новой концепціи. Сверхъ того, въ общихъ изслѣдованіяхъ этой статьи уже находимъ слѣды новаго примѣненія закона эквивалентности, примѣненія, исполненнаго тремя годами позднѣе въ сочиненіи «Изслѣдованія по динамикѣ неба» ². Это послѣднее сочиненіе трактуетъ главнымъ образомъ о томъ, что теперь называютъ метеорною теоріей солнечной теплоты, и разсматриваетъ вообще тепловые эффекты и тепловыя состоянія, производимыя космически механическими ударными дѣйствіями или вообще космическими двигательными дѣйствіями. Что касается теоріи метеоритовъ въ частности, то это есть представленіе, что пополненіе испускаемой солнцемъ теплоты обусловливается паденіемъ малыхъ космическихъ массъ. Образование теплоты ударами этихъ космическихъ тѣлъ, падающихъ на солнце съ огромною скоростью, повидимому, если судить по величинѣ тепловаго эквивалента механической силы, гораздо интенсивнѣе и рѣзче, чѣмъ могъ бы быть процессъ горѣнія соотвѣтствующихъ массъ въ образѣ обыкновеннаго для насъ произвожденія теплоты. Такимъ образомъ, чисто механическое дѣйствіе представляется какъ нѣчто такое, на что прежде всего слѣдуетъ обращать вниманіе, когда рѣчь идетъ объ

¹ Mayer, *Mechanik der Wärme* (1867), стр. 15—126.

² Ibid. стр. 149—234.

объясненіи самыхъ интенсивныхъ тепловыхъ процессовъ. Главнымъ же во всѣхъ этихъ изслѣдованіяхъ остается то, что установленіемъ эквивалента вносится мѣра въ представленія, которыя безъ этого были бы болѣе или менѣе безсодержательны. Только определенное знаніе тепловаго значенія механическихъ силовыхъ процессовъ могло привести къ мысли, что космически механическія дѣйствія могутъ имѣть рѣшительное значеніе для экономіи теплоты въ солнечной системѣ. Противъ всякой теоріи космическихъ ударовъ, какъ возможной причины возмѣщенія теплоты, я долженъ замѣтить, что вообще если и доказано, что въ историческія времена тепловое состояніе солнца не измѣнилось, то этимъ никакъ не оправдывается заключеніе, чтобы это замѣтнымъ образомъ существующее постоянство было точно и абсолютно, и что поэтому должно имѣть мѣсто возмѣщеніе. Всякія теоріи о возмѣщеніи, — а послѣ и кромѣ Майеровской появилось нѣсколько, и даже курьезныхъ, — всѣ такія теоріи до тѣхъ поръ будутъ преждевременны, пока не будетъ устранена возможность, даже вѣроятность, что вообще и по существу не имѣется никакого возмѣщенія. Всякій, кто желаетъ дѣлать количественную оцѣнку и кое-что вычислять, тотъ долженъ допустить, что внутри солнца господствуетъ столь высокая температура и такое громадное количество теплоты, что уменьшеніе ея лучеиспусканіемъ въ теченіе историческаго періода не могло быть замѣчено. Но разъ исходятъ отъ представленія возмѣщенія, то Майеровская метеорная теорія все еще представляетъ яснѣйшій отчетъ.

179. Послѣ того какъ уже прочно установленъ былъ механическій эквивалентъ теплоты и весь примыкающій къ нему способъ представленія, и рѣчь могла быть только о распространеніи его, а равно и о болѣе непосредственныхъ опытахъ для всесторонняго фиксированія соотвѣтствующаго числа, только послѣ этого началось вообще движеніе, имѣющее въ виду развитіе возможно всесторонне выполненной и всеобъемлющей механической теоріи теплоты. Начало стремленій этого рода можно довольно точно опредѣлить первыми годами второй половины нашего столѣтія. Что касается новыхъ идей, которыя значительно увеличивали бы механическіе фундаментальные принципы или основныя понятія, то прежде всего въ разсматриваемомъ циклѣ предпріятій ничего такого мы не встрѣчаемъ. Допущеніе, что превращеніе массоваго движенія въ механическую аффекцію молекулярнаго рода даетъ механически произведенную теплоту и что, наоборотъ, превращеніе молекулярнаго силоваго дѣйствія въ массовое движеніе представляетъ механическое дѣйствіе теплоты, сдѣлалось руководящимъ воззрѣніемъ. Гипотеза, что тепловыя явленія производитъ простая наличность или пере-

ходъ тепловой матеріи, была уже весьма рѣшительно отвергнута Румфордомъ и Дэви; но прошло почти полвѣка, прежде чѣмъ фактъ количественнаго установленія эквивалентности, восторжествовавшій надъ всѣми сомнѣніями и надъ всею старою традиціей, послужилъ сигналомъ къ попыткамъ создать полную теорію теплоты сообразно механическимъ точкамъ зрѣнія.

Тѣмъ страннѣе на первый взглядъ фактъ, что нѣкоторые писатели, какъ бы для того, чтобы перевернуть вверхъ дномъ всѣ спекуляціи о механикѣ теплоты, должны были взяться за одно небольшое сочиненіе, котораго авторъ въ своихъ размышленіяхъ имѣлъ въ виду ничто иное какъ тепловую матерію. Саді Карно (род. 1796, ум. 1832), въ своихъ «Размышленіяхъ о движущей силѣ огня» (Парижъ 1824) ¹, во всякомъ случаѣ, обнаружилъ много ума и вмѣстѣ съ тѣмъ развилъ общую, имѣющую большой интересъ, мысль; но болѣе точное изслѣдованіе показываетъ, что позднѣйшая, сдѣланная безъ всякой критики, примѣсь Карнотовскихъ способовъ представленія только повредила дѣлу механической теоріи теплоты. Главное изслѣдованіе Карно касалось экономіи паровой машины, и онъ своеобразно пытался представить себѣ, при какихъ обстоятельствахъ отъ развиваемой теплоты можно ожидать наибольшаго механическаго полезнаго эффекта. При этомъ онъ выходилъ изъ своеобразной мысли, именно изъ допущенія, что преодоленіе механическаго сопротивленія теплотою всегда можетъ зависѣть только отъ возстановленія нарушеннаго въ теплородѣ равновѣсія. При этомъ онъ представлялъ себѣ, что полезный механическій эффектъ достигается, когда теплота переходитъ отъ тѣла высшей температуры, чрезъ посредство нѣкотораго агента, въ частномъ случаѣ, — чрезъ посредство пара, къ тѣлу низшей температуры, наприм. въ водяной конденсаторѣ, или иначе, говоря въ смыслѣ его гипотезы теплоты какъ вещества, перетекаетъ въ это тѣло. Разница температуръ была для него существенною вещью, и онъ даже сравнивалъ дѣйствіе теплорода съ дѣйствіемъ падающей воды, такъ что при такомъ сравненіи переходъ отъ болѣе теплаго тѣла къ холоднѣйшему, смотря по тому, какова разность температуръ, долженъ былъ быть аналогиченъ паденію воды съ большей или меньшей высоты. Въ виду этого, онъ защищалъ воззрѣніе, что механическое дѣйствіе невозможно иначе, какъ когда теплородъ переходитъ отъ теплѣйшаго къ болѣе холодному тѣлу и при этомъ по пути приводитъ въ движеніе нѣкоторое, приспособленное къ тому, промежуточное тѣло.

¹ Эти, прежде столь рѣдкія въ продажѣ, *Réflexions sur la puissance motrice du feu* etc. снова появились въ *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 2 serie, т. I. Paris 1872, стр. 393—457.

Когда эта мысль, по установлении механическаго эквивалента теплоты, снова пущена была въ обращеніе и даже поставлена была рядомъ съ закономъ эквивалентности какъ второй основной законъ механической теоріи теплоты, то прямо обнаружилась путаница не только благодаря этому неоднородному сочетанію, но еще болѣе благодаря неясному способу его исполненія, и этой путаницѣ подпали тѣ именно ученныя головы, въ которыхъ больше всего недоставало порядка, вслѣдствіе новыхъ идей, порожденныхъ не ихъ ровнями ¹. С. Карно прямо высказался, что теплота совсѣмъ не поглощается, но что механическій эффектъ обусловливается восстановленіемъ нарушеннаго въ теплородѣ равновѣсія. Во всякомъ случаѣ, легко часть этой Карнотовской мысли сдѣлать независимой отъ гипотезы теплорода; но тогда окажется въ результатѣ не второй основной законъ механической теоріи теплоты, но общее механическое воззрѣніе, которое также могло бы получить нѣкоторую цѣнность для теоріи теплоты.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое механическое движеніе, которое не есть просто движеніе по инерціи, основывается на томъ, что въ его направленіи переносится механическая сила, и при томъ изъ источника, гдѣ она есть въ болѣшемъ количествѣ, на предметъ, въ которомъ можетъ развиваться лишь болѣе слабое сопротивленіе. Такимъ образомъ, всякое движеніе есть знакъ того, что въ направленіи его есть стремленіе къ восстановленію нарушеннаго равновѣсія. Итакъ, эта разность, о которой младшій Карно говорилъ какъ о существенной послылкѣ къ механической работѣ, и которая для него была ничѣмъ инымъ какъ разностью температуръ, имѣетъ мѣсто при всякомъ, преодолюющемъ сопротивленіе, силовомъ дѣйствіи. Въ виду этого, нѣтъ ничего удивительнаго, что теплота какъ молекулярное движеніе можетъ производить двигательныя дѣйствія только въ такомъ направленіи, гдѣ она не уравновѣшивается одинаково интенсивнымъ молекулярнымъ движеніемъ того же рода. Но вообще механическія дѣйствія имѣютъ также мѣсто и въ направленіи отъ болѣе холоднаго къ теплѣйшему тѣлу, при чемъ это настолько же необходимо, какъ и взаимность дѣйствія и противоѣдѣствія между двумя соударяющимися массами. Поэтому нѣтъ ни малѣйшаго основанія утверждать, чтобы въ этомъ отно-

¹ На нѣмецкой почвѣ особенно поучительный примѣръ новаго рода безаыицы даютъ „Статьи по механической теоріи теплоты“ Г. Клаузіуса. 2 тома, Брауншвейгъ 1864—67 (переработанныя появились въ 1876—79 подъ заглавіемъ «Механическая теорія теплоты»). Эта такъ называемая механическая теорія теплоты, если не говорить о примѣсахъ исследований по электричеству, есть ничто иное какъ развитіе карнотовскихъ идей. съ умолчаніемъ о ихъ виновникѣ, причемъ Карно-Клапейроновскіе результаты выдаются за Клаузіусовскіе.

шеніи появилось новое или даже плодотворное для теоріи теплоты возрѣніе. Напротивъ, слѣдуетъ назвать уклоненіемъ отъ прямого пути всякое взвинчиваніе подобныхъ аргѳсус, какъ о переходѣ отъ теплѣйшаго тѣла къ холоднѣйшему, — взвинчиваніе на высоту важной теоремы и даже, по происхожденію, равной закону эквивалентности. Затрудненіе, возникшее вслѣдствіе этого желанія—самое по себѣ еще весьма несовершенную, даже далеко еще не соответствующую своему имени и потому не въ мѣру притязательную, механическую теорію теплоты подновить чѣмъ-то такимъ, что выглядѣло бы обогащеніемъ ея матеріала,—это затрудненіе, вмѣстѣ съ легкомысліемъ нѣкоторыхъ, лишенныхъ критическаго такта, писателей, объясняетъ намъ это рѣдкостное смѣшеніе разнороднаго, одно другому никакъ не соответствующаго. Еслибы сочиненіе Карно не было прежде почти недоступнымъ, то своевременно нашлись бы и критики и выступили бы противъ этихъ ложныхъ и туманныхъ ссылокъ на него. Несмотря на множество книгъ съ хвастливымъ и многообѣщающимъ заглавіемъ «Механическая теорія теплоты», въ которыхъ разрабатываются частію экспериментальная сторона дѣла, частію аналитическій схематизмъ, все-таки еще рано говорить объ общей теоріи, которая въ существенныхъ направленіяхъ была бы удовлетворительна и хватала бы дальше Майеровскихъ основаній, а особенно о такой, которая сплошь основывалась бы на ясныхъ механическихъ основныхъ понятіяхъ.

Впрочемъ, чтобы ориентироваться въ вопросахъ теоретической физики теплоты, въ которой мы кое-чѣмъ обязаны идеямъ Сади Карно и ихъ специализированію инженеромъ Клапейрономъ, можно дать мѣсто еще слѣдующимъ критическимъ замѣчаніямъ. Придуманное Карно циклическое измѣненіе состоянія и приведеніе къ тому же состоянію по объему и температурѣ, если исключительно примѣнять его къ идеальному газу, само есть идеальный проектъ, который можно приравнять математическому построенію, если только отказаться отъ всякихъ гипотезъ, а слѣдовательно и отъ матеріальной гипотезы, и положить въ основаніе только извѣстные законы газовъ въ формѣ, относящейся къ идеальнымъ газамъ. Чтобы получить непосредственно и безъ всякой неизвѣстной функціи тѣ количества теплоты, которыя приходятъ въ дѣйствіе при измѣненіяхъ состоянія, нуженъ Майеровскій эквивалентъ, и эта не трудная комбинація Карно-Клапейроновскихъ результатовъ съ Майеровскимъ эквивалентомъ въ первый разъ исполнена была однимъ изъ Томсоновъ и, какъ мнѣ кажется, какъ бы автоматически. Если предположить этотъ круговоротъ измѣненій въ газѣ, то легкое вычисленіе приведетъ къ теоремѣ, что количества теплоты, дѣй-

ствующія на прямомъ и обратномъ пути изотермически, т.-е. при постоянныхъ температурахъ, относятся какъ эти температуры.

Это—предложеніе фундаментальное, и отъ его обобщенія для всякихъ тѣлъ зависитъ все остальное, слѣдовательно, все содержаніе карнотики, всѣ ея теоремы и приложенія. Но Карно и дальнѣйшая карнотика могли перекинуть мостъ отъ идеальнаго газа ко всякому тѣлу не иначе, какъ путемъ неяснаго приложенія вышеупомянутой, также неясной, аксіомы о переходѣ теплоты. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы предложеніе объ отношеніи температуръ не имѣло бы мѣста, если относить циклъ къ произвольному тѣлу, какъ наприм. къ дѣйствительному газу или къ какому угодно, простому или сложному, состоянію агрегаціи, то, въ противоположность упомянутой аксіомѣ, можно бы было перенести теплоту, и притомъ въ неограниченномъ количествѣ, отъ тѣла низшей на тѣло высшей температуры. Для этого потребовалось бы только разсматривать сочетаніе идеальнаго газа съ подлежащимъ тѣломъ, и тотъ и другое,—какъ машины, при посредствѣ которыхъ приводятся въ обращеніе количества теплоты и работы въ предѣлахъ такой совокупной машины.

Какъ скоро такимъ образомъ найдено сказанное предложеніе о пропорціональности количества теплоты температурамъ для всѣхъ тѣлъ, хотя и въ высшей степени непрямымъ способомъ, а при посредствѣ неясной и неясно примѣненной аксіомы, то имѣется налицо все, что, кромѣ Майеровскаго эквивалента, но при этомъ въ сочетаніи съ нимъ, составляетъ существенныя воззрѣнія въ механической теоріи теплоты. Изъ этого предложенія выводится все остальное, и, если угодно, вмѣсто него во главѣ можно ставить различныя слѣдствія изъ него, какъ ему равнозначныя вещи. Поэтому, о второй главной теоремѣ механики теплоты не можетъ быть и рѣчи; то, что выдается за второй законъ, въ сущности всегда содержитъ все тотъ же Карно - Клапейроновскій выводъ предложенія пропорціональности или какую-либо дальнѣйшую разработку или преобразование его. Первоначальнѣйшее, простѣйшее и важнѣйшее преобразование есть Клапейроновская формула, выражающая количество теплоты, соотвѣтствующее какому угодно измѣненію состоянія при постоянной температурѣ. Ея ядро и типъ всего проще обнаруживается въ примѣненіи къ скрытой теплотѣ расширенія. Если обозначить буквою Q количество теплоты, понимая его какъ количество силы и потому не умножая на механическій эквивалентъ E , то получится въ высшей степени простое соотношеніе:

$$dQ = T \frac{dp}{dt} dv, \text{ или же } \frac{dQ}{dv} = T \frac{dp}{dt}.$$

Произведеніе $T \frac{dp}{dt}$ есть истинное ядро Клапейроновской формулы.

Для ближайшаго ознакомленія съ предметомъ я долженъ отослать къ «Новымъ основнымъ законамъ», II (1886), ибо Клапейроновская формула, въ виду неясности способа вывода, а также и потому, что для нея доселѣ не было яснаго, истиннаго и непосредственнаго механическаго принципа, требуетъ большой осмотрительности. Сюда присоединяется еще и то, что воспріемникамъ этого дѣла захотѣлось сдѣлать видъ, что они яко бы указали и еще кое-что, а для этого они постарались и безъ того темный предметъ затемнить еще больше, чтобы скрыть свое ничтожество подъ покровомъ туманной путаницы.

Итакъ, укажемъ здѣсь кратко дѣйствительное содержаніе предмета. Клапейроновскую формулу, исправленную въ смыслѣ Майеровскаго эквивалента, какъ и теорему о пропорціональности, причемъ одна можетъ быть выведена изъ другой, можно разсматривать какъ вторую теорему, примыкающую къ Майеровскому предложенію объ эквивалентѣ. Важный для техники выводъ коэффиціента экономіи вытекаетъ отсюда же. Въ области техники, чисто въ сферѣ теоретической физики, дальнѣйшая механическая теорія теплоты, примыкающая къ другимъ слѣдствіямъ эквивалента, составляетъ ничто иное какъ область всяческихъ приложений Клапейроновской формулы. Различные варианты этой формулы даютъ прежде всего теплоту парообразованія какъ функцію измѣненія давленія. т. - е. какъ функцію отъ $\frac{dp}{dt}$, затѣмъ теплоту плавленія и, какъ уже упомянуто, скрытую теплоту расширения, и кромѣ того, для химическихъ процессовъ, скрытую теплоту диссоціаціи. Она должна быть примѣнима вообще ко всякому измѣненію состоянія, при которомъ температура остается постоянною. Вся эта область, расширяющая рамки теоретической физики, область, гдѣ специфическимъ направлениемъ мы обязаны Карно и Клапейрону, а реализаціей ея Майеровскому эквиваленту, имѣла бы еще большее значеніе, если бы всѣ разсматриваемыя отношенія не предполагали эмпирическаго заданія измѣненія давленія $\frac{dp}{dt}$. Но и такимъ образомъ область примѣненія Клапейроновской формулы все таки представляетъ отдѣлъ физики теплоты, имѣющій приблизительно механическій характеръ. Карно, вмѣстѣ съ примыкающими къ нему — Клапейрономъ, съ одной стороны, и Майеромъ, съ другой, дали уже все, что имѣетъ важность въ современной термомеханикѣ или, лучше сказать, въ механически оформленной термофизикѣ, и только почти само собою совершающееся амальгамированіе слѣдуетъ отнести на счетъ позднѣйшихъ, и прежде всего — англичанъ.

180. Возьмемъ опять въ руководство Майеровскій эквивалентъ

чтобы изслѣдовать, какимъ образомъ былъ отысканъ и разработанъ, въ видѣ втораго дополненія къ карнотикѣ, еще одинъ отдѣлъ старой теоріи, правда, крайне проблематическаго характера. Сюда, т.-е. къ кинетикѣ Бернулли, всего лучше приведутъ насъ нѣкоторыя предварительныя замѣчанія о томъ, какимъ образомъ то, что можно бы было назвать Майеровскимъ уравненіемъ эквивалента, имѣло естественнымъ основаніемъ газообразное состояніе агрегаціи. Въ самомъ дѣлѣ, первымъ и вмѣстѣ нормальнымъ случаемъ для ближайшаго представленія и опредѣленнаго вычисленія механическаго эквивалента теплоты былъ случай газовъ, какъ это доказывается вышеприведеннымъ Майеровскимъ положеніемъ. Если разность между количествомъ теплоты, производящимъ при постоянномъ объемѣ и, слѣдовательно, при усиленномъ давленіи, извѣстное повышеніе температуры, и количествомъ теплоты, какое при такомъ же повышеніи температуры и при постоянномъ давленіи измѣняетъ вмѣстѣ съ тѣмъ объемъ, слѣдовательно совершаетъ внѣшнюю работу, которую не трудно вычислить, если эту разность приравнять только-что упомянутой работѣ, то это уравненіе, въ сущности, и дастъ выраженіе обоюдной эквивалентности. Силовое значеніе теплоты и тепловое значеніе силы, натурально, даны однимъ и тѣмъ же уравненіемъ. Понятіе превращенія прежде всего означаетъ не иное что, какъ количественное отношеніе между обѣими формами явленій. Кромѣ того, въ понятіи этомъ заключается не просто мысль о причинномъ отношеніи, но, если всмотрѣться ближе, преимущественно мысль о тождественности, перешедшаго въ новую форму, силового матеріала или запаса силы. Внѣ границъ такого строгаго опредѣленія, выраженіе превращенія, какъ поучаютъ кое-какія злоупотребленія новыми идеями, весьма способно дать доступъ фантастическимъ измышленіямъ и шаткимъ или неяснымъ концепціямъ о естественныхъ процессахъ.

Прямо въ интересахъ механики не должно упускать изъ виду, что отношеніе эквивалентности первѣе всего и всего яснѣе можно было указать и прочно установить на газахъ. Газообразный составъ являетъ матерію и силы въ относительно свободномъ состояніи и уже позволяетъ, нѣкоторымъ образомъ, обозрѣть измѣненія данной такимъ образомъ механической системы въ отношеніи къ давленію и тепловымъ дѣйствіямъ и удовлетворительно выразить простыми эмпирическими законами. Однако, при этомъ не должно забывать, что внутреннія основанія этихъ законовъ, и уже Маріоттовскаго соотношенія между измѣненіями давленія и объема, все еще ведутъ къ различнымъ способамъ представленія о молекулярныхъ процессахъ.

Въ сферѣ механическихъ теорій теплоты даже снова выдвинули своеобразный способъ представленія Даниила Бернулли ¹, въ силу котораго частицы газа представляются прямолинейно движущимися во всѣхъ направленіяхъ, и напр. давленіе на стѣнки сосуда производятъ постоянно повторяющимися ударами. Этотъ авторъ воображалъ, что при измѣненіи разстояній между молекулами вслѣдствіе измѣненія объема измѣняется не только число распредѣленныхъ въ пространствѣ ударовъ, но и число ихъ повтореній, такъ что число ударовъ одной и той же молекулы должно возрастать съ уменьшеніемъ среднего разстоянія. Очевидно, въ силу такого возрѣнія, мы были бы вынуждены предположить въ газѣ, заключенномъ въ сосудѣ, безостановочную динамическую ажитацію, которая никоимъ образомъ не могла бы повести къ строгому равновѣсію и къ строгому покою, но зависѣла бы отъ безпредѣльнаго во времени сохраненія игры силъ, которую должно бы было уподобить безпредѣльному колебанію безъ тренія и иныхъ постороннихъ сопротивленій. Эта часть идеи несостоятельна, поскольку такимъ же точно образомъ и всякія состоянія равновѣсія и напряженія, слѣдовательно, вообще всякое непрерывное упраздненіе давленія или тяги можно бы было представлять себѣ разрѣшающимся въ колебанія. Другая же часть, относящаяся къ прямолинейнымъ двигательнымъ стремленіямъ всѣхъ молекулъ газа во всевозможныхъ направленіяхъ, есть не только весьма произвольная, но и такая гипотеза, при которой хаотическая безпорядочность немотивированныхъ направленій движенія должна заступать мѣсто систематическаго способа представленія двигательныхъ стремленій, согласующихся между собою по законамъ природы. Такъ называемая кинетическая теорія, которая, въ сущности должна относиться къ газамъ, но отчасти распространена и на жидкое состояніе агрегаціи, въ исторіи можетъ быть названа для краткости бернулликой, подобно тому какъ ту часть приблизительной термомеханики, которая основывается на механически неясномъ принципѣ о переходѣ теплоты, мы для краткости назвали карнотикой. Послѣ того какъ Майеръ вполне установилъ механическую сторону теплоты, недалеко было и до того, чтобы видѣть движеніе не только, какъ Майеръ, въ лучеиспусканіи теплоты, но и во всякой теплотѣ. Теоріи теплоты, какъ движенія, были распространены уже въ 17-мъ и 18-мъ столѣтіяхъ и, какъ кажется, только благодаря Блекковскому обращенію къ количествамъ теплоты были отодвинуты на второй планъ. Притомъ, всякая моторная теорія, если только она окажется хоть сколько-нибудь плодотворною, по всѣмъ

¹ Ижъ его Гидродинамики (1738), Sect. X, §§ 2 и 4.

вѣроятіямъ, можетъ разсчитывать на будущность. Но этимъ отнюдь не сказано, чтобы бернуллика и современная кинетика были бы или только могли бы быть тѣмъ, что отвѣчаетъ этимъ требованіямъ. Что касается обстоятельной критики бернуллики и новаго кинетизированія, изъ коихъ послѣднее ведетъ начало съ середины настоящаго столѣтія и развилось у англичанъ, особенно же непрigлядно выступило въ Германіи, въ видѣ разглагольствій, облеченныхъ въ математическую форму, я долженъ отослать къ «Новымъ основнымъ законамъ I и II (1878—86 г.)». Довольно запутанныя осложненія этого замысловато обставленнаго и во всякомъ случаѣ далеко еще незрѣлаго предмета, осложненія, явившіяся благодаря участію заурядныхъ дѣятелей, само собою понятно, дозволяютъ дать только общую характеристику, и для этого потребуется указать лишь нѣкоторые главные пункты.

Даніиль Бернулли обратилъ вниманіе на одно важное обстоятельство, что расширеніе молекулъ имѣетъ большое вліяніе на напряженіе теплоты, хотя его особый пріемъ вычисленія дѣйствія малыхъ ударовъ не выдерживаетъ критики. Впрочемъ, принятіе въ расчетъ размѣровъ молекулъ при оцѣнкѣ напряженій теплоты, какъ я доподлинно дозналъ новыми розысканіями по установленію моего закона промежуточныхъ объемовъ, уже тогда было дѣломъ традиціоннымъ и независимымъ отъ кинетическихъ представленій, т.-е. представленій, имѣющихъ въ виду прямолинейныя движенія и удары. Уже отецъ Даніила Бернулли вычислялъ объемы молекулъ, и даже Иванъ Бернулли правильнѣе смотрѣлъ на дѣло, чѣмъ его сынъ. А именно, онъ вычитаетъ объемъ молекулъ изъ всего объема ¹, — пріемъ, къ которому пришелъ и я, но при помощи опредѣленныхъ и доказательныхъ фактовъ, причемъ этотъ пріемъ образовалъ зародышъ закона промежуточныхъ объемовъ, обнимающаго всѣ состоянія агрегаціи, о чемъ можно читать въ «Новыхъ основныхъ законахъ».

¹ Мемуаръ на премію о сообщеніи движенія (въ Орега, Лозанна и Женева 1742, 4 тома, томъ 3-й); дополнительная статья объ основаніи упругости. Въ членахъ 37 и 38 послѣдней постоянный объемъ матеріи, при объясненіи крайнихъ давленій въ случаѣ Маріоттовскаго закона, вычитается изъ остальнаго объема. Только для случая воздуха отношеніе обоихъ объемовъ ложно принимается равнымъ $\frac{1}{15000}$, въ силу представленія, что частички должны бы были сплотиться,

какъ у золота, еслибъ онѣ образовали скученную массу. Впрочемъ, Иванъ Бернулли объясняетъ давленіе газа центробѣжной силою молекулъ, и потому выводитъ его не изъ прямолинейныхъ движеній и не изъ ударовъ, какъ дѣлалъ его сынъ. Подробности представляютъ произвольную путаницу и интересны развѣ какъ историческій курьезъ, вслѣдствіе предполагаемыхъ при этомъ молекулярныхъ вихревыхъ движеній по образцу декартовскихъ.

Менѣ основательно, чѣмъ Бернулли, даже прямо поверхностно относились къ дѣлу новомодные кинетики, занимаясь въ теченіе цѣлаго поколѣнія только идеальными газами и, сообразно этому, считая молекулы непротяженными точками. Лишь послѣ того какъ я въ своихъ «Новыхъ основныхъ законахъ» неодобрительно отзывался объ этомъ состояніи, явилось, какъ бы въ дополненіе, запоздалое и вначалѣ незамѣченное исключеніе ¹. Старая же, введенная Данииломъ Бернулли особенность кинетики состоитъ въ выводѣ давленія газа въ зависимости отъ объема и температуры изъ массовыхъ скоростей молекулъ при посредствѣ живой силы, развиваемой ударомъ, и въ придумываніи массовыхъ скоростей, потребныхъ для гипотетическихъ вычисленій. Такимъ образомъ является родъ объясненія Маріоттова закона и увеличенія давленія вслѣдствіе повышенія температуры, какъ объ эти вещи, въ сущности, уже и введены подобнымъ образомъ Данииломъ Бернулли. Теорія не специфически кинетическая, но истинная моторная теорія оправдывалась бы прежде всего тѣмъ, если бы ей удалось дать удовлетворительный, безъ посредства какихъ-либо произвольныхъ гипотезъ, отчетъ объ элементахъ удѣльной теплоты. Но кинетика не только въ этомъ отношеніи совершенно несостоятельна, но и въ иныхъ отношеніяхъ осталась неплодотворною. Она дала только видимость объясненія нѣкоторыхъ такихъ истинъ, которыя были уже извѣстны, но не прибавила ничего новаго.

Лучше развиты, но довольно автоматически, прежде всего смѣлыя, но лучше оправдавшіяся заключенія изъ законовъ газовъ, относящихся къ температурѣ. Именно, если примѣнить законъ расширенія газовъ

¹ Именно, на голландскомъ языкѣ написанная диссертация 1873 г. профессоромъ физики Ванъ-деръ-Ваальсомъ, и въ тѣхъ видахъ, чтобы что-нибудь противопоставить нашимъ новымъ основнымъ законамъ, появившаяся въ 1881 г. въ нѣмецкомъ переводѣ или, лучше, въ дополненной переработкѣ. Она озаглавлена такъ: «Непрерывность газообразнаго и жидкаго состояній». Но вычитаемый объемъ здѣсь не есть объемъ молекулъ, а вчетверо больший, и это яко бы кинетическое слѣдствіе не выходитъ изъ крайне узкихъ предѣловъ. Подробности см. во II серіи нашихъ «Основныхъ законовъ» (1886). Наша постановка сдѣлана раньше, и это объясняется двояко; во-первыхъ, потому, что нашъ законъ промежуточнаго объема, какъ нѣчто, по существу своему, совсѣмъ иное, не можетъ быть и сравниваемо съ кинетическимъ закономъ, область приложеній котораго ограничена, а распространяется на несравненно болѣе широкую область, обнимающую всѣ состоянія агрегации; а во-вторыхъ, потому, что найденный нами прецедентъ Ивана Бернулли, скорѣе, благопріятенъ для насъ. Какъ скоро появляется на свѣтъ полная истина, то часто находятъ и предшествовавшіе намеки. Тогда половинчатая приближенія предшествовавшего времени, какъ Ваальсова, также приобрѣтаютъ свѣжесть и моделируются соотвѣтственно обобщенной истинѣ, но все-таки значеніе ихъ—второстепенное и на большее заявлять притязаній они не могутъ.

отъ теплоты при постоянномъ давленіи какъ бы вспять и неограниченно къ уменьшенію объема при пониженіи температуры, и отвлечъся при этомъ отъ всякихъ особенностей возможной капельно-жидкой конденсации, т.-е. отъ послѣдствій непостоянства, то придемъ въ предѣлѣ къ нулю объема. Соотвѣтствующая этому предѣлу температура, опредѣляемая обратною величиною коэффиціента расширенія и равняющаяся— 274°C ., разсматривается какъ абсолютный нуль или, другими словами, какъ такое значеніе, при которомъ уже не существуетъ никакой температуры.

Къ тому же результату, естественно, придемъ, если исходнымъ пунктомъ возьмемъ другую форму закона Гей-Люссака, т.-е. если предположимъ постоянный объемъ и предоставимъ напряжениямъ исчерпаться пропорціонально температурѣ. Единственная предосторожность, которую нужно соблюдать при крайне удобномъ употребленіи абсолютной температуры, состоитъ въ томъ, чтобы всегда помнить о первоначальномъ происхожденіи и соотвѣтственномъ смыслѣ дѣла, т.-е. не упускать изъ виду связи съ коэффиціентами расширенія или упругости. Болѣе глубокое основаніе тому, почему это заключеніе къ абсолютному нулю не можетъ быть отмѣнено измѣненіемъ состоянія агрегации, въ простѣйшей своей формѣ раскрыто въ «Новыхъ основныхъ законахъ II», и при этомъ съ указаніемъ на аналогонъ Гей-Люссаковского отношенія, имѣющій мѣсто для жидкостей и для твердыхъ тѣлъ.

181. Если мы хотимъ надлежаще понять прежнюю исторію механики теплоты, то не должны предполагать, что представленіе о движеніи или агитации малѣйшихъ частицъ тѣла или нѣкоторой матеріи въ тѣлахъ имѣло рѣшающее значеніе, и что этимъ и вызвана была теорія эквивалентности. Эти концепціи о томъ, что такое теплота сама по себѣ, для позитивнаго содѣйствія успѣхамъ были, скорѣе, довольно безразличны, а въ своей ошибочной формѣ, которая основою объясненія явленій сдѣлала просто существованіе тепловой матеріи и ея притокъ и отливъ, только тормозили дѣло. И еслибы противоположная идея—о движеніи, какъ о сущности теплоты, могла бы сколько-нибудь содѣйствовать теоріи, то даже чисто-философскія воззрѣнія, какъ наприм. Локковское, которое Джоуль взялъ эпиграфомъ для своей статьи 1850 г.¹, могли бы уже повести къ реформѣ. И гениальный и универсальный Томасъ Юнгъ, въ своей въ высшей степени раціональной энциклопедіи точ-

¹ Philosophical Transactions (1850), стр. 61: Heat is a very brisk agitation of the insensible parts of the object, which produces in us that sensation from whence we denominate the object hot; so what in our sensation is heat, in the object is nothing but motion.

наго знанія, пришелъ къ представленіямъ, которыя, если исключить представленіе о самомъ эквивалентѣ, соотвѣтствуютъ обычнымъ нынѣ понятіямъ. Въ своемъ столько же остроумномъ, сколько ученомъ трудѣ ¹, отвергая Лейбницевскую метафизику и изъ отвращенія къ соотвѣтствующей терминологіи, онъ далъ живой силѣ наименованіе «энергіи» и поставилъ ее въ связь съ «работою», поскольку онъ вмѣстѣ съ тѣмъ высказался, что теплота должна быть движеніемъ. ² Тѣмъ не менѣе, совершенно очевидно, что иная необходимость, а не необходимость молекулярнаго и неопредѣленно-динамическаго способа представленія все болѣе и болѣе сближала въ новое время отношеніе между силою и теплотою.

По мѣрѣ того какъ развивались и выступали впередъ техническія точки зрѣнія, мало-по-малу и понятіе о механической работѣ, выросшее на почвѣ практической механики, приобрѣтало значеніе также и въ раціональной механикѣ. Лагранжъ еще совсѣмъ не касался этого выраженія и соотвѣтствующихъ способовъ представленія, хотя, естественно, вещь эта была ему извѣстна. Что касается нашего столѣтія, то *Introduction à la mécanique industrielle physique ou expérimentale* ³ Понсле ясно показываетъ, что языкъ и понятіе лишь постепенно измѣнялись въ смыслѣ техническихъ точекъ зрѣнія. Геніальный основатель новой синтетической геометріи, не боявшійся нововведеній, имѣлъ въ виду въ этомъ сочиненіи по механикѣ особенно дать замѣтить, что выраженіемъ механическая работа и соотвѣтствующимъ понятіемъ онъ хочетъ пользоваться какъ руководящею формою представленія. Приэтомъ ясно видно, что если понятіе работы особенно выставлялось на показъ въ чисто теоретическихъ и раціональныхъ основаніяхъ механики, то на введеніе его смотрѣли еще только какъ на совершающійся фактъ, а никоимъ образомъ не какъ на установившійся обычай. Если такое предположеніе сдѣлано было даже механикомъ-техникомъ, и на сплошное теоретическое употребленіе понятія работы для всѣхъ раціональныхъ основаній механики онъ смотрѣлъ какъ на нѣкоторый родъ новшества, то легко составимъ себѣ понятіе, какая пропасть у остальныхъ раздѣляла чистую и аналитическую теорію, съ одной стороны, отъ навыка въ употребленіи понятія работы, съ другой стороны. Реакція выработаннаго такимъ образомъ практической механикою понятія работы не замедлила вскорѣ обнаружиться, и въ новѣйшихъ начертаніяхъ механики или физики упо-

¹) *Natural Philosophy*, 2 тома. London 1807. Т. I, стр. 78 и сл.

²) *Ibid.* стр. 654.

³) 1 изд. 1829, 2 изд. 1830—40, 3 изд. Кретца, Paris 1870.

требленіе понятія работы вошло даже и въ учебники, какъ вещь самопонятная. Этимъ мы не хотимъ сказать, чтобы ядро дѣла само по себѣ могло быть опущено въ прежнихъ начертаніяхъ; ибо въ уравненіи живыхъ силъ, какъ его конципировалъ Лагранжъ, одна часть представляетъ пространственныя положенія системы, и если два различныя положенія взять предѣлами, то промежуточный приростъ живой силы соотвѣтствуетъ разности между значеніями относящейся къ этимъ положеніямъ функціи. Но эта функція и есть то, что фактически соотвѣтствуетъ исполнѣ универсально мыслимому понятію работы, хотя такого истолкованія и способа представленія первоначально и не было.

Въ упомянутомъ трактатѣ Понсле есть одно исторически интересное обстоятельство, а именно въ немъ ¹ исполнѣ явственно выступаетъ, какъ въ формѣ мыслей, такъ и въ оборотѣ рѣчи, представленіе о превращеніи живой силы въ работу и работы въ живую силу. Если матеріально и не было существенно новымъ воззрѣніемъ, то съ формальной стороны все-таки было важнымъ шагомъ примѣненіе принципа живыхъ силъ въ такомъ родѣ, что трата работы разсматривалась какъ эквивалентъ приращенію и произвожденію живой силы, и наоборотъ, причемъ принципъ живыхъ силъ не ограничивался зависящими отъ болѣе опредѣленныхъ предположеній старыми представленіями сохраненія. Такой способъ представленія, развивавшійся все болѣе и болѣе, долженъ былъ необыкновенно содѣйствовать тому, что мысль объ эквивалентности силъ давала себя знать и въ другихъ направленіяхъ. Поэтому слѣдуетъ приписать механикѣ и впервые въ ней выработанному образу мыслей, что сталъ возможенъ дальнѣйшій рѣшительный шагъ, а именно концепція идеи, что во всѣхъ формахъ проявленія силъ природы въ основѣ заложенъ, какъ матеріалъ, тождественный, чистомеханическій силовой фондъ. Эта идея выступала не постепенно, но явилась сразу вмѣстѣ съ Майеровскимъ открытіемъ и вычисленіемъ эквивалента теплоты, и ее слѣдуетъ разсматривать какъ плодъ, котораго появленіе можно искать, если хотимъ бросить взглядъ назадъ, въ Гюйгенсовскомъ принципѣ равнаго подъема, и даже въ Галилеевскомъ сравненіи подъема съ требуемою скоростью. Если, кромѣ того, поразмыслить о сочетаніи этихъ первыхъ основъ динамики съ Картезіевою мыслью о всегда равномъ себѣ количествѣ движенія, предполагая, что ошибочная сторона этой послѣдней идеи забракована,—сочетаніи, которое привело къ болѣе универсальнымъ представленіямъ о сохраненіи силы,—то ясно увидимъ, что совре-

¹ Сплошь и особенно Art. 138-3-го изд., тождественнаго съ 1-мъ

менный всепроникающий способ концепціи былъ подготовленъ постепенно, относительно медленнымъ процессомъ мысли. Но чтобы имѣть понятіе о контрастѣ между новою механическою теоріею теплоты и представленіями, какія были возможны прежде, напомнимъ въ заключеніе о томъ, что счелъ возможнымъ написать Фурье въ предисловіи къ своей *Théorie analytique de la chaleur*, Paris 1822 г.: «Какова бы ни была широта механическихъ теорій, онѣ отнюдь непримѣнимы къ тепловымъ дѣйствіямъ. Эти послѣднія образуютъ особый порядокъ явленій, и не могутъ быть объяснены принципами движенія и равновѣсія». Рѣдко случается, чтобы предсказаніе границъ извѣстной области было опровергнуто болѣе блестящимъ образомъ, чѣмъ приведенное предсказаніе знаменитаго аналита, и однако Фурье былъ мужъ, который тутъ же высказалъ основоположеніе, что «болѣе глубокое изученіе природы есть плодотворнѣйшій источникъ математическихъ открытій». Правда, не аналитическій путь привелъ къ механикѣ теплоты и не этимъ путемъ она развивалась съ своего возникновенія! Да и способности, приводяшія къ чему-либо подобному, должны несравненно превосходить ту степень ихъ, какая отмѣрена была Фурье.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Какъ далеко простирается значеніе механическихъ принциповъ.

182. Чтобы дѣйствительныя и возможные направленія, въ которыхъ приложимо мышленіе, исходящее изъ механическихъ основоположеній, можно было обозрѣть въ порядкѣ, нужно припомнить себѣ, что предпосылкою механикѣ служить чистая математика перемѣщеній, разсматриваемыхъ въ отношеніи ко времени. Въ этомъ смыслѣ весьма характерно выраженіе Лагранжа¹, что механика есть геометрія четырехъ измѣреній. Впрочемъ, оно имѣетъ значеніе только для фороміи или кинематики², а эта послѣдняя въ теченіе нашего столѣтія выступала болѣе и болѣе какъ особая ступень абстракціи или, лучше сказать, какъ особенная, принадлежащая чистой математикѣ, область и, соотвѣтственно этой точкѣ зрѣнія, въ новыхъ учебникахъ заняла самостоятельное положеніе. Все, что

¹ *Théorie des fonctions analytiques* (1813), третій отд. Art. I.

² О введеніи этого наименованія и о смыслѣ кинематики см. у Ампера, А. М., *Essai sur la philosophie des sciences*, Paris 1834, стр. 50 и сл.

въ трехъ измѣреніяхъ пространства и въ четвертомъ, соотвѣтствующемъ времени, совершается какъ явленіе движенія или представляется какъ покой, все это должно стать предметомъ форономическаго пониманія. И для статики мыслимъ форономическій панданъ; ибо покой есть длящееся пребываніе въ томъ же самомъ мѣстѣ и слѣдовательно предполагаетъ, что явленія движенія въ смыслѣ переноса и вращенія упраздняются такимъ образомъ, что форономическіе точки или образы, мыслимые движущимися, въ теченіе какого угодно времени не испытываютъ ни малѣйшаго перемѣщенія. Форономическія понятія отличаются отъ специфически механическихъ представленій тѣмъ, что они мыслимы безъ всякой матеріи. Разнообразіе форономической области, правда, дано фактами природы, но его должно разсматривать какъ область образовъ, которые, какъ и образы остальной чистой математики, всецѣло имѣютъ основаніемъ своего происхожденія законы и комбинаціи въ пространствѣ и времени построяющаго ума.

Отсюда слѣдуетъ, что форономическая часть механики не только по достовѣрности и по способу познанія имѣетъ тотъ же характеръ, какъ и чистая математика, но учитъ оцѣнивать и самую крайнюю область приложенія механическихъ воззрѣній. Если отбросить метафизическіе фантазмы, то эта область обнимаетъ всю дѣйствительность пространственныхъ и вмѣстѣ временныхъ явленій, и ничего болѣе. У кого нѣтъ на-готовѣ пространство съ другими измѣреніями, или, иначе, новой геометріи, тотъ можетъ удовольствоваться этою достовѣрностью математики и ея границъ. А куда могутъ завести несостоятельныя овеществленія безконечно-большаго и неясности безконечно-малаго, это доказало отрицаніе безусловной истины геометріи, починъ чему положилъ еще Гауссъ въ частной перепискѣ¹, а въ силу его большаго авторитета возникла цѣлая геометрія малыхъ авторитетовъ, которую можно бы также назвать гипергеометріей² но кото-

¹ Гауссъ къ Шумахеру отъ 12 іюля 1831, въ „Перепискѣ Гаусса съ Шумахеромъ“, изд. Петерса, 3 тома, Альтона 1860—61, т. II, стр. 268 и сл. Здѣсь читаемъ: „Въ неэвклидовой геометріи совсѣмъ нѣтъ подобныхъ фигуръ не равныхъ, наприм. углы равносторонняго треугольника не только равны $\frac{2}{3}$ d, но см. по величинѣ сторонъ разнятся между собою и, при безграничномъ возрастаніи стороны, могутъ сдѣлаться какъ угодно малыми“.

² Такъ, покойный Гёттингенскій профессоръ математики Риманъ, котораго, при его несамостоятельности, кромѣ Гауссовской самоидентификаціи, нѣкоторое время сбивала съ толку и Гербартовская философія, въ статьѣ „О гипотезахъ, лежащихъ въ основаніи геометріи“, Abh. d. Götting. Ges. d. Wissenschaften, т. 13 (1866—67), стр. 149, писалъ: „Но кажется, что эмпирическія понятія, на которыхъ основываются пространственныя мѣровыя опредѣленія, понятіе твердаго тѣла и свѣтоваго луча, въ безконечно-маломъ теряютъ силу; такимъ образомъ,

рую сами они, по большей части, величаютъ не-эвклидовской геометріей. Въ работахъ по этой геометріи такъ называемаго Гауссова пространства, и у насъ и въ другихъ мѣстахъ, въ послѣдніе годы недостатка не было, и еслибы намъ позволяло мѣсто, то мы вошли бы въ ближайшія подробности объ этихъ, и механикѣ въ высшей степени комично угрожающихъ, подкопахъ подъ геометрическія аксіомы. Итакъ, мы передаемъ это дѣло метафизикамъ и другимъ алхимикамъ духа, которые не безъ удовольствія могутъ усмотрѣть здѣсь, что плоды безтолковщины, добываніе которыхъ они имѣютъ обыкновеніе довѣрять только самимъ себѣ, иногда созрѣваютъ и въ садахъ математиковъ.

Въ другихъ моихъ сочиненіяхъ, именно въ моихъ и моего сына «Новыхъ основахъ анализа, алгебры, и т. д. (1884)» съ разныхъ сторонъ разсмотрѣны нелѣпицы, которыми математика послѣднихъ поколѣній обязана Гауссу и другимъ бзотійцамъ, а между прочимъ въ надлежащемъ свѣтѣ показаны и ходульное чванство Гаусса, и культъ ему воздававшійся. Но специально пускаться въ эту математику абсурдовъ—то же самое, что спорить съ безсмысломъ и сумасбродствомъ. Всякая духовная область связана съ областью заблужденій, а на порогѣ послѣдней хотя и не прекращается видимость науки, но дѣйствительная наука должна останавливаться, если она не хочетъ компрометтировать себя знакомствомъ съ обитателями этой области или съ кандидатами въ нее.

183. Хотя вышеописанная путаница и не есть единственное затемнѣніе строгихъ понятій математическимъ мистицизмомъ и безтолковщиной, все же нельзя сказать, чтобы этотъ туманъ, распро-

позволительно думать, что мѣровыя отношенія пространства въ безконечно-маломъ не соотвѣтствуютъ гипотезамъ геометріи, и это въ самомъ дѣлѣ слѣдовало бы допустить, еслибы чрезъ это явленія объяснялись бы болѣе простымъ образомъ“. Неудивительно, что немножко неясно философствующій физиологическій профессоръ физики г. Гельмгольтцъ также не упустилъ случая выѣшаться въ эти изслѣдованія, и въ статьѣ: „О фактахъ, лежащихъ въ основаніи геометріи“ (Извѣстія Геттинг. Кор. Ученаго Общ. іюнь 1868) въ благоприятномъ смыслѣ комментировалъ эту пикантную безсмыслицу. Отсутствие самостоятельности дало о себѣ знать и въ другихъ случаяхъ какъ родъ дарованій, благодаря которому выдвинулся г. Гельмгольтцъ. Иля всегда по пятамъ другихъ, не заботясь о томъ, будетъ ли направленіе пути ложное или правильное, онъ не произвелъ ничего самостоятельнаго ни въ одной теоріи. Такъ какъ подобный уровень онъ обнаружилъ вездѣ, гдѣ онъ работалъ, то приходится вывести не просто общепонятное заключеніе, что и тамъ, гдѣ напр. можетъ быть указана только высочайшая степень вѣроятія заимствования, абсолютная же достовѣрность, по природѣ дѣла, большинству публики недоступна безъ сознанія автора,—что и тамъ лучшихъ способностей въ наличности не имѣется, ибо ихъ нигдѣ не было и въ другихъ случаяхъ. Ср. примѣчаніе къ § 177.

странившійся надъ нѣкоторыми сторонами математики именно въ текущемъ столѣтіи, существеннымъ образомъ можно было бы приписать положительному вліянію какого-либо опредѣленнаго направленія школьной метафизики. Такъ какъ Якоби и Дирикле держались индифферентнаго отношенія къ философіи, а послѣдній, сверхъ того, въ силу своего лучшаго образованія во французскомъ духѣ, былъ даже предубѣжденъ противъ всякихъ метафизическихъ туманностей, то изъ нѣмцевъ рѣчь можетъ быть только о Гауссѣ, да и о немъ извѣстно, что онъ не былъ сторонникомъ какой-либо особой философіи, но въ отдѣльныхъ направленіяхъ, какъ наприм. къ своему факультетскому коллегѣ Герbartу, пускавшемуся въ самыя странныя и самыя неточныя лжематематическія измышленія, питалъ положительное отвращеніе. Слѣдовательно, если авторитетъ Гаусса вліялъ въ такомъ духѣ, что послѣднія логическія основы математики являлись въ вышеуказанномъ видѣ, а мнимыя величины ¹ въ мистическомъ свѣтѣ, то этотъ фактъ слѣдуетъ объяснить

¹ Сравни объ этомъ собственныя признанія Гаусса, въ „Гёттинг. Учен. Вѣдом.“ за апрѣль 1831 г. Помѣщенныя тамъ, сами по себѣ правомочныя изъясненія, направленные противъ Кантовскаго ученія о субъективности пространства, плохо выжуются съ подобными старымъ Кантовскимъ мнѣніямъ фантазмами о пространствахъ болѣе чѣмъ съ тремя измѣреніями, и это было бы непонятно развѣ только бѣотійцамъ. Исходный пунктъ Гаусса при построеніи мнимыхъ величинъ не только мистически неясенъ, но въ наглядномъ истолкованіи реальной части и совсѣмъ произволенъ. Въ своей статьѣ о изображеніи поверхностей (Сочиненія, т. IV) въ § 5 онъ пользуется разложеніемъ на мнимые факторы, но еще не вводитъ нерациональнаго геометрическаго объясненія и построенія мнимыхъ величинъ. Даже какъ просто наглядное средство къ истолкованію дѣйствительныхъ частей и коэффициентовъ, Гауссовская манера изложенія оставалась бы все-таки совершенно произвольною, и прямо не соотвѣтствовала бы тому, на что мы указываемъ въ § 205, какъ на главное дѣло. Въ самомъ дѣлѣ, если устранить изобрѣтенное не Гауссомъ, но только повторенное имъ старое самообольщеніе, что такъ-называемую мнимую единицу можно построить какъ среднюю пропорціональную между положительною и отрицательною абсциссами въ формѣ перпендикулярной ординаты, равно какъ и примыкающее сюда изображеніе разстоянія между точками прямоугольно надломленной линіей, состоящею изъ дѣйствительной абсциссы и мнимой ординаты, или даже радіусомъ, разсматриваемымъ какъ представленіе мнимаго,—если устранить такимъ образомъ и всѣ метафизически-фантастическія подтасовки, то все-таки останется крайне немотивированный способъ нагляднаго представленія дѣйствительныхъ элементовъ мнимыхъ комбинацій. Итакъ, о совершенно несамостоятельномъ характерѣ Римановскихъ работъ, въ которыхъ онъ ссылается на Гаусса (именно, диссертациі о функціяхъ комплекснаго переменнаго, 1851 года, вторично изданной въ Гёттингенѣ въ 1867 году, и въ группѣ статей, относящихся къ Абелевскимъ функціямъ, 1857 года, въ 54 томѣ журнала Крелля), свидѣтельствуетъ то, что въ нихъ тотъ же способъ нагляднаго представленія, въ той же вполнѣ произвольной формѣ, взять и распространить просто по довѣрію къ авторитету

общею ограниченностью мышления этой личности, что было в связи с религиозным ее суевѣріемъ. И можно математику и ее приложения только поздравить съ тѣмъ, что къ заблужденіямъ, выросшимъ на ее собственной почвѣ, не присоединилось и опредѣляющаго вліянія метафизической схоластики 19-го столѣтія. Гегель и Герbartъ не имѣли никакого вліянія, если и нельзя сказать, что на всѣхъ математиковъ или на писателей въ этой области, то уже навѣрное — на ходъ математики и ее приложений, равно какъ и на логическое пониманіе существенныхъ и наиболѣе спорныхъ основныхъ понятій. Если гдѣ въ этомъ отношеніи случайно они и высказывались, то ихъ концепціи имѣли такую форму, что болѣе выдающіеся математики не могли даже и пытаться дѣлать изъ такихъ разъясненій какое-либо употребленіе. Приэтомъ, логическое формированіе математическихъ наукъ зависѣло не отъ одной Германіи, а болѣе обширный союзъ народовъ всегда будетъ извѣстною порукою противъ всякой односторонней опрометчивости подобнаго пошиба. Только одинъ великій мыслитель, жившій для философіи и отъ математики, былъ въ состояніи съ истиннымъ знаніемъ дѣла изслѣдовать логическій составъ математики, равно и принципы и главные результаты раціональной механики. Огюсть Контъ въ 1830 г. въ первомъ томѣ своего *Cours de philosophie positive* обстоятельно разобралъ математическія и механическія послышки всякаго прочаго знанія и послѣднія 200 страницъ посвятилъ одной механикѣ. Хотя эта работа и давала превосходно расположенный обзоръ данной области, отличалась тонкимъ выборомъ и такимъ образомъ пред-

учителя. Впрочемъ, Гауссовская точка зрѣнія касательно мнимыхъ слана въ архивъ и опровергнута дѣйствительнымъ и раціональнымъ построеніемъ мнимыхъ въ нашихъ «Новыхъ основаніяхъ». Тамъ мнимое разсматривается какъ выраженіе невозможности, но эта невозможность изображается геометрически и наглядно такимъ образомъ, что на соответствующихъ возможныхъ образахъ выступаютъ аналитически противорѣчащія отношенія знаковъ, т. е. невозможности изображенія. Отнесеніе геометрическихъ или иныхъ обстоятельствъ, посредствомъ аналитическихъ понятій, къ уравненію, къ которому непосредственно отнести ихъ нельзя, — это аналитическое отношеніе отнынѣ и есть разрѣшеніе загадки мнимаго. Но отсюда слѣдуетъ и геометрическая или иная вещественная изобразимость всякой мнимой невозможности въ какой-либо вещественной концепціи, гдѣ величины, въ иныхъ случаяхъ аналитически абстрактныя, играютъ роль вещественныхъ величинъ, а стало-быть въ геометріи — роль пространственныхъ величинъ. Однако это краткое формулированіе главнаго пункта можетъ быть вполне понятно лишь тогда, когда проштудированы будутъ наши пространныя изслѣдованія мнимыхъ и имажинативныхъ величинъ. Гауссъ слѣдовалъ противному истинѣ и реакціонерному пути, когда онъ въ цитированной статьѣ „Гёттингенскаго Обозрѣнія“ заблужденіе по поводу отрицательныхъ величинъ взялъ за образецъ, а введеніе подобнаго же фантазма для мнимыхъ объявилъ вещью, обѣщавшею успѣхи въ будущемъ.

ставляла нѣчто такое, что было и остается единственнымъ въ своемъ родѣ, тѣмъ не менѣ авторъ, примыкая къ Лагранжу и подъ влияніемъ традицій Парижской Политехнической Школы, ограничился въ сущности въ своемъ родѣ логическою обработкою матеріала въ смыслѣ ясной архитектурки. Относительно дифференціальныхъ понятій онъ не пошелъ дальше точекъ зрѣнія Лагранжа и Карно и удовольствовался соединеннымъ изложеніемъ этихъ обоихъ способовъ пониманія. Въ истолкованіи принциповъ механики онъ, въ сущности, вернулся къ Ньютоновскому пониманію аксіомъ. Мнѣніе, что всѣ попытки вывести принципъ инерціи изъ чистаго мышленія, а не изъ опыта, «абсурдны», и что стремленіе чисто-аналитически доказать параллелограммъ силъ—сумасбродно, характеризуетъ рѣзкій чеканъ его воззрѣній. Но влияние Конта на математическія науки пока еще постольку не подлежитъ нашему разсмотрѣнію, поскольку его позитивная философія лишь позднѣе сдѣлалась популярною и обращать на нее вниманіе именно въ Германіи стали лишь весьма недавно. Да и оригинальность этого философа, несмотря на его превосходныя познанія въ математикѣ какъ спеціалиста, проявилась болѣе въ другомъ направленіи, именно въ философіи исторіи и въ универсальной концепціи цѣлаго наукъ.

Что касается всесторонняго сужденія о Контѣ, то здѣсь оно неумѣстно; въ моей Исторіи философіи и въ Исторіи политической экономіи и социализма этотъ независимый французскій мыслитель былъ впервые оцѣненъ обстоятельно, при этомъ съ достаточно универсальной точки зрѣнія, вообще же въ первый разъ должнымъ образомъ и съ совокупнымъ обзоромъ различныхъ стадій его развитія. Что же касается области математики и точнаго знанія, то въ этомъ отношеніи о Контѣ можно дать такое же заключеніе, какъ и о философахъ 18-го столѣтія, а именно что онъ, несмотря на то, что познанія его въ этой спеціальной области были лучше, все-таки такъ же мало содѣйствовалъ расширенію границъ точнаго знанія, какъ и эти философы. Онъ не сдѣлалъ даже и того, что всего скорѣе было съ руки философу-специалисту: мы разумѣемъ упорядоченіе и окончательное выясненіе неустроенныхъ и противорѣчивыхъ понятій; объ этомъ свидѣтельствуетъ въ особенности несостоятельное и равнодушное отношеніе его къ представленіямъ математиковъ о безконечно маломъ и о мнимыхъ. Нельзя сказать, чтобы въ новое время, и даже въ древности, совсѣмъ не было случаевъ, гдѣ мыслители давали несомнѣнныя свидѣтельства о своихъ способностяхъ открытіями въ области позитивнаго знанія и дѣйствительнымъ улучшеніемъ важныхъ понятій. Когда въ новое время лица, получившія первоначальное образованіе въ духѣ

теологическомъ по преимуществу, какъ Шеллингъ и Гегель, или съ образованіемъ немного высшимъ, какъ въ 18-мъ столѣтіи Кантъ,—когда лица эти брали на себя дерзость дѣлать указанія въ области точнаго знанія, но при этомъ только городили вздоръ и нелѣпицы, то это въ порядкѣ вещей, и эта гильдія настолько же невмѣняема въ математикѣ, физикѣ, химіи и т. п., какъ и теологи. Но когда знатокъ дѣла, да притомъ держащійся совершенно противоположной точки зрѣнія, развертывая знамя точнаго позитивнаго знанія, не даетъ никакихъ свидѣтельствъ о томъ, чтобы его мышленіе могло служить также и расширенію области точнаго знанія, то это—большой недостатокъ.

Другой недостатокъ, лежащій на противоположномъ концѣ скалы дарованій, касается вещественно-логическаго. Въ этомъ направленіи Кантъ не обнаружилъ дарованій, поскольку здѣсь рѣчь шла о сознательномъ проведеніи самаго общаго схематизма мышленія чрезъ итоги, даже вообще чрезъ всю совокупность вещей и процессовъ. Подобное послѣдовательное употребленіе понятій, какъ послѣдней инстанціи, и употребленіе всѣхъ дѣйствительно въ нашемъ мыслительномъ арсеналѣ имѣющихся элементовъ—столь же мало метафизика или алхимія духа, сколько и современная химія—не алхимія. Впрочемъ, у Конта это отсутствіе универсальной разумной консеквентности за себя отомстило, ибо оно привело съ собою и свою послѣднюю стадію, на которой даже математика и астрономія не избѣгли вліянія расцѣпности чувства. Но если оставить въ сторонѣ оба эти главные недостатка, свойственные и лучшимъ его работамъ, то можно, по крайней мѣрѣ, найти удовлетвореніе въ томъ, что въ математикѣ и механикѣ первый томъ Контовскаго курса предлагаетъ попытку упорядоченнаго резюме,—слѣдовательно, родъ системы и притомъ системы здравой.

За выключеніемъ только что разсмотрѣннаго болѣе здороваго явленія, можно утверждать, что духъ восемнадцатаго столѣтія, не только въ общемъ философскомъ направленіи, но и въ специфическомъ своемъ проявленіи въ области математическихъ наукъ, былъ яснѣе и разумнѣе, нежели духъ девятнадцатаго столѣтія. И если то, что двумя послѣдними поколѣніями именно въ Германіи называлось философіей, и не могло своего вообще искажающаго вліянія распространить и на область математическихъ наукъ, то тѣмъ не менѣе ложные шаги въ математикѣ и попятное движеніе въ отношеніи къ ясности концепцій понятій имѣютъ общій корень съ этимъ вырожденіемъ философскаго духа. Реставративный умственный типъ, наиболѣе яркимъ представителемъ котораго былъ Ко-

ши¹, вовсе не былъ случайностью, и другія личности, какъ Гауссъ, являли собою по виду слабѣйшіе, на дѣлѣ же еще болѣе рѣзкіе отпечатки того же типа². Нѣкоторая логическая косность, составляющая дѣйствительный контрастъ съ интересомъ 18-го столѣтія къ яснымъ концепціямъ понятій, очевидно, сдѣлалась принадлежностью реставративной эры двухъ послѣднихъ поколѣній, и даже еще нынѣ бросаетъ нѣкоторую тѣнь на способъ разработки въ тѣхъ наукахъ, въ которыхъ безусловная строгость и ясность составляютъ основное требованіе.

184. Въ логическомъ отношеніи понятіе чистой форономіи, какъ геометріи четырехъ измѣреній, весьма ясно, хотя на практикѣ разработка ея отдѣльно отнюдь не необходима. Форономія имѣетъ апріорную достовѣрность чистой математики и область ея опредѣляется тѣмъ, что въ ней не имѣетъ мѣста реальное понятіе массы. Чтобы примѣнить ее къ міру полной дѣйствительности, т.-е. чтобы сдѣлать изъ нея механику въ собственномъ смыслѣ слова, необходимо

¹ Для правильнаго уразумѣнія общаго умственного типа, къ какому принадлежалъ Коши, ср. достойный вниманія и оригинальный трудъ Э. Вешнякова, относящійся къ антропологической біографікѣ умственно - выдающихся лицъ, подъ заглавіемъ: Contribution etc.; seconde section des Recherches sur les conditions anthropologiques de la Production scientifique et esthétique, Moscou 1872; третья сскція этой и по отношенію къ характеристикѣ другихъ математиковъ интересной книги появилась въ Парижѣ 1873. Специально математическую характеристику этого, превозносиваго выше заслугъ, математика іезуитовъ, украсившаго свою персону чужими перьями, равно и общее сужденіе о его направленіи можно найти въ нашихъ „Новыхъ основаніяхъ“.

² Если сравнить, какъ относился Коши къ мнимымъ количествамъ, съ возрѣніями Гаусса, то первый является еще относительно рачіонально мыслящимъ скептикомъ, далеко не вездѣ допускающимъ метафизику, и эта математически-скептическая научная жилка весьма хорошо уживается у него съ католическою преданностью религіи. Въ концѣ концовъ онъ хотѣлъ устранить мнимыя, какъ это ясно доказываютъ два его мемуара, одинъ объ алгебраическихъ эквиваленціяхъ, а другой о геометрическихъ количествахъ (въ IV т. его Exercices d'analyse et de physique mathématique, Paris 1847). Вкривъ идущая половинчатая критика, выражавшаяся въ подобномъ ненатуральномъ положеніи, опирающемся частью только по виду, а частью и на совѣтъ немотивированныхъ понятій, напоминаетъ намъ, что кое-что изъ лучшихъ тенденцій 18-го столѣтія еще осталось въ логически несостоятельномъ и даже нераціональномъ способѣ мышленія Коши, и что благодаря этому его, впрочемъ, въ нѣкоторыхъ направленіяхъ весьма широкія возрѣнія сохранили извѣстный отпечатокъ разумной соразмѣрности и, по крайней мѣрѣ, были свободны отъ метафизическихъ ваднихъ мыслей его нѣмецкаго современника Гаусса. Отсутствие логики дѣлало Коши въ одномъ направленіи суевѣрнымъ, въ другомъ скептикомъ, а именно скептикомъ не только въ отношеніи къ ложной метафизикѣ, но и въ отношеніи внутренней послѣдовательности такой науки, которая не нуждалась въ ясно воспринятыхъ понятіяхъ въ противоположность искусственнымъ и произвольнымъ обходамъ.

вести въ разсмотрѣніе массы и ихъ различіе. Этотъ шагъ приводитъ къ собственно механическимъ принципамъ, предметъ которыхъ—отношеніе матеріи къ проявляющимся въ ней силамъ. Однакоже, отъ одной области къ другой можно бы было перекинуть мостъ, введя скопленіе форономическихъ точекъ, мыслимыхъ какъ носители явленій движенія,—введя таковое какъ идеальный аналогъ матеріи и ея различія по количеству. Несмотря на это, нельзя бы было обойтись безъ эмпирическихъ принциповъ, касающихся отношенія дѣйствительныхъ матеріи и силъ, равно какъ, сверхъ этого, и безъ постоянныхъ и безъ числовыхъ опредѣленій абсолютныхъ количествъ дѣйствія, и въ этомъ яснѣйшее доказательство того, что механика—наука реальная, приложение которой основывается на постиженіи простыхъ фактовъ природы.

Мысля массу, мы прежде всего мыслимъ только тяготящую матерію; но поскольку общее понятіе матеріи не ограничиваютъ представленіемъ вѣсомости, постольку же и механика не ограничивается столь узкимъ представленіемъ. Если доселѣ внѣ области вѣсомой матеріи только и есть что гипотетическія средины, на которыя распространяютъ механическія заключенія, добытыя относительно вѣсомой матеріи, то на этотъ недостатокъ слѣдуетъ смотрѣть какъ на временный. Главная бѣда пока въ неизвѣстности относительно того, что можно бы было въ эфирѣ и въ другихъ гипотетическихъ срединахъ разсматривать какъ количество матеріи и сравнивать съ прочими механическими массами. Еслибы сопротивленіе, о которомъ свидѣлствуютъ измѣненія въ путяхъ кометъ¹, зависѣло бы дѣйствительно отъ эмира, а не отъ какихъ-либо малыхъ вѣсомыхъ массъ или массовыхъ частицъ, то въ этомъ мы имѣли бы доказательство, что существуетъ непосредственная взаимность въ переносѣ движенія отъ одного рода матеріи къ другому по аналогіи съ движеніемъ въ вѣсомыхъ срединахъ. Впрочемъ, уже перекинуть мостъ отъ явленій термотики къ механическимъ, и не хватаетъ только разложенія представляемыхъ теплотою механическихъ явленій соразмѣрно различію массъ среды отъ аффицирующихъ двигательныхъ причинъ. Когда при объясненіи электрическихъ явленій говорятъ о массѣ, то этимъ отнюдь не дается понятіе о количествѣ обыкновенной матеріи, въ силу котораго можно бы было разнороднѣйшія силовыя явленія отнести къ единому однородному носителю. Потому примѣненіе механи-

¹ Ср. Энке „О существованіи сопротивляющейся среды въ міровомъ пространствѣ“—Берлинскій астрономич. ежегодникъ за 1861 г., стр. 319 и сл.—О возможномъ способѣ механическаго изслѣдованія, слѣдующимъ обычнымъ допущеніямъ, ср. также Якоби *Theoria novi multiplicatoris* § 29, Сочиненія т. I, стр. 203.

ческихъ принциповъ и здѣсь пока связано тѣсными предѣлами, которые будутъ раздвигаться только въ той мѣрѣ, въ какой начнутся познавать, а наконецъ и измѣрять однородное въ универсальной матеріи.

185. Первыми примѣненіями собственно механическихъ принциповъ должно считать разработку опредѣленныхъ проблемъ самой механики, а затѣмъ распространеніе ихъ на доступную часть данной дѣйствительности природы. Итакъ, главныя линія примѣненія могутъ быть намѣчены прежде всего частными, болѣе отвлеченными задачами, а сверхъ того особенно планетною и космическою механикою. Изъ числа болѣе абстрактныхъ задачъ слѣдуетъ указать на задачу о вращеніи, на разработку которой навели особенно вопросы, относящіеся къ прецессіи и нутаціи, а простѣйшую форму рѣшенія дала теорія Пуансо. Эта проблема даже внесла въ элементы и въ общіе принципы такія понятія, которыя обыкновенно не вводятъ въ принципиальныя прелиминаріи, но скорѣе помѣщаютъ въ приложенія. Между прочимъ, сюда относится концепція трехъ главныхъ осей инерціи, проходящихъ чрезъ центръ тяжести тѣла или мгновенно разсматриваемой системы, т.-е. концепція свободныхъ, естественныхъ и неизмѣнныхъ осей вращенія. Это понятіе, подобно понятію центра тяжести или мгновеннаго центра массы можетъ быть допущено въ кругъ болѣе простыхъ исходныхъ пунктовъ всей механики. Также точно и соответствующее понятіе момента инерціи, по самой природѣ его, послѣдовательнѣйшимъ образомъ тотчасъ же можно присоединить къ понятію массы и къ тѣмъ представленіямъ, которыя, въ изслѣдованіи переноснаго движенія, примыкаютъ къ гипотетическому соединенію всей массы въ центръ тяжести. Гдѣ бы ни примѣнять механическіе принципы, на эти послѣднія основныя понятія слѣдуетъ смотрѣть какъ на дѣйствительные элементы, безъ помощи которыхъ невозможно никакое исполнѣнное и вмѣстѣ совершенное выраженіе простѣйшихъ механическихъ процессовъ.

Къ знаменитѣйшимъ спеціальнымъ проблемамъ принадлежитъ проблема о трехъ тѣлахъ, требующая общаго рѣшенія вопроса о взаимномъ отношеніи вслѣдствіе притягательныхъ силъ. Въ специфически механическихъ принципахъ новаго рода эта задача не нуждается. Вся трудность въ аналитическомъ примѣненіи обыкновенныхъ аксіомъ и принциповъ. Приближенныя рѣшенія для частныхъ случаевъ на практикѣ относятся къ астрономическимъ возмущеніямъ, а всѣ успѣхи въ этомъ отношеніи доселѣ зависѣли отъ пріемовъ и формъ въ употребленіи анализа. Гдѣ рѣчь идетъ собственно лишь о проблемѣ интеграціи, тамъ уже вопросъ не о спе-

цифически механических исходных пунктахъ, и возможность болѣе широкаго примѣненія механическихъ основныхъ воззрѣній по этой методѣ предполагаетъ расширеніе математическихъ средствъ. Итакъ, коротко говоря, проблема о трехъ тѣлахъ уже давно формулирована такъ, что принадлежитъ просто къ задачамъ аналитическимъ.

Универсальнѣйшія точки зрѣнія приложенія открываются тамъ, гдѣ изъ планетной или даже вообще космической механики имѣются въ виду представленія устойчивости или идеи о механическомъ характерѣ прошлаго природы. То, что Лапласъ назвалъ небесною механикой, было въ сущности просто планетною механикой, да и выраженіе система міра должно брать въ болѣе узкомъ смыслѣ. Генетическія предположенія, долженствующія характеризовать какъ, бы исторію или къ болѣе ранней эпохѣ относящіяся формы планетнаго механизма, эскизъ которыхъ набросанъ въ послѣднемъ примѣчаніи Лапласовской *Exposition du Système du monde* ¹, содержатъ извѣстную гипотезу о первоначально газообразномъ состояніи солнечной системы, а за основаніе для дальнѣйшихъ группировокъ берутъ, кромѣ первоначальнаго вращенія этой массы газа, главнымъ образомъ, охлажденіе. Приэтомъ, кометы разсматриваются какъ тѣла чуждыя солнечной системѣ, приходящія изъ другихъ пространствъ и системъ. ² Строгія, математически обставленные, дедукціи въ отношеніи къ разсматриваемой гипотезѣ доселѣ невозможны, ибо не имѣется пути для вывода теперешнихъ мѣстъ планетъ изъ допущенія прежнихъ положеній разсѣянной матеріи, а это, еслибы могло случиться, требовало бы математическаго изслѣдованія закона процесса группировки и развитія, изъ предположенной формы системы, измѣненія этой формы—положительно и точно, слѣдовательно, не просто въ неопредѣленныхъ чертахъ. Тѣмъ не менѣе, эта гипотеза неизбѣжна, ибо заключенія къ прежнему состоянію отъ настоящаго и отъ слѣдовъ процессовъ образованія не допускаютъ никакого другаго способа представленія.

Космическая механика, не только по объему, но и по существу дѣла, есть нѣчто большее механической теоріи солнечной системы. Но это грандіозное понятіе, вмѣщающее въ своихъ рамкахъ вселенную, на дѣлѣ наполнено лишь немногими опредѣленными представленіями. Ошутимость закона тяготѣнія во взаимныхъ передвиженіяхъ двойныхъ звѣздъ есть единственный рѣшительный пунктъ, на который можно смотрѣть какъ на все болѣе и болѣе

¹ Сочиненія Т. VI (1846), Note 7, Стр. 470—479.

² Ibid стр. 475.

обеспечиваемое новѣйшими наблюденіями распространіе механическихъ принциповъ на космическія массы. Кромѣ того, точнаго представленія о причинахъ формъ системъ неподвижныхъ звѣздъ, и прежде всего млечнаго пути, слѣдуетъ искать тоже въ механическихъ принципахъ, слѣдовательно въ сочетаніи вращенія съ тяготѣніемъ. То обстоятельство, что эти формы, далеко не похожія на шарообразныя, напротивъ того приближаются къ типу распорядка въ одной плоскости, есть механическій намекъ на то, что дѣйствительно можно дедуцировать изъ предположенія вращенія въ извѣстной мѣрѣ, слѣдуя общей схемѣ. Лапласовская неизмѣняемая плоскость можетъ, съ этой точки зрѣнія, получить еще болѣе широкое значеніе, чѣмъ она имѣла прежде.

Пока мы ограничиваемся какою-либо системою неподвижныхъ звѣздъ или группами таковыхъ, и даже вообще частями или кусками вселенной, оставляя въ сторонѣ другія системы и массы рядомъ съ ними,—пока, слѣдовательно, предметомъ примѣненія механическихъ принциповъ мы дѣлаемъ не всю природу, до тѣхъ поръ нѣкоторыя слѣдствія будутъ невозможны и весьма важныя теоремы въ этомъ направленіи будутъ бесплодны. Чтобы измѣнить не только внѣшніе размѣры, но и родовой характеръ примѣненій механики ко вселенной, должны быть универсально завершены самыя понятія. Прежде всего, это формально возможно и отчасти уже—фактъ, поскольку наприм. механическіе принципы сохраненія относятся къ совокупности всѣхъ существующихъ, хотя бы и неошутимыхъ силъ природы. Ранѣе разсмотрѣнное положеніе, что центръ тяжести, другими словами, центръ массъ вселенной долженъ покоиться, ибо въ системѣ природы всѣ силы — внутреннія, и что, слѣдовательно, движеніе его по инерціи, соотвѣтствующее математическому постоянному, должно быть нулемъ; — теорема эта не единственная, какая можетъ быть формулирована относительно совокупности всѣхъ массъ природы и механическихъ силъ природы. Природа, какъ цѣлое, если отвлечься отъ иныхъ ея качествъ, есть механическая система, и такъ какъ, кромѣ ея, не предполагается ничего механическаго, должна носить въ себѣ общія свойства механической системы и притомъ въ принципиальной опредѣленности, возникающей вслѣдствіе отсутствія предположенія внѣшнихъ силъ. Если разсматривать часть системы, то можетъ быть вопросъ о дѣйствіяхъ, исходящихъ отъ другихъ системъ; но этого не можетъ быть относительно системы всѣхъ системъ. Этотъ переходъ отъ части къ цѣлому имѣетъ нѣкоторое сходство съ тѣми математическими процедурами, въ которыхъ множество разсматривается какъ нѣчто неограниченное, но впрочемъ онъ имѣетъ дѣло не съ понятіемъ непрерывно

неограниченнаго или дискретной безконечности. Механическая система можетъ стать универсально всеобъемлющею, но не должна быть мыслима безконечною, если она должна сохранить смыслъ и оставаться предметомъ примѣненія принциповъ; а слѣдовательно и вычисления съ по крайней мѣрѣ гипотетическими массами и силовыми количествами. Неограниченность матеріальныхъ центровъ дѣйствія, дающихъ для нѣкоторой точки ряда даже при неограниченномъ суммированіи силовыхъ дѣйствій результатъ, не превышающій нѣкотораго предѣла, во всякомъ случаѣ допустима и можетъ даже повести къ въ высшей степени важнымъ воззрѣніямъ на мѣру относительной независимости механическихъ частныхъ системъ. Такимъ приемомъ можно вполне обезпечить себя противъ нелѣпостей, связанныхъ съ понятіемъ скопленія массъ, соответствующаго обычному представленію безконечности пространства. Но при этомъ никоимъ образомъ не слѣдуетъ забывать, что законченная безконечность, во всякомъ случаѣ, такая же нелѣпость, какъ и концепція невозможности, содержащаяся въ выраженіи «послѣднее число числоваго ряда».

186. Механическій космосъ простирается настолько, насколько матерія и движеніе могутъ быть осязаемы или должны быть предполагаемы. Онъ дѣйствительно представляетъ, соотвѣтственно древнему значенію слова, механическій порядокъ, въ своемъ родѣ неограниченно обнимающій все существующее. Игра особыхъ формъ въ царствѣ организмовъ и жизни не исключаетъ законовъ механики, но включаетъ ихъ. Но прежде, чѣмъ мы перейдемъ къ этому другому крайнему концу приложенія механическихъ принциповъ, мы еще должны коснуться отношенія механики къ физикѣ. Это отношеніе болѣе и болѣе принимаетъ такую форму, что рациональнѣйшее содержаніе физики выступаетъ все рѣзче и рѣзче, какъ прикладная механика. Акустика есть та часть физики, которая прежде другихъ строжайшимъ и непосредственнѣйшимъ образомъ способна была усвоить себѣ принципы механики. Съ извѣстной точки зрѣнія, она весьма существенными элементами своего содержанія стоитъ еще внутри обычныхъ отграниченій самой механики; ибо аэро-статика и аэродинамика или вообще механика газовъ причисляется къ области чисто механическихъ теорій. Но если послѣдовательность дедукціи изъ механическихъ принциповъ въ определенной формѣ приемовъ, прогрессирующихъ благодаря анализу, дѣйствительно гдѣ-нибудь должна оборваться, и если и менѣе определенный способъ заключенія, гдѣ не прибѣгаютъ къ настоящему вычисленію, не вездѣ можетъ быть достаточенъ, то основаніе этому слѣдуетъ искать въ несовершенствѣ разработки теорій, и этотъ недо-

статокъ еще не могъ быть устраненъ въ весьма существенныхъ чисто механическихъ теоріяхъ.

Вышеуказанный недостатокъ прежде всего касается теоріи движенія въ сопротивляющихся срединахъ. Фактъ, что Дирикле обычныя представленія въ этой области оставилъ подъ сомнѣніемъ, характеристиченъ. Впрочемъ, еще со временъ Ньютона сопротивление срединъ гипотетически рассматривали прежде всего въ двухъ случаяхъ, а именно полагая, что оно пропорціонально или скорости, или квадрату ея. Эта двойственность общематематическаго допущенія, какъ и совершенная общность представленія, въ силу котораго сопротивление среды рассматривается вообще какъ вполнѣ неопредѣленная функція скорости тѣла, движущагося въ средѣ, показываетъ также, что теорія, которая соотвѣтствовала бы опытнымъ свойствамъ газообразно-или капельно-жидкой среды, нуждается еще въ болѣе опредѣленномъ формированіи.

Если уже движеніе въ сопротивляющихся срединахъ, физически вполнѣ доступныхъ и существованіе которыхъ нисколько не гипотетично, представляетъ трудности, то затрудненія въ случаѣ гипотетическихъ срединъ должны быть еще больше. Сверхъ того, движеніе твердаго тѣла въ жидкости есть еще простѣйшая задача, и какъ скоро осилены будутъ различныя комбинаціи по отношенію къ различнымъ состояніямъ плотности и ихъ взаимнымъ отношеніямъ, то откроются виды и на преодоленіе трудностей, увеличивающихся не только въ объемѣ, но и въ отношеніи родового характера. Всего успѣшнѣе дѣло шло пока въ общей механической теоріи распространенія колебательнаго движенія. Это ученіе обнимаетъ всѣ состоянія агрегаціи, хотя для газообразныхъ системъ оно разработано, относительно говоря, всего совершеннѣе. Распространеніе звука въ газообразныхъ, капельно-жидкихъ и твердыхъ тѣлахъ даетъ здѣсь характеристичный главный примѣръ широты примѣненія чисто механическихъ принциповъ. Но этотъ примѣръ показываетъ также, какого труда стоило и сколько времени потребовало формированіе теоріи соотвѣтственно фактамъ. Ньютоновскіе результаты касательно скорости звука въ воздухѣ должны были прежде подвергнуться Лапласовскому исправленію, гдѣ въ расчетъ принималась теплота ¹, а это усмотрѣніе касательно теплоты, въ свою очередь, должно было быть освѣщено новѣйшими теоріями о механической природѣ тепловыхъ процессовъ.

Вообще, положенія о распространеніи колебательнаго движенія суть ничто иное какъ основныя черты теоріи сообщенія механиче-

¹ Mécanique céleste, т. V Сочиненій (1846), книга XII, гл. 3.

скаго движенія въ какихъ угодно механическихъ системахъ какого угодно состоянія агрегаціи. Но, при ближайшемъ изслѣдованіи, самая агрегація есть понятіе, включающее весьма многое. Простая плотность еще не рѣшаетъ вопроса, и разсмотрѣнію подлежатъ самые распорядки и силовыя отношенія. Сверхъ того, вспомнимъ, напримеръ, хоть различія кристаллизаціи, которыми обуславливается различная форма сообщенія движенія по различнымъ направленіямъ. Тѣмъ не менѣе, распространеніе чисто механическаго пониманія прогрессируетъ благодаря тому, что общія схемы сообщенія колебательнаго движенія выдѣляются и предпосылаются какъ специальная механическая теорія, а не оставляются въ связи съ тѣмъ матеріаломъ, какой въ области физики могъ бы соотвѣтствовать специфическимъ свойствамъ различныхъ срединъ.

Разсматриваемые успѣхи, очевидно, зависятъ отъ того, что ранѣе значительное расширеніе объема испытала гидродинамика въ обширнѣйшемъ смыслѣ слова, слѣдовательно, со включеніемъ механики газовъ. Но если припомнимъ, что форма трехоснаго эллипсоида, какъ общая форма равновѣсія жидкой массы при возможно простѣйшемъ предположеніи, константирована была только Якоби, и что основная форма собственно динамическаго отношенія такой массы была лишь въ послѣдствіи установлена Дирикле, то легко видѣть, что общая механическая теорія, разсматривающая всякое тѣло какъ среду, и позволяющая, точно и механически дедуцируя, хотя-бы лишь въ болѣе опредѣленныхъ основныхъ чертахъ обобщать развитіе дѣйствующихъ на ея части двигательныхъ аффекцій, а не просто ихъ переносъ, — что такая теорія относится уже къ весьма далеко хватающимъ концепціямъ. Несмотря на это, въ виду общности этого способа представленія, нельзя не ознакомить съ этою чистою формою способа примѣненія механическихъ принциповъ и не указать, такимъ образомъ, побужденій, отъ которыхъ можно ожидать болѣе широкаго распространенія существующихъ пока границъ знанія, долженствующаго принадлежать къ области прикладной механики.

Какія трудности механика жидкостей, взятая въ формѣ раціональныхъ выводовъ, представляла бы даже для извѣстнѣйшихъ срединъ, какъ скоро, заключая и вычисляя, пожелаали бы слѣдить за движеніемъ отдѣльныхъ частицъ, показываетъ примѣръ водяныхъ волнъ, экспериментальное изслѣдованіе которыхъ братьями Веберъ¹ даетъ возможность судить о томъ, чего потребовалось бы отъ раціональной механики, чтобы познать наблюденныя движенія частицъ какъ необходимость. Правда, молекулярная механика, въ сущности,

¹ E. H. и W. Weber, Wellenlehre, Leipzig, 1825.

совсѣмъ не включаетъ болѣе опредѣленнаго познанія атомистическаго или молекулярнаго строенія срединъ и тѣлъ; но она предполагаетъ, чтобы частицы можно было мыслить какъ остающіяся при движеніи совмѣстно и какъ самостоятельныя въ этомъ родѣ массы. Итакъ, трудность примѣненія механическихъ принциповъ къ частичному движенію состоитъ, главнымъ образомъ, въ препятствіяхъ, являющихся на пути самостоятельнаго движенія частички. Уже отграниченіе понятія самостоятельно движущейся частицы требуетъ здѣсь нѣкоторой осмотрительности; ибо тамъ, гдѣ не дѣлается никакихъ ссылокъ на какое-либо гипотетическое строеніе среды, по меньшей мѣрѣ, необходимо мыслить частицу какъ носительницу движенія, одинаково аффицирующаго съ неограниченнымъ приближеніемъ всѣ составляющія ее частицы, причемъ внутри частицы слѣдуетъ допустить аффекціи второго порядка. Это будетъ соответствовать требованіямъ математическаго исчисленія, и для строгости этого представленія уже нѣтъ надобности допускать, чтобы эта неограниченность существовала сама по себѣ. Приближеніе должно быть лишь таково, чтобы можно было пренебречь эффектами второго порядка въ отношеніи къ общему движенію совокупной частицы массы, какъ количественно незначительными. Въ такомъ случаѣ дифференціальныя методы, конечно, превратятся въ способы приближенія съ опредѣленною степенью точности; но эти приближенія таковы, что предѣлы ихъ могутъ быть измѣрены, и потому они дадутъ вполнѣ надежныя заключенія объ общемъ результатѣ. Такимъ образомъ, съ этой стороны примѣненіямъ механическихъ принциповъ; если оставить въ сторонѣ строеніе различныхъ веществъ, противостоятъ только трудности такой математической разработки, при которой всегда остается возможность подтвержденія, на каждой стадіи развитія, равнымъ образомъ не легко дающимися наблюденіями.

Болѣе тщательное изслѣдованіе покажетъ, что частицы, если разсматривать ихъ такъ, какъ обыкновенно принимаютъ ихъ механики и физики, суть просто математическія отграниченія тѣлъ. Но такія чисто-механическія или физическія молекулы можно считать лишь временнымъ суррогатомъ химико-физическихъ частицъ. Если мы желаемъ идти впередъ, тѣсно примыкая къ фактамъ опыта, мы должны принимать въ соображеніе химико-атомистическое строеніе, какъ его даютъ новѣйшія теоріи. Мы должны различать одноатомныя молекулы и одноатомныя состоянія матеріи отъ многоатомныхъ, и нѣтъ такой механической разработки, если она должна что-либо давать, которая не шла бы путемъ химическаго индивидуализированія понятія о самостоятельныхъ частицахъ различныхъ порядковъ,

т.-е. той или другой простоты или сложности. Въ нашихъ «Новыхъ основныхъ законахъ, серія II» эта метода обставлена новыми средствами и повела къ результатамъ, характеръ которыхъ будетъ очерченъ далѣе.

О частичномъ движеніи нужно сдѣлать еще одно замѣчаніе, относящееся къ понятію колебанія. Обыкновенно колебанія, чистоматематически, относятъ къ малымъ массовымъ отграниченіямъ срединъ или вообще тѣлъ, а слои, при этомъ представляемые, воображаютъ себѣ произвольной величины или, что тоже, малости. Но если при колебаніяхъ представлять себѣ качающимися индивидуальныя частицы, то этимъ мы еще не достигли бы послѣдняго и простѣйшаго съ механической точки зрѣнія. Всякое колебаніе, какъ таковое, въ отношеніи къ причинамъ своего возникновенія есть нѣчто сложное. Сюда относится возникновеніе собственной скорости движущагося тѣла или частицы, и затѣмъ сила, исчерпывающая эту скорость, такъ что должно наступить обратное дѣйствіе. Всякій маятникъ указываетъ на это; но, кажется, по большей части забываютъ, что колебаніе есть уже сложная форма движенія. Моторная теорія тѣлъ, какъ послѣдняя инстанція, а слѣдовательно и моторная теорія всякихъ состояній агрегации и срединъ, не должна бы была считать понятія колебанія послѣднимъ понятіемъ, но должна бы была сводиться на атомы, атомныя группы, силы и произведенныя количества движенія.

187. Такъ какъ колебательное движеніе образуетъ основную механическую форму всякихъ взаимныхъ частичныхъ отношеній, которыя обыкновенно разсматриваются какъ нарушеніе устойчиваго состоянія равновѣсія, и такъ какъ способы дѣйствія природы при матеріальномъ переносѣ механическихъ дѣйствій, въ концѣ концовъ, всегда можно свести къ малымъ колебаніямъ, то здѣсь еще должно припомнить объ одной знаменитой специальной задачѣ, которая сдѣлалась исходнымъ пунктомъ важнаго способа представленія о сложеніи колебаній. Даниилъ Бернулли, выводя въ своей статьѣ о сложеніи и сосуществованіи простыхъ колебаній¹ общія слѣдствія изъ начатой Тайлоромъ проблемы о колебаніи струнъ, абстрагируя отъ направленій, намѣченныхъ, въ д'Аламберовскихъ и Эйлеровскихъ опытахъ, пришелъ къ идеѣ, которая особенно новѣйшею акустикой снова выдвинута на первый планъ. Онъ выставилъ эту идею какъ совершенно общую теорему, которая, съ чи-

¹ Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones qui peuvent coexister dans un même système de corps. Histoire de l'académie de Berlin за 1753 г.

сто-механической точки зрѣнія и отвлекаясь отъ всякихъ приложений, имѣла бы силу для всякой системы тѣлъ, колеблющихся подъ вліяніемъ взаимодѣйствій. Въ концѣ своей работы ¹ онъ счелъ нужнымъ выразить эту новую истину механической физики такъ: «въ каждой системѣ взаимныя движенія тѣлъ всегда представляютъ смѣсь простыхъ, правильныхъ и сохраняющихся колебаній разнаго рода...»

Это такъ называемое сосуществованіе малыхъ колебаній не казалось Лагранжу ² мыслью ясною во всѣхъ отношеніяхъ, и, кажется, только позднѣйшее математическое пополненіе аналитическихъ формъ пониманія разсматриваемыхъ отношеній со стороны Фурье ³, въ связи съ направлениемъ, какое приняты соотвѣтственные акустическіе эксперименты и анализъ звука по почину Георга Ома ⁴, привело къ тому, что не только неопровержимое ядро Бернуллиевской идеи, но и доседѣ связанныя съ нею, по меньшей мѣрѣ, двусмысленныя представленія считаются въ физикѣ не подлежащими болѣе сомнѣнію основами сужденій.

Гораздо удовлетворительнѣе было бы сформировано это въ высокой степени важное ученіе о сложении простыхъ качаній, еслибы, опираясь на строгую концепцію дифференціальныхъ понятій, согласились бы вывести всѣ слѣдствія изъ той простой истины, что самостоятельная матеріальная частица всегда можетъ описывать только одинъ путь. Слѣдуя этому, сосуществованіе малыхъ качаній, во-первыхъ, не можетъ имѣть никакого инаго смысла, какъ существованіе движеній вообще. Мысль о сложении самостоятельно существующихъ движеній, аффицирующихъ одну и ту же частицу, если совершенно отвлечься отъ спеціальнаго случая малыхъ

¹ Ibid. Art. 18.

² Мéc. anal. т. I (1811). Динамика, отд. VI, Art. 47 и 59.—Ср. также краткую исторію задачи о колебаніи струнъ у Лагранжа въ „Recherches sur la nature et la propagation du son“, впервые въ Miscellanea Taurinensia, т. I (1759); также въ Oeuvres de Lagrange, т. I (1867) Art. 11 и сл., стр. 61 и сл.

³ Въ Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822; см. особенно Art. 230, гдѣ исполненіе Бернуллиевскаго предположенія о разложимости функции въ рядъ синусовъ и косинусовъ кратныхъ дугъ намѣчается какъ принципъ строгаго и полнаго рѣшенія этой задачи.—Слѣды Фурьеровскаго метода изслѣдованія малыхъ колебаній, впрочемъ, находятся уже въ его Mémoire sur la statique etc. Journal de l'école polytechnique, т. II (до VI).

⁴ Въ его, по поводу Зеебековскихъ опытовъ написанной, статьѣ „Ueber die Definition des Tones“, Poggendorfs Annalen т. 59 (1843) и т. 62 (1844). Ср. въ первомъ отдѣлѣ статьи особенно § 4 (т. 59) стр. 519, гдѣ находимъ примѣненіе теоремы Фурье. Омовскія идеи и работы относительно того, что теперь называютъ тембромъ, служатъ источникомъ того, что воспроизведено въ „Lehre von den Tonempfindungen“ Гельмгольца, подробно и экспериментально.

колебаний,—мысль эта, уже чисто принципиально и въ отношеніи къ простѣйшей схемѣ форонической комбинаціи и соотвѣтственнаго силового отношенія, только въ такомъ разѣ можетъ имѣть совершенно точный результатъ, если представлять себѣ предметомъ реального сложения не двигательныя явленія, но предшествующіе имъ побуды. Въ такомъ случаѣ, сюда присоединяется возможность—единое и цѣльное явленіе движенія разлагать чистымъ актомъ представленія, напр. разсматривая въ этомъ явленіи только то, что соотвѣтствуетъ опредѣленной координатѣ или вообще опредѣленной точкѣ зрѣнія. Въ такомъ разѣ существуютъ заразъ не многообразныя явленія движенія, но одинъ и тотъ же реальный процессъ, основывающійся на сложении импульсовъ къ движенію, причемъ ему соотвѣтствуетъ только одинъ единственный существующій самъ по себѣ или, другими словами, одинъ путь, относимый къ общему пространству и къ универсальной системѣ механическихъ мѣстъ, и такой процессъ можетъ показать намъ какую-либо изъ своихъ естественныхъ составныхъ частей, какъ особое явленіе движенія, благодаря въ высшей степени интересной способности отвлеченія, какая можетъ проявить свою дѣятельность въ нашихъ пространственныхъ представленіяхъ.

Такой способъ перевода реальныхъ двигательныхъ импульсовъ въ одностороннія построенія явленій движенія можетъ быть источникомъ обмана, какъ будто бы эти частные двигательные феномены существовали совмѣстно и одновременно въ различныхъ путяхъ. Однакоже, такой нелѣпости, являющейся результатомъ этого обмана, допустить нельзя, пока остается сознаніе о томъ, что указанное раздѣленіе, на которомъ зиждется особое парціальное представленіе, сводится къ представленію одной части и къ построенію одной части общаго реального процесса. Въ виду чрезвычайной важности, какую имѣетъ ясная постановка означеннаго различія для пониманія механики природы, вспомнимъ и здѣсь о томъ феноменальномъ методѣ, которымъ пользовался Гюйгенсъ при доказательствѣ законовъ удара, на общее значеніе котораго мы уже ранѣе (§ 70 и сл.) обращали вниманіе людей разсудительныхъ. Впрочемъ, въ разсматриваемомъ здѣсь примѣненіи этихъ точекъ зрѣнія рѣчь идетъ преимущественно не о кажущихся движеніяхъ, но о естественныхъ ограниченіяхъ и группировкахъ парціальныхъ явленій движенія, для которыхъ возможность отдѣльнаго воспріятія имѣетъ и естественныя, а не только искусственныя основанія, и даже въ общемъ чувственномъ воспріятіи физическихъ процессовъ дѣлается необходимостью. Если указаннымъ путемъ устранить неудобства, связанныя съ обличною шаткою концепціей совмѣстнаго существованія нѣсколькихъ

движеній и, въ частности, съ недостаточнымъ представленіемъ о такъ называемомъ сосуществованіи малыхъ колебаній, то указанное Данииломъ Бернулли разложеніе вполне оправдывается, и рациональная физика имѣтъ причины, подобно самой общей механикѣ, искать расширенія своихъ воззрѣній и рѣшенія труднѣйшихъ задачъ на такомъ пути, на какомъ не должно бы было пренебрегать аналогіями направленій и методовъ, употребляемыхъ въ теоріи малыхъ колебаній. Впрочемъ, болѣе полного и въ приложеніяхъ болѣе удобнаго метода разработки механическихъ проблемъ слѣдовало бы искать собственно не въ приближеніяхъ, а скорѣе въ систематическихъ отождествленіяхъ принципіальныхъ и простыхъ процессовъ механики природы, если только вообще хотять, къ чему, кажется, и стремился Дирикле, далѣе развивать слѣдствія въ направленіи, начатомъ Данииломъ Бернулли и математически пополненнымъ Фурье.

Въ дополненіе къ предыдущему очерку, въ которомъ данъ историческій эскизъ состоянія вопроса, прибавимъ, что существенно важно рѣзко отдѣлять чисто-аналитическую сторону дѣла отъ вещественнаго истолкованія ея. Что касается первой, то главный результатъ не можетъ подлежать ни малѣйшему сомнѣнію; что же касается втораго, то нельзя отрицать яснаго положенія, что движенія или существуютъ независимо одно рядомъ съ другимъ, или что они, или, скорѣе, ихъ импульсы соединяются какъ въ параллелограммѣ силъ. Примѣсь физиологіи и чисто-субъективныхъ процессовъ, какъ вещь неумѣстная и какъ субъективистически-философская традиція, идущая еще отъ 17-го столѣтія, подлежитъ радикальному искорененію. Эти неумѣстныя направленія не имѣютъ ничего общаго съ Гюйгенсовскимъ методомъ и не относятся туда, гдѣ рѣчь идетъ о предметахъ общей механики и физики или вообще о иныхъ абсолютно объективныхъ обстоятельствахъ, которыхъ характеръ опредѣляется самъ собою и, слѣдовательно, независимо отъ того, вошелъ ли онъ въ сознаніе или нѣтъ.

Что же касается вышеупомянутаго примѣненія всякой теоріи малыхъ колебаній въ общемъ механическомъ смыслѣ, то оно можетъ имѣтъ значеніе, которому отчасти отвѣчалъ уже Лагранжъ своимъ методомъ послѣдовательныхъ приближеній въ Аналитической Механикѣ. Дальнѣйшее проведеніе этого метода или даже лишь спеціальное пользованіе имъ могло носиться въ умахъ математиковъ—эпигоновъ, а интимныя бесѣды ихъ съ другими, которые понимали еще меньше и потому не понимали первыхъ, могло породить басню, будто бы профессоръ Дирикле носилъ въ головѣ и общій методъ рѣшенія задачъ механики при посредствѣ послѣдовательныхъ приближеній, но яко бы этотъ методъ онъ такъ и унесъ съ собою

въ могилу. Но по нѣкоторымъ соображеніямъ я вполне убѣжденъ, что никакой такой методы у него не было, да и самъ онъ не утверждалъ этого, а просто говорилъ объ аналогіяхъ сказаннаго общаго метода механики, указаннаго Лагранжемъ и затѣмъ приложеннаго къ частному случаю малыхъ колебаній.

88. Распространеніе механическихъ принциповъ на область, на первый взглядъ, повидимому, неоднородную, не ограничилось составившимъ эпоху и изслѣдованнымъ нами преобразованіемъ теоріи теплоты, но перенесено и на электродинамику, и это болѣе и болѣе частію измѣняло, частію могло бы измѣнить ея форму. То, что сдѣлано въ этомъ отношеніи начиная съ Ампера, связано главнымъ образомъ съ работами Вильгельма Вебера ¹, позднѣйшія формулированія ² коихъ дали поводъ къ кое-какимъ вариантамъ на ту же тему, но все еще являются единственнымъ солиднымъ зерномъ. Особенность этой области приложенія состоитъ въ томъ, что взаимодействие электрическихъ частицъ мыслится зависящимъ не только отъ ихъ положенія и разстоянія, но и отъ существующихъ скоростей. Развѣтіе представленій о потенциальной функціи, разработанныхъ Гриномъ уже въ Essay 1828 г. ³ специально въ примѣненіи къ области электричества, слѣдовательно, совершенно общія теоремы, выставленныя Гауссомъ и позднѣе относительно силъ, дѣйствующихъ обратно пропорціоально квадрату разстояній, для извѣстнаго рода количествъ дѣйствія, — это выставленіе опредѣленныхъ функціональных формъ силовыхъ отношеній нѣсколько содѣйствовало приданію, въ нѣкоторой мѣрѣ, механическаго типа идеямъ о математическомъ формулированіи количествъ электродинамическаго дѣйствія и формъ этого дѣйствія.

Принимая въ соображеніе результаты, доселѣ выработанные касательно представленій о физическихъ притягательныхъ и отталкивательныхъ дѣйствіяхъ свободныхъ массовыхъ частицъ, — дѣйствіяхъ, существующихъ кромѣ тяготѣнія, слѣдуетъ смотрѣть на законъ силы, обратно пропорціоальной квадрату разстоянія, какъ на элементъ всякихъ взаимныхъ дѣйствій на разстояніи ⁴. То, что при-

¹ Elektrodynamische Maassbestimmungen, Leipzig 1846, 2 изд. 1867 г.; въ сокращенномъ видѣ, подъ тѣмъ же заглавіемъ, въ Анналахъ Поггендорфа, т. 73 (1848), стр. 193 и слѣд.

² Въ статьѣ В. Вебера: „Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung“, тамъ же, т. 136 (1869) стр. 485 и слѣд. и „Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie“, Записки Саксонскаго Ученаго Общества, т. X (1871).

³ Напечатано въ G. Green, Mathematical Papers, London 1871.

⁴ Ср. введеніе цитированной нами въ § 168, прим. 3, статьи Гаусса.

бавилось бы къ этой основной формѣ, если разсматривать и существующія скорости, или что предполагалось уже въ первыхъ изслѣдованіяхъ этихъ основныхъ отношеній, если принимать въ расчетъ время распространенія, касается общаго механическаго отношенія не настолько, чтобы главное содержаніе законовъ могло пострадать отъ этого рода обобщеній или пополненій. Такимъ образомъ то, что при новыхъ примѣненіяхъ и при воздѣйствіи ихъ на существующіе принципы дѣйствительно можетъ еще составлять вопросъ, относится не къ значенію схемъ силовыхъ дѣйствій, какъ онѣ признавались доселѣ, но къ измѣненіямъ и къ обобщеннымъ формамъ, которыя вполне мирились бы съ наличнымъ по сіе время опытомъ, но для прежнихъ способовъ представленія и вывода могли бы оставаться безразличными.

Нельзя не упомянуть о фактѣ, что вышеупомянутое формулированіе электродинамическаго способа дѣйствія В. Веберомъ вводитъ разложеніе, въ силу котораго то, что называютъ электростатическимъ потенціаломъ, стоитъ въ нѣкотораго рода дополнительномъ отношеніи къ части общаго выраженія, происходящей отъ существующей скорости. Это отношеніе имѣетъ болѣе общую, механически принципиальную сторону, поскольку оно совпадаетъ съ представленіями, предполагающими взаимную эквивалентность между статическимъ отношеніемъ и двигательнымъ эффектомъ. Такимъ образомъ, представленія о сохраненіи и превращеніи, соотвѣтствующія новѣйшимъ идеямъ, примѣнимы и здѣсь. Правда, что касается послѣднихъ выводовъ, то Веберовская потенціальная формула, простѣйшимъ образомъ выражающая, въ видѣ двухъ членовъ, видоизмѣненіе его принципа притяженія, равно и построеніе этой формулы изъ обоихъ допущенныхъ имъ основныхъ законовъ электричества, оставляетъ желать кое-чего въ отношеніи ясности; что же касается суррогатовъ и подражаній, благодаря которымъ первообразъ оставался въ тѣни, то хотя они и нашли себѣ широкое мѣсто въ учебникахъ, но въ нашемъ трудѣ о нихъ упоминать не слѣдуетъ.

Космическая механика, вслѣдствіе видовъ, открывающихся на примѣненіе механическихъ принциповъ специально къ физикѣ, должна бы собственно расширяться до понятія космически-механической физики или космически физической механики. И въ самомъ дѣлѣ, новѣйшія точки зрѣнія уже въ значительной мѣрѣ приближаются къ этой идеѣ. Стоитъ только припомнить предложенную Ю. Р. Майеромъ ¹ метеорную теорію солнечной теплоты, по которой механи-

¹ Статьи по динамикѣ неба, 1848, помѣщены въ «Механикѣ теплоты», Штутгартъ 1867.

ческое дѣйствіе малыхъ массъ, разсѣянныхъ въ области солнечной системы и подконецъ низвергающихся на солнце, возмѣщаетъ непрерывно теряемую теплоту, развивая при ударѣ тепловое дѣйствіе, превосходящее эффекты горѣнія. Допущеніе такого космическаго процесса, посредствомъ котораго образованіе солнечной теплоты представляютъ себѣ прямо поддерживающимся безъ окончательной потери, допущеніе это—настоящее механическое; ибо здѣсь говорится лишь о количествѣ механическаго дѣйствія или, говоря аналитически, живой силы, которой расходъ или, лучше, распространеніе въ одномъ направленіи возмѣщается соотвѣтствующимъ приходомъ ея съ другой стороны. Космическій механизмъ, до толѣ извѣстный только съ точки зрѣнія тяготѣнія, сталъ этимъ самымъ нѣсколько понятнѣе и въ термическомъ отношеніи. Поэтому, значеніе этой новой Майеровской точки зрѣнія состоитъ, въ сущности, въ сведеніи космической теплоты къ болѣе грандіозному космически-механическому соединенію тѣлъ, котораго прежде не существовало. Соединеніе матеріи посредствомъ нѣкоторыхъ силъ и вслѣдствіе этого произвожденіе теплоты путемъ уплотненія есть представленіе, возникшее изъ Майеровскаго путемъ подражанія и обобщенія, но далеко ниже его какъ по простотѣ и ясности, такъ и вообще по своему механическому характеру. Впрочемъ, въ видахъ критики всей постановки этого вопроса, отсылаю къ сказанному въ концѣ § 178.

Всѣ части механической физики видимо стремятся ко взаимной поддержкѣ, и съ тѣхъ поръ какъ, благодаря новой наукѣ спектральнаго анализа, свѣтъ сдѣлался средствомъ къ распознаванію химическихъ отношеній и даетъ важныя заключенія о процессахъ и фактахъ на солнцѣ, должна была родиться мысль о серьезномъ распространеніи собственно механики и въ этомъ направленіи¹. Связь различныхъ физическихъ, даже химическихъ силъ, которыя всѣ имѣютъ механической основной характеръ и своею дѣятельностью представляютъ извѣстное механическое силовое количество, должна составлять здѣсь мостъ къ новымъ результатамъ приложе-

¹ Положеніе, что поглощательная и испускательная способности по отношенію къ свѣту и теплотѣ для всѣхъ тѣлъ одинаковы при той же температурѣ, напоминаетъ о не несущественныхъ отношеніяхъ возможности чисто-механическихъ способовъ воззрѣнія. Разсматриваемое предположеніе было распространено Кирхгофомъ на всѣ роды лучей; см. G. Kirchhoff „Über das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht“, *Анналы Поггендорфа* т. 109 (1860), стр. 275. О примѣненіи этого положенія ср. также Кирхгофа „*Untersuchungen über das Sonnenspectrum*“ въ *Запискахъ Берлинской Академіи* за 1861 г. стр. 77.

нія. Выполнимость такого приложенія будетъ завистъ отъ полученія болѣе точныхъ механическихъ эквивалентовъ для всѣхъ формъ дѣйствія и особенно отъ сближенія механики вѣсмага съ механикою пока еще болѣе или менѣе неопредѣленно представляемыхъ срединъ и агентовъ.

189. Все, что бы то ни было, въ послѣднемъ матеріальномъ основаніи есть механизмъ. Несмотря на это, физика, хотя она всего тѣснѣе примыкаетъ къ механикѣ, все еще далеко не сведена къ механическимъ принципамъ даже и въ главныхъ своихъ исходныхъ пунктахъ. Полнаго разрѣшенія физики въ чистую механику даже не намѣчено. Въ большинствѣ случаевъ нужны особые исходные пункты не чисто - механическіе, и нужны будутъ и далѣе. Правда, при помощи чистыхъ понятій времени, пространства, скорости и ускорительной силы, можно, въ концѣ концовъ, объяснить все, поскольку изслѣдованіе и разложеніе не слишкомъ обстоятельны; тѣмъ не менѣе, этими четырьмя исходными пунктами механики не исчерпывается вся физическая сторона природы, не говоря уже о всякой иной дѣйствительности.

Тѣмъ не менѣе, не говоря уже объ общемъ вопросѣ, насколько физикѣ нужны специфически особенные исходные пункты, даже въ тѣхъ ученіяхъ, которыя ближе примыкаютъ къ разрѣшенію въ чисто механическія, нынѣ фактически должно еще держаться, большею частью, другаго способа обработки. Именно, нужно вводить промежуточные или переходные принципы, связывающіе чисто механическія условія съ нѣкоторыми условіями инаго рода; ибо иначе нельзя овладѣть извѣстными задачами и нельзя достаточно глубоко проникнуть путемъ вычисленія.

Примѣры такихъ сложныхъ промежуточныхъ принциповъ, а также и того, чего можно при посредствѣ ихъ достигнуть, содержатся въ нашихъ «Новыхъ основныхъ законахъ физики и химіи», уже въ первой серіи 1878 г., болѣе же обстоятельно въ серіи 1886 г. Сюда относится, во-первыхъ, нашъ совершенно общій законъ промежуточнаго объема, слѣдствія котораго ведутъ даже къ новымъ заключеніямъ о химической атомности. Здѣсь рѣшительную услугу оказало наше термостатическое основное уравненіе, въ которомъ мы впервые приняли въ расчетъ число молекулъ. Другой значительный примѣръ, это—найденный моимъ сыномъ Ульрихомъ законъ парціальныхъ объемовъ, также основывающійся не на сплошь чисто механическихъ представленіяхъ, но изгоняющій изъ науки доселѣ господствовавшія Дальтоновскія ложныя идеи о парціальныхъ давленіяхъ, имѣющихъ, якобы, мѣсто въ смѣси газовъ. Упо-

минутые законы согласуются въ томъ, что кромѣ явно механическихъ понятій содержатъ и другія понятія, для которыхъ еще не найдено надежной механической характеристики. Въ числѣ послѣднихъ понятій особенно выдѣляется понятие о температурѣ; ибо доселѣ еще не удалось удовлетворительно доказать, какимъ образомъ можно его покрыть чисто механическимъ количествомъ, которое можно бы было ввести въ вычисления, оправдать слѣдствіями и вывести изъ него новыя заключенія. По меньшей мѣрѣ, игра съ такъ-называемыми кинетическими умозрѣніями и съ соотвѣствующими сносными гипотезами не можетъ сходить за то, что требуется осмотрительнымъ изслѣдованіемъ въ отношеніи механическаго опредѣленія температуры. При такомъ положеніи дѣла относительно понятія температуры, найденный также Ульрихомъ Дюрингомъ законъ соотвѣственныхъ температуръ плавленія въ такой мѣрѣ физически рационаленъ, въ какой при настоящихъ обстоятельствахъ это возможно, и попытки другихъ замѣнить его производными суррогатами всѣ вообще выглядятъ попытками прямо несостоятельными. Для науки вообще выгоднѣе оставаться при неразрѣшенныхъ промежуточныхъ понятіяхъ, нежели безплодно играть легкомысленными допущеніями. По крайней мѣрѣ, мы, т.-е. мой сынъ и я, нашими «Новыми основными законами» на дѣлѣ доказали, что правильный выборъ промежуточныхъ принциповъ ведетъ дальше, чѣмъ культивированіе, не говорю чистой механики, а лишь ея видимости.

Навѣрное, мы менѣе всего противъ чисто-механическихъ выводовъ гдѣ бы то ни было. Поэтому, если мы въ нѣкоторой мѣрѣ и пошли въ разрѣзъ этому воззрѣнію въ физико-химическихъ изслѣдованіяхъ, то основаніе этому—въ самомъ положеніи дѣла и въ существующихъ пока научныхъ возможностяхъ. Прямо съ такимъ отношеніемъ къ дѣлу связано было, съ другой стороны, рѣшительное проведеніе механическихъ точекъ зрѣнія. Такимъ образомъ, радикальному намѣренію всюду распространять механику отнюдь не противорѣчитъ употребленіе смѣшанныхъ вводныхъ принциповъ.

190. Разъ мы освободились отъ мысли, будто бы особое свойство матеріальныхъ предметовъ исключаетъ примѣненіе механическихъ принциповъ, то тотчасъ же усматриваемъ, что царство организмовъ и жизни не можетъ полагать никакихъ предѣловъ механическому пониманію. Дѣйствіе органическаго формированія при построеніи растений работаетъ съ помощью механическаго силового матеріала и развивается какъ бы въ средѣ общихъ механическихъ процессовъ природы. Аналогичное отношеніе имѣетъ мѣсто и въ

жизненной пластикѣ, когда формируются отношенія животнаго тѣла, а съ этимъ вмѣстѣ мы достигли другаго крайняго конца положенія механическихъ принциповъ. Со времени Борелли ¹ вниманіе къ изслѣдованію чисто-механической законности въ движеніяхъ животныхъ болѣе и болѣе возрастало вмѣстѣ съ развитіемъ самой механики и въ новое время принесло уже плоды въ различныхъ направленіяхъ. Примѣръ, создавшій достойныя замѣчанія основы въ опредѣленномъ направленіи, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вообще для дальнѣйшихъ примѣненій въ этомъ родѣ въ высшей степени поучительный и характерный, представляетъ работа братьевъ Вильгельма и Эдуарда Веберовъ ², въ которой экспериментально показаны чисто-механическія предположенія и обстоятельства, касающіяся употребленія человѣческаго аппарата ходьбы и, насколько это возможно, рачіонально сведены къ механическимъ принципамъ. Здѣсь наприм. не только маятникообразное движеніе ноги, какъ типическій случай предположеній о механическомъ дѣйствіи, но, что уже имѣетъ несравненно большее значеніе, аналогонъ принципа наименьшей затраты силы долженъ поучать насъ, что дѣйствующія въ тѣлѣ причины правильнаго употребленія орудій ходьбы и естественнаго ихъ устройства должно прежде всего разсматривать такъ, какъ бы рѣчь шла о какомъ-нибудь процессѣ неорганической механики ³. Упомянутый принципъ нельзя истолковывать и въ этомъ приложеніи какъ финальный законъ, но, какъ и во всѣхъ другихъ случаяхъ, можно указать для него, какъ вполне удовлетворительное выраженіе, чисто-каузальную необходимость, причемъ на долю дальнѣйшаго изслѣдованія остается указать, подлежатъ ли разсмотрѣнію въ механикѣ организмовъ и особыя основанія, точка зрѣнія цѣли или, другими словами, отношеніе средствъ къ цѣли. Последнее, что могутъ дать чисто-механическіе принципы въ отношеніи характеристики, это—выводъ изъ механическихъ посылокъ опредѣленія признаковъ или предварительныхъ условій извѣстной эстетической фizioноміи походки ⁴; но изъ этого рода возможностей видно, что вообще нельзя дать никакого типа проявленій под-

¹ De motu animalium, 1685, новое изд. Неаполь 1734. Ятромеханическое направленіе того времени соотвѣтствовало основанію динамики и физики. Оно рѣшительнѣйшимъ образомъ содѣйствовало успѣхамъ фizioлогіи, и при болѣе глубокомъ изслѣдованіи нельзя не признать въ немъ аналогіи съ теперешнимъ стремленіемъ рачіональнаго естествознанія къ механическимъ результатамъ.

² Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Götting. 1836.

³ Ср. вышеприведенное сочиненіе, предисловіе стр. VI, о принципѣ «наименьшаго мускульнаго напряженія», затѣмъ о качаніяхъ ноги § 7, § 100.

⁴ См. напр. Ibid. § 139 о важной поступи.

вижныхъ массъ или частей тѣла, который не имѣлъ бы своего, ему свойственнаго, механическаго характера и потому не могъ бы быть мыслимъ всегда какъ нѣчто механически опредѣлимое, хотя и не всегда на дѣлѣ его можно такимъ образомъ надлежаще анализировать. Да въ большинствѣ случаевъ нѣтъ и никакого интереса раскрывать въ мелочахъ механическую конституцію подобнаго типа проявленій; напротивъ, общее предположеніе механической характеризованности состояній, схватываемыхъ, впрочемъ, лишь общимъ эстетическимъ чувствомъ, есть мысль, имѣющая большую цѣнность. Именно, этою мыслью обозначается вполне ясно все значеніе и внутренняя безграничность возможностей механическаго пониманія и вмѣстѣ пунктъ, гдѣ соотвѣтствующее нѣкоторому ощущенію объективное отношеніе вещей можетъ быть предметомъ механическаго изслѣдованія и опредѣленія.

Что касается приложений механическихъ принциповъ къ физиологіи, то слѣдуетъ назвать опять работы Ю. Р. Майера, гдѣ обращено вниманіе на механику теплоты, и особенно его сочиненіе «Движеніе въ органическомъ мірѣ въ его связи съ обмѣномъ вещества»¹. Слѣдствія своей механической теоріи теплоты авторъ сумѣлъ распространить даже на медицинскую физиологію². Вообще не должно забывать, что, по собственнымъ его словамъ³, къ идеѣ о механической теоріи эквивалентности впервые привело его одно физиологическое явленіе. «Лѣтомъ 1840 г., — говоритъ онъ, — при кровопусканіяхъ, которыя мнѣ пришлось дѣлать на Явѣ ново-прибывшимъ европейцамъ, я сдѣлалъ наблюденіе, что кровь, взятая изъ ручной вены, почти во всѣхъ случаяхъ безъ исключенія отличалась въ высшей степени свѣтлою окраскою». Увеличенія или уменьшенія разницы въ окраскѣ обоихъ родовъ крови объяснялъ онъ себѣ, на основаніи теоріи горѣнія Лавуазье, большею или меньшею температурою окружающаго воздуха, съ которою произведеніе теплоты въ тѣлѣ находится въ нѣкотораго рода подвижномъ равновѣсіи. Въ болѣе холодной средѣ потребленіе теплоты больше, а слѣдовательно и во внутренней экономіи произвожденія теплоты тѣломъ должно господствовать усиленное производство и большая разница состояній окисленія крови. Такимъ образомъ, разница въ окраскѣ объясняется механически, поскольку развитіе теплоты въ

¹ Впервые 1845; напечатано и въ Механикѣ теплоты.

² Въ статьѣ «Ueber das Fieber, ein iatromechanischer Versuch» (впервые 1862); также въ Механикѣ теплоты, стр. 129—145.

³ Въ «Замѣткахъ о механическомъ эквивалентѣ теплоты» (1851); въ Механикѣ теплоты, стр. 249.

извѣстномъ количествѣ есть тотъ продуктъ, о которомъ здѣсь прежде всего идетъ рѣчь. Но, не говоря уже объ этомъ способѣ открытія отношенія, которое даже повело къ основанію механической теоріи теплоты, начиная съ Майера все привычнѣе становилось представленіе, что всякую механическую работу живаго тѣла должно бы было разсматривать постольку, поскольку она основывается на эквивалентномъ потребленіи теплоты; и что всякое произвожденіе теплоты живымъ тѣломъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, слѣдовало бы разсматривать какъ механическій актъ, имѣющій своимъ основаніемъ силовой и вещественный фондъ. Посему, процессы и состоянія животнаго тѣла, что касается основъ ихъ происхожденія, болѣе не должны быть мыслимы неопредѣленно, слѣдовательно, не должны быть представляемы какъ бы необъяснимо выступившими изъ ничего, но должны быть обозначены какъ особыя формы механическихъ силъ, вступившихъ въ жизненный процессъ. Слѣдуя этимъ новѣйшимъ представленіямъ, движеніе, какъ и матерія или, иными словами, механическій силовой фондъ, какъ и запасъ вещества, собственно, не производятся, но въ живомъ существѣ только подвергаются опредѣленнымъ превращеніямъ по механическимъ принципамъ и эквивалентностямъ.

Чтобы напомнить о томъ, какимъ образомъ уже прежде опредѣленнѣйшимъ образомъ переносили болѣе спеціальныя механическіе принципы на живое тѣло, обратимъ вниманіе еще на одно, характеристичное своею связью, мѣсто у старшаго Карно ¹. Животное сравнивается здѣсь съ соединеніемъ тѣлецъ, связанныхъ пружинами. Эти пружины, болѣе или менѣе сжатыя, представляли сумму скрытыхъ живыхъ силъ, и въ этомъ случаѣ также не могла бы проявиться никакая сила, которая не предполагалась бы потребленною гдѣ-либо въ другомъ мѣстѣ. Животное не могло бы произвести ни одного движенія безъ того, чтобы не началась игра дѣйствія и противодѣйствія, наприм. относительно земли. Эти представленія, которымъ еще не доставало универсальности того способа мышленія, какой развился недавно, примыкая къ механикѣ теплоты, можно разсматривать какъ примѣръ общей тенденціи ставить механическимъ принципамъ только такія границы, какія даны самою ихъ природою. Примѣры, въ которыхъ общіе принципы механики, какъ наприм. принципъ площадей, примѣняются къ живымъ существамъ, въ настоящее время иногда можно встрѣтить уже какъ средства разъясненія въ учебникахъ аналитической механики.

¹ Principes fondamentaux etc. Paris 1803, Art. 271, стр. 246.

191. Какъ ни далеко, повидимому, отстоятъ другъ отъ друга космическая механика и механика живыхъ существъ, тѣмъ не менѣе, внѣшняя пропасть, раздѣляющая обѣ области вслѣдствіе различія самаго предмета ихъ, далеко не такъ велика, какъ разстояніе внутреннее, какое оказывается, если разсмотрѣть точки зрѣнія, въ силу которыхъ собственно механическіе принципы, дѣйствительно или повидимому, пришли въ соприкосновеніе съ ощущеніями. Прежде всего слѣдуетъ оставить въ сторонѣ чисто-метафорическое употребленіе механическихъ выраженій, какъ, въ большинствѣ случаевъ не имѣющее никакого значенія, причемъ, однако, все-таки могъ бы имѣть интересъ вопросъ о томъ, въ какой мѣрѣ эти механическія метафоры имѣютъ основаніе въ какой-либо болѣе общей характерной чертѣ отношеній. Въ этомъ отношеніи, о которомъ говорить подробно здѣсь не мѣсто, вообще найдемъ, что во всѣхъ существующихъ объектахъ и отношеніяхъ есть нѣчто такое, что только потому можетъ казаться аналогичнымъ собственно механикѣ, что раздѣляетъ съ нею нѣкоторыя весьма общія основныя черты. Но, именно въ виду этой общности чертъ и ихъ всеобщности, область эта не принадлежитъ къ болѣе опредѣленному типу специфической механики, но находится надъ нею, ибо ее должно разсматривать какъ классъ отношеній, которыя или чисто логически и чисто математически, или въ такомъ родѣ схематичны, что имѣютъ отношеніе ко всему существующему безъ различія ¹. Но, очевидно, въ этомъ послѣднемъ случаѣ о собственно специальной механикѣ рѣчь можетъ быть лишь постольку, поскольку предметъ изслѣдованія можетъ быть схваченъ сообразно съ понятіями матеріи, пространственнаго движенія или вообще матеріально механическаго дѣйствія, и, наконецъ, поскольку такимъ же образомъ онъ можетъ быть мыслимъ и измѣреннымъ или, по крайней мѣрѣ, въ такомъ родѣ измѣримымъ и съ извѣстными механическими дѣйствіями сравнимымъ.

¹ Примѣры подобныхъ механическихъ аналогій, но выходящихъ за предѣлы узкой области механики, и именно относящихся къ внутреннимъ побудамъ чловѣческихъ поступковъ и къ силамъ общественной и политической жизни, съ особеннымъ предпочтеніемъ разсматриваются Софією Жерменъ въ небольшомъ, но богатомъ мыслями философскомъ сочиненіи *Considérations sur l'état des sciences et des lettres* (Paris, 1833). Эти аналогіи особенно у этой писательницы достойны замѣчанія, ибо она не только мыслила точно, какъ математически, какъ и естественно-научно, но и сама принимала участіе въ разработкѣ математики интересными специальными работами, которыя удостоились преміи отъ Парижской Академіи; и достоинство ея работъ таково, какое рѣдко встрѣчается у университетскихъ профессоровъ математики въ послѣднемъ поколѣніи.

Переходъ отъ внѣшнихъ процессовъ, принадлежащихъ окружающей природѣ или предварительнымъ стадіямъ въ расчлененіи живого тѣла, — процессовъ, которые можно анализировать механически, — переходъ отъ нихъ къ области ощущенія въ собственномъ смыслѣ, освѣщается интересными опытами и идеями, изъ коихъ нѣкоторыя, открывая собою путь и вмѣстѣ точные факты, въ нѣкоторой мѣрѣ принадлежатъ также и къ области механики. Весьма ясныя объясненія Е. Г. Вебера ¹ въ разсматриваемомъ здѣсь отношеніи стремились, между прочимъ, отъ фактовъ привести къ мысли, что явно механическія стороны чувственнаго ощущенія, слѣдовательно, прежде всего ощущеніе давленія, стоятъ въ нѣкоторомъ точно опредѣлимомъ отношеніи къ объективной величинѣ ощущаемаго факта, какъ напр. вѣса. Опыты, посредствомъ которыхъ, въ вопросѣ о сравненіи вѣсовъ просто рукою, констатируется малѣйшая, еще ощутимая, разность, образуютъ здѣсь точку приложенія. Прибавкамъ къ такимъ малѣйшимъ вѣсовымъ частямъ соотвѣствуетъ повышение ощущенія. Если теперь, основываясь на этихъ опытахъ, выйти отъ допущенія, что всегда должна существовать извѣстная доля каждый разъ дѣйствующаго вѣса, прибавка которой вызываетъ чувствуемый элементъ ощущенія, то во всякомъ случаѣ математическое обобщеніе этого экспериментальнаго отношенія дастъ законъ, выражающій существованіе между величиною внѣшняго факта или раздраженія, вызывающаго ощущеніе, и величиною самого ощущенія, нѣкоторой причинной связи, ближе характеризуемой нѣкоторою математическою функцией. Но эту зависимость между внѣшнею причиною и сознаннымъ ощущеніемъ, въ сущности, слѣдуетъ разсматривать лишь какъ общій, математически нѣсколько точнѣе опредѣляемый типъ отношенія двухъ рядовъ величинъ, отношеніе которыхъ должно сохраняться внутри извѣстнаго промежутка непрерывности. Кромѣ того, экспериментальное содержаніе есть вещь главная, и, если совершенно оставить въ сторонѣ вопросъ о выразимости этого отношенія математическою формулою, то о примѣненіи собственно механическаго принципа не могло бы быть и рѣчи. Итакъ, ясно видно, въ какомъ направленіи слѣдовало бы искать подобныхъ примѣненій.

Механическая физика или физическая механика обыкновенно выходила доселѣ изъ положенія, что съ нервною аффекціей прекращается то, что доступно механическому способу пониманія. Въ

¹ Въ фیزیологическомъ словарѣ Вагнера, т. III, 2 отд. (1846), статья: осязаніе и общее чувство, а въ ней особенно «о малѣйшихъ разницахъ вѣса, какія мы можемъ различать... осязаніемъ», стр. 559. и сл.

узкомъ смыслѣ слова, это вѣрно и имѣетъ силу даже вопреки новѣйшимъ способамъ представленія; ибо ближайшіе аналоги механическихъ процессовъ, имѣющихъ мѣсто по отношенію къ безпорно вѣсомому, очевидно, и въ живомъ тѣлѣ существуютъ только по отношенію къ тому, что проявляется какъ такого же рода силовая реакція на чуждое механическое дѣйствіе того же рода. Однако, уже болѣе тонкія средины и ихъ аффекціи образуютъ новый классъ процессовъ, которые въ болѣе общемъ смыслѣ слова суть явленія механическія, и если разсматриваютъ свѣтъ въ преломляющихъ срединахъ глаза чисто физически, то можно себѣ представить, что и дѣйствія на сѣтчатую оболочку — подобнаго же рода. Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваетъ же оптика живую силу, съ которою гипотетическій эвиръ возбуждаетъ развѣтвленія зрительнаго нерва, и если эта сторона оптического процесса, обыкновенно считаемая физиологическою, еще не допускаетъ особыхъ механическихъ истолкованій, то тѣмъ не менѣе должна существовать возможность распространенія принциповъ механики и здѣсь въ томъ же смыслѣ, какъ это болѣе и болѣе имѣется въ виду для всѣхъ процессовъ, сводящихся къ движеніямъ эвира. Распространеніе движенія, какое должно предположить въ нервахъ, какъ матеріальныхъ носителяхъ силовыхъ аффекцій, всего менѣе должно быть чуждо чисто механическимъ понятіямъ. Да и нѣтъ же недостатка въ изслѣдованіяхъ о распространеніи электрическихъ возбужденій въ нервахъ, и если съ этимъ связать болѣе новыя идеи объ общемъ характерѣ всѣхъ силъ природы, то уже въ нѣкоторой мѣрѣ можно вообще видѣть будущую болѣе опредѣленную форму механики въ этихъ областяхъ приложенія. Только одного не должно при этомъ забывать. А именно, возможнымъ предметомъ механическихъ точекъ зрѣнія нужно мыслить сознательное ощущеніе не какъ таковое, но въ самомъ крайнемъ случаѣ лишь въ его внѣшнихъ основаніяхъ или, другими словами, въ подлежащемъ объективному воспріятію свойствъ нервныхъ процессовъ. Развѣ опредѣленіе какъ бы вступительнаго отношенія къ величинѣ самаго ощущенія, какъ оно исполнено экспериментально по вышеупомянутому методу Е. Г. Вебера, самому по себѣ вполне независимому отъ механическихъ принциповъ, — развѣ такое только опредѣленіе могло бы быть мыслимо и по способу вывода, исходящему изъ механическихъ нервныхъ процессовъ, но это все таки не было бы непосредственнымъ примѣненіемъ механическихъ принциповъ къ субъективному ощущенію. Подобное примѣненіе является скорѣе невозможностью, ибо въ ощущеніи нѣтъ ничего, что, подобно объективному предмету, непосредственно можно бы было понять, исходя изъ точки зрѣнія матеріи и движе-

нія. Этому не противорѣчитъ то обстоятельство, что ощущеніе есть матеріальный продуктъ; ибо хотя всякая дѣйствительность познается лишь подъ руководствомъ матеріальности и существуетъ лишь какъ матерія, тѣмъ не менѣе отдѣльные продукты и свойства тѣлъ не тождественны фундаментальному носителю этихъ свойствъ. Скорѣе, они — нѣчто меньшее его, а потому и недозволительно непосредственное перенесеніе механики матеріи на разсматриваемыя сами по себѣ составныя части сознанія.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Изученіе математико-механическихъ наукъ и уроки исторіи.

192. Указавъ въ нѣкоторыхъ главныхъ чертахъ значеніе механическихъ принциповъ для человѣческаго знанія и открывъ такимъ образомъ перспективу дальнѣйшихъ изслѣдованій, уместно теперь затронуть и общій вопросъ о томъ, чему можетъ научить исторія науки касательно разработки и, въ частности, касательно изученія предмета. Къ тѣмъ общимъ основаніямъ, въ силу которыхъ такого рода розысканіе полезно и плодотворно, въ данномъ случаѣ присоединяется и особенное, даже прежде всего только частное побужденіе. Первое изданіе этой книги вызвало со всѣхъ сторонъ множество письменныхъ запросовъ, въ которыхъ требовали отъ меня указанія лучшаго пути и цѣлесообразнѣйшихъ средствъ для самостоятельнаго изученія математико-механическихъ наукъ. Такъ какъ подобныя запросы исходили не только отъ такихъ лицъ, которые специально обучались въ ученыхъ учрежденіяхъ, но и отъ такихъ, которые просто желали пріобрѣсти болѣе положительныя основанія для своего научнаго образованія и міровоззрѣнія, то нерѣдко я былъ вынужденъ давать указанія по части чистой математики, не исключая и соображеній относительно усвоенія элементовъ. Но не только въ силу этого руководящій въ изученіи математики и механики эскизъ долженъ составлять естественное дополненіе моей исторической работы,—даже совершенно независимо отъ этого, уже та внутренняя связь, въ которой находится пониманіе и способъ обработки математики съ формированіемъ механическихъ теорій, даже въ изложеніи, которое имѣло бы предметомъ только механику и ея изученіе, отнюдь не дозволяетъ полнаго раздѣленія обѣихъ областей.

Въ второмъ изданіи этого сочиненія появилось въ первый разъ наставленіе касательно студій въ механико-физической области,

со включеніемъ и математики; но послѣдовавшее въ 1884 г. изданіе моея и моего сына книги «Новыя основанія анализа» и т. д. нѣсколько измѣнило внѣшнюю сторону дѣла. Въ этомъ исключительно математическомъ трактатѣ, не касающемся приложений къ физикѣ, а слѣдовательно и къ механикѣ, къ главному предмету—расширенію и пополненію доселѣ существующаго знанія повсюду примыкають и точки зрѣнія касательно изученія, обученія и научной реформы. Сверхъ того, послѣднія три главы посвящены спеціально соображеніямъ по части изученія математики и обученія этому предмету. Эти соображенія, составляющія самостоятельныя указанія по части изученія предмета, содержатъ все, что было сказано во второмъ изданіи подлежащей книги по вопросу объ изученіи чистой математики. Сообразно этому, оба наставленія въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ пополняютъ другъ друга, а вообще и въ главномъ дѣлѣ годны къ употребленію и независимо одно отъ другаго.

Это отношеніе сохраняетъ силу и до сихъ поръ, а особенно благодаря улучшеніямъ, введеннымъ въ это новое изданіе. Въ чисто математическомъ произведеніи, высшія части математики были, по меньшей мѣрѣ, на столько же важны, какъ и ея основанія; но здѣсь, гдѣ приложения составляютъ главную точку зрѣнія, здѣсь элементы и простѣйшія средства, помощію которыхъ умъ математически овладѣваетъ вещественною областю, должны быть прежде всего другаго приняты во вниманіе. Поэтому, выраженіе приложения, пожалуй, неособенно умѣстно; ибо вопросъ не въ томъ, какъ примѣнять существующія ученія чистой математики къ области вещественнаго, а, наоборотъ, является вопросъ о вещественной области, поскольку нужны въ ней чисто-математическія вспомогательныя средства. Всюду первѣе всего необходимы простѣйшія вспомогательныя средства, такъ что принципиальныя начатки каждаго отдѣла и каждой ступени чистой математики имѣють большее практическое значеніе, чѣмъ болѣе сложныя слѣдствія или даже хитросплетенія. А въ связи съ темою этого сочиненія мы имѣемъ даже особенное основаніе и въ математикѣ выставить на видъ принципиальную сторону, подобно тому, какъ выставили принципиальную же сторону и въ механикѣ.

Принципы математики и принципы механики тѣсно связаны между собою, и прямо въ различныхъ мѣстахъ этой книги приходилось критически и съ цѣлью поправленія дѣла трактовать о чисто-математическихъ основныхъ вопросахъ, какъ наприм. о роли такъ называемыхъ безконечныхъ. Но кромѣ этого, матеріальное содержаніе механики такъ перекрещивается съ различными математическими методами, что уже въ виду этого факта нельзя не связать вмѣстѣ съ ориентированіемъ въ области механики и ориентированіе въ цѣлой

области математики. Только что употребленное выражение «принципы математики», если его взять въ смыслѣ подобномъ тому, какой оно имѣетъ во всемъ своемъ объемѣ въ механикѣ, указываетъ на систематически разработанное сочетаніе воззрѣній, каковаго въ надлежащей формѣ пока еще не имѣется. Болѣе двухъ тысячелѣтій существуютъ элементы геометріи; но къ элементамъ всей области математики пришли развѣ только съ виду и лишь по имени, но не внутренне и не по существу. Такіе элементы, даже и въ особой разработкѣ частныхъ, должны бы были образовать однородно сплавленную систему. Въ нихъ арифметическое и геометрическое должно бы было всегда находиться на своемъ мѣстѣ, и то, что изъ геометріи возможно свести къ чисто числомѣрной необходимости или къ законамъ общихъ количественныхъ отношеній, не должно бы было излагаться,—какъ будто бы то были специально геометрическія истины,—путемъ геометрическимъ, въ сплетеніи съ геометрическими образами, на манеръ ли старо-французскій или по новомодному. Элементы Эвклида, какъ по своей логической формѣ, такъ и по систематической, негодны болѣе къ употребленію, если мы хотимъ быть въ соотвѣтствіи съ мыслію о дѣйствительныхъ элементахъ, или, лучше сказать, принципахъ всей математики. Сверхъ того, принципы, понимаемые въ смыслѣ совокупности характеристичныхъ основныхъ истинъ, должны содержать лишь то, что въ извѣстной области знанія составляетъ исходный пунктъ или результатъ примитивнаго рода, и въ сравненіи съ чѣмъ все остальное есть какъ бы черная работа. Всякое новое направленіе знанія, для котораго еще не было найдено руководящаго основнаго понятія, должно быть разсматриваемо, въ силу своей особенноти, какъ принципиальный побѣгъ. Такъ наприм., непрерывное измѣненіе величинъ, слѣдовательно, представленіе объ ихъ постепенно совершающемся возрастаніи и убываніи съ теченіемъ времени, служить выдающимся основнымъ понятіемъ высшей математики и вмѣстѣ съ тѣмъ точкою приложенія для ея примѣненія въ механикѣ. Но эта же самая идея находитъ уже разнообразныя, хотя еще рельефно не выдѣленныя приложенія въ теоремахъ и задачахъ низшей математики, и дѣйствовала бы въ ней съ еще большею пользою, если бы она вполнѣ сознательно была введена уже въ первыя простыя основанія всего математическаго мышленія. По этимъ указаніямъ относительно формировація общихъ принциповъ математики можно судить о томъ, какой видъ должны бы были имѣть дѣйствительные элементы науки, и что въ наше время, не только сами по себѣ, но и относительно, они должны бы быть значительно шире, чѣмъ Эвклидовы были въ свое время и даже до новыхъ столѣтій включительно.

Отсутствіе произведенія, въ которомъ принципы общей математики были бы изложены въ указанномъ слитномъ и строго систематическомъ родѣ, составляетъ не малую помѣху при изученіи. Именно, въ настоящее время первое вступленіе въ обитель науки затруднено тѣмъ, что старый хламъ нѣкогда классическихъ начертаній нынѣ не только крайне неудобенъ для употребленія, но и не соотвѣтствуетъ сознанію о натуральномъ способѣ мышленія. Эвклидъ, и еще въ большей мѣрѣ Архимедъ, дали искусственныя или даже хитроумныя доказательства готовыхъ результатовъ; но они не были непосредственными и настоящими учителями натурального способа математическаго мышленія. Извѣстно, что новое время прежде всего само должно было заново создать для себя методы открытія результатовъ и удобнѣйшіе приемы изслѣдованія при посредствѣ руководящихъ идей, дабы получить возможность идти далѣе на своихъ ногахъ. Но ухищренія Эвклидовой геометріи, въ дѣлѣ изученія простѣйшихъ основаній, оказались не только не пригодными, а напротивъ образовали тормазъ, который только при особенно хорошихъ дарованіяхъ потому не вліялъ вреднымъ образомъ, что болѣе опытный ученикъ усвоивалъ себѣ матеріалъ съ такихъ точекъ зрѣнія, при которыхъ въ нѣкоторой мѣрѣ имѣло мѣсто нѣкоторое подобіе натурального мышленія и соотвѣтственное претвореніе представленій.

193. Ариѳметика и алгебра никогда не были начертаны, какъ элменты геометріи, въ такомъ основномъ произведеніи, которое, подобно эвклидовскому, признано бы было за образецъ. Этотъ фактъ, имѣющій мѣсто и донинѣ и, конечно, не такъ скоро устранимый, интересенъ постольку, поскольку онъ научаетъ, что новѣйшіе матеріалы, менѣе свойственные античному, или, по крайней мѣрѣ, греческому духу, крайне туго поддаются приведенію въ систематическую форму. Матеріальное обогащеніе и формальная строгость знанія находятся здѣсь въ обратномъ отношеніи. Такъ наприм. даже до сего времени не удалось строго доказать, на основаніи ясныхъ понятій, простѣйшихъ правилъ касательно знаковъ дѣйствій. Такъ предложенію, что отрицательные знаки при умноженіи даютъ положительный, доселѣ не дано вполне удовлетворительнаго доказательства. Зато вмѣсто этого самыя основныя понятія, по большей части, благодаря ложнымъ овеществленіямъ, затемнены, сдѣланы негодными къ употребленію, а въ послѣднее время запутаны даже до мистификаціи. Такъ, смыслъ знаковъ дѣйствій прежде всего былъ искаженъ измышленіемъ отрицательныхъ чиселъ или даже величинъ, такъ что послѣднимъ поколѣніямъ осталось сдѣлать только шагъ далѣе въ этомъ ложномъ направленіи, и къ отрицательному тотчасъ же съ успѣ-

хомъ присоединилось мнимое, какъ самостоятельно овеществленная дѣйствительность, и кромѣ простыхъ знаковъ дѣйствій получило мистическое бытіе даже и противорѣчащее сочетаніе двухъ совершенно разнородныхъ знаковъ, именно квадратнаго корня изъ отрицательнаго, между тѣмъ какъ критическій періодъ Лагранжа подобныя крайнія требованія оставлялъ безъ вниманія. Какую путаницу повели за собою (какъ упомянуто о томъ въ § 183) эти, возобновленныя главнымъ образомъ Гауссомъ, искаженія логической формы математическихъ основныхъ мыслей, это можеть показать во всемъ объемѣ только будущій историкъ, въ контрастѣ съ позднѣйшею болѣе свѣтлою эпохою. Въ этихъ грѣхахъ мы пока только усматриваемъ подтвержденіе тому, что ариѳметика и алгебра, въ своихъ принципиальныхъ основаніяхъ, отнюдь не получили еще достаточно строгой формы, не говоря уже о томъ, что до образцоваго имъ еще далеко. Нашъ трудъ о Новыхъ основаніяхъ преслѣдуетъ прежде всего высшія, къ расширенію науки служащія цѣли, а рядомъ съ этимъ даетъ мѣсто и необходимымъ указаніямъ къ восстановленію полной ясности основъ и элементарныхъ исходныхъ пунктовъ. Но необходимо этого рода фундаментальнымъ указаніямъ для частныхъ отдѣловъ математики дать ходъ въ подлежащихъ учебникахъ.

Въ виду сказаннаго, съ такъ называемою низшею математикою и съ тѣмъ, что принято изучать въ такихъ учрежденіяхъ, какъ гимназій и реальныя школы,—если говорить о такъ сказать классическихъ резюме въ систематической формѣ и въ формѣ учебниковъ,—дѣло обстоитъ крайне плохо. Единственная болѣе извѣстная попытка создать, по крайней мѣрѣ, въ геометріи новѣйшую замѣну Евклидовскихъ Элементовъ, именно Элементарная геометрія Лежандра, несмотря на большія достоинства и на относительную пригодность этой книги, все-таки только показала, что на зарѣ 19 столѣтія опытъ свода элементовъ чистой геометріи не могъ не оказаться черезчуръ античнымъ, и по формѣ и матеріалу нѣсколько устарѣлымъ. Послѣ Лежандра не явилось ничего такого, что заслуживало бы упоминанія, а скрещиваніе прежняго матеріала съ новыми опытами и добавленіями, особенно же съ проэективною, въ сущности созданною Понсле, геометріею, сплошь дѣйствовало разрушительно. Благодаря такому произвольному смѣшенію разнороднаго матеріала, обученіе именно геометріи сдѣлалось еще болѣе шаткимъ, чѣмъ оно было прежде, а въ безчисленномъ множествѣ учебниковъ, безпрестанно появляющихся на рынкѣ и тотчасъ же исчезающихъ, можно видѣть еще большее подтвержденіе все растущему разстройству.

Потому, для изученія предмета и теперь почти безразлично, гдѣ искать элементовъ низшей математики. Относительно учебниковъ, во всякомъ случаѣ, можно бы было оставить дѣло на произволъ судьбы; ибо разни́ца между вреднымъ и полезнымъ въ низинахъ этой области не особенно велика. Но вообще можно допустить, что обработка элементовъ тѣмъ хуже, когда ихъ выкраиваютъ для собственно ученыхъ школъ, а дѣлается это лицами, получившими образованіе по латинской и греческой выкройкѣ или, лучше, по современнымъ ея обрывкамъ. Сюда присоединяются, конечно, и тѣ безобразія, источникъ которыхъ въ школьно-ремесленной ограниченности, въ педагогическихъ причудахъ и въ взвинченной школьной педантичности. Убѣждены же, наприм., иные глубоко-мысленные и заучившіеся мучители мальчишескихъ головъ, что дѣло совсѣмъ не въ усвоеніи знанія, но что единственная цѣль ученія — упражненіе ума. Если на почвѣ такихъ воззрѣній, слѣдуя которымъ можно бы было, во всякомъ случаѣ, замѣнить математику шахматною игрою, многому не научишься, и если и учебники при такомъ направленіи оказываются просто практическими, то за то въ этомъ можно видѣть указаніе, что найти что-нибудь относительно лучшее можно только въ такихъ сферахъ, которыя ближе стоятъ къ новѣйшей жизни и духу. Въ самомъ дѣлѣ, не безынтересно видѣть, что литература учебниковъ, выходящая изъ школъ политехническаго рода и рассчитанная на такія учрежденія, показала больше пракческаго искусства и находчивости въ изложеніи и обученіи. Равно и военныя школы, съ своими приемами и учебною литературою, въ большинствѣ случаевъ, не такъ отстали, какъ гимназій и университеты.

194. Насколько ѣда служить не для упражненія зубовъ въ жеваньѣ, настолько же и усвоеніе знанія не должно имѣть цѣлью гимнастическую дрессировку органа разума. Если кто думаетъ, что все дѣло въ упражненіи жевательныхъ органовъ, то пусть себѣ жуе́тъ сколько угодно, и не мало найдется несчастныхъ, которые добровольно, либо по принужденію, будутъ подражать его жвачкѣ; но пусть онъ не думаетъ, чтобы школьныя безсмыслицы могли служить образцомъ для практическихъ соображеній. И подобная умственная жвачка — злѣйшій врагъ истинной и высшей учености, ибо цѣль изученія науки состоитъ именно въ познаніи ея послѣднихъ, теоретически и практически интереснѣйшихъ результатовъ. Низшія ступени — лишь средства для достиженія болѣе высокихъ и высшихъ. Занимающійся, если онъ хочетъ слѣдовать этому основоположенію, долженъ какъ можно скорѣе поканчивать съ современными низинами математики, по формѣ не представляющимъ

ничего привлекательнаго, и ни на ариѳметикѣ и алгебрѣ, ни на геометріи не останавливаться долѣе чѣмъ нужно. Главное, что слѣдуетъ имѣть въ виду, это — изученіе необходимѣйшихъ теоремъ и пріемовъ. Здѣсь чѣмъ короче выборъ необходимаго, тѣмъ лучше. Нужно именно пользоваться только тѣмъ матеріаломъ, который дѣйствительно можетъ служить для возведенія зданія, и отбрасывать, какъ бесполезный хламъ и нестоющія вниманія бездѣлушки, все, что пристегивается кромѣ того и чему нерѣдко придають неподобающее значеніе. Никогда не слѣдуетъ забывать, что основы нужны только для того, чтобы, опираясь на нихъ, подняться выше, и даже до послѣднихъ предѣловъ возможной высоты.

При такомъ воззрѣніи на математическія штудіи, въ концѣ концовъ, точкою зрѣнія мѣрила является даже не математика сама по себѣ, въ своей изолированности, но какъ механика и физика составляютъ первую дѣйствительность природы, то объ ихъ потребностяхъ прежде всего слѣдуетъ позаботиться. Съ точки зрѣнія практики, въ этомъ нѣтъ ни малѣйшаго сомнѣнія; но и чистые интересы образованія, коренящіеся въ строгомъ міровоззрѣніи, должны въ употребленіи математики для объясненія устройства природы видѣть лучший плодъ чисто отвлеченнаго познанія, которое иначе терялось бы въ умозрѣніяхъ. Цѣнность теоріи чиселъ въ узкомъ значеніи этого слова потому такъ ничтожна, что свойства чиселъ, которыми занимается эта нынѣ столь излюбленная университетами вѣтвь математики, не имѣютъ почти никакого отношенія къ свойствамъ вещей и къ проблемамъ объясненія природы. Пожалуй, ради удовлетворенія умственной потребности въ ознакомленіи съ нѣкоторыми теоремами о составѣ чиселъ, можно бы было нѣкоторые результаты этого рода умозрѣнія ввести въ первые элементы. Такимъ образомъ, къ излишнимъ свойствамъ фигуръ прибавились бы еще нѣкоторые лишніе отношенія чиселъ, и бѣда была бы не особенно многимъ больше, чѣмъ и злоупотребленіе греческою манерой, которая, не будучи въ силахъ далеко уйти съ обычною мѣркою математики или скорѣе, просто геометріи, даже ударилась въ чистую спекуляцію. Еслибы античная точка зрѣнія носила въ себѣ уже далѣе ведущія примѣненія къ природѣ, то такое спекулятивное вырожденіе математики у древнихъ не имѣло бы мѣста, а качества основныхъ произведеній, даже все систематическое изложеніе и въ логическомъ смыслѣ получило бы иной характеръ. Столь искусственный продуктъ, каковымъ было произведеніе эпохи перваго Александризма или, другими словами, Элементы Эвклида, по крайней мѣрѣ, что касается ихъ вычурнаго плана, заканчивающагося пятью правильными тѣлами, — такой продуктъ былъ бы невозможенъ. Тогда выработали

бы болѣе высокое понятіе о теоріи, нежели понятіе, полагающее ся достоинство въ удаленіи отъ дѣйствительности и въ витаніи въ узкихъ рамкахъ чисто формальныхъ представленій человѣческаго духа. Мы, уже фактически вышедшіе изъ этого узкаго круга, умѣемъ извлечь слѣдствія изъ этого факта и для опредѣленія цѣнности этихъ элементовъ науки, и не хотимъ сбивать съ толку начинающихъ ложною оцѣнкою объема этихъ элементовъ и услуги, какую они должны оказать.

Эстетическое удовлетвореніе духа изысканнымъ и логически исполнѣмъ безукоризненнымъ сочетаніемъ научнаго цѣлаго именно въ математическихъ элементахъ нынѣ всего менѣе можно получить, и такимъ образомъ устраняется и это основаніе взятыя за основы математики ради ихъ самихъ. Скорѣе, слѣдуетъ посмотреть, какимъ образомъ можно опереться на нихъ при возможно меньшемъ трудѣ и неудобствахъ. Итакъ, наприм., въ ариѳметикѣ и алгебрѣ нужно покончить съ такъ-называемыми семью дѣйствіями, въ буквенномъ обобщеніи, а затѣмъ и съ уравненіями первыхъ двухъ степеней, включая и пропорціи, покончить въ такомъ родѣ, чтобы освоиться съ основными понятіями, приѣмами и главными средствами для рѣшенія задачъ, доказательства же усвоивать себѣ лучше въ формѣ натурального развитія сложнаго изъ простѣйшихъ составныхъ частей. При подобномъ изученіи нужно пока мириться со всѣми помѣхами, какія могло бы внести обычное безразсудство въ соотвѣтственномъ расширеніи основныхъ понятій и связанное съ этимъ неожиданное столкновеніе съ чужимъ сужденіемъ: ибо строгаго отчета относительно подобныхъ переходовъ и обобщеній пока еще не имѣется. А критическое изслѣдованіе подобныхъ сомнительныхъ вещей въ настоящее время завело бы слишкомъ далеко и потребовало бы слишкомъ тонкихъ логическихъ изысканій, чтобы можно было такое занятіе рекомендовать начинающимъ. Еслибы существовалъ строго образцовый учебникъ, то учащійся не встрѣтилъ бы никакихъ помѣхъ и благополучно миновалъ бы всѣ окольные пути. Но самый господствующій ходъ идей настолько испорченъ во всѣхъ направленіяхъ и эта испорченность настолько вкоренилась, что критическое очищеніе должно стать работою, какою начинающій не можетъ обременять себя, не упуская при этомъ изъ виду главной своей цѣли.

195. Если сравнить состояніе алгебры съ состояніемъ геометріи, то первая, правда, мало имѣетъ античной строгости, господствующей у древнихъ геометровъ; зато ея натуральная форма ближе подходит къ натуральному развитію истинъ, нежели теорія пространства, страдающая такимъ множествомъ странностей и въ спо-

собѣ распредѣленія матеріала, и въ способахъ доказательствъ. Если оставить въ сторонѣ недостатокъ строгаго опредѣленія основныхъ понятій и соотвѣтствующей связи цѣлаго, то разрозненные ученія ариѳметики и алгебры все-таки имѣютъ сносный видъ и напечатлѣваются въ умѣ, не оказывая неестественнаго принужденія. Именно, веденіе доказательствъ путемъ естественнаго развитія истинъ есть великое преимущество; ибо при этомъ способѣ каждый малѣйшій операціонный шагъ, какъ скоро онъ сдѣланъ, тотчасъ же является и оправданнымъ, и не нуждается въ какомъ-либо особомъ напутствіи разрозненными и искусственно оснащенными доказательствами. Нѣчто подобное было бы возможно и въ геометріи, еслибъ ее съ самаго начала рассматривали какъ натуральное, постепенно прогрессирующее оперированіе съ пространственными элементами, а отдѣльныя выдающіяся истины выставляли бы какъ бы нѣкоторые остановочные пункты на пути развитія. Въ такомъ разѣ частные результаты обезпечивались бы надежностью каждаго малѣйшаго шага, который приходилось бы дѣлать на пути къ нимъ, и имѣлось бы то преимущество, что каждое воззрѣніе, важное или неважное, выступало бы въ непосредственномъ тѣснѣйшемъ сочетаніи съ своимъ доказательствомъ или, лучше сказать, съ своею порукою.

При этомъ особенно выигрывала бы наглядность, а отсутствіе ея натурального посредства теперь въ большинствѣ случаевъ даетъ себя знать. Опредѣленія выходили бы, преимущественно, генетическими и строящими, т.-е. это были бы образы, которые должно выдѣлять изъ многообразія представленій и снабжать особымъ именемъ, дать имъ дѣйствительно возникнуть въ мысляхъ и такимъ образомъ обнаружить, вмѣстѣ съ тѣмъ, ихъ возможность. Но и сложнѣйшія истины вытекали бы изъ нанизанныхъ въ рядъ составныхъ кусковъ съ такою очевидностью, что съ ними легко было бы согласиться, не чувствуя болѣе ни принужденія, ни навязыванія, — недостатковъ, за которые даже инья хорошія головы сѣтуютъ именно на геометрію.

Но какъ мы должны брать вещи такъ, какъ онѣ есть, то изъ представленія о томъ, что было бы возможно при другомъ способѣ обработки, можемъ извлечь для себя только слѣдующую выгоду. А именно, будемъ принципиально стремиться хотя къ тому, чтобы сколько-нибудь сгруппировать матеріалъ, какой даютъ учебники, въ какой бы ненатуральной формѣ онъ ни былъ преподносимъ, и за неимѣніемъ искусно исполненной примѣрной работы, которая преслѣдовала бы ту же цѣль, будемъ давать перевѣсъ натуральнымъ точкамъ зрѣнія, къ какимъ духовная дѣятельность склоняется сама собою, и безъ особыхъ указаній. Такая натуральная самопомощь,

обыкновенно съ большою ловкостью исполняемая хорошо одаренными математическими головами, подъ силу даже и посредственности, хотя, конечно, только приблизительно; нужно только, чтобы было распространено воззрѣніе, что всякое искусственно перевернутое вверхъ дномъ и взвинченное сочетаніе должно оставлять безъ вниманія. Тогда отдѣльныя значительныя теоремы будутъ выступать насколько возможно просто, будутъ натурально сгруппированы и соединены въ формѣ единого развертывающагося ряда. Напримѣръ, изъ элементовъ плоской геометріи сперва должно покончить съ углами, измѣреніемъ угловъ и съ параллельными, затѣмъ перейти къ опредѣленію треугольника по его элементамъ, къ угламъ, вписаннымъ въ кругѣ и описаннымъ, включая и касательныя, затѣмъ коснуться измѣренія площадей фигуръ, включая и кругъ, и наконецъ перейти къ столь важному ученію о зависимости длины линій отъ угловъ, причемъ сначала обнаружится лишь частный случай пифагоровой теоремы, но при этомъ выступитъ и необходимость собственно тригонометріи съ ея главнымъ вспомогательнымъ понятіемъ синуса. Въ самомъ дѣлѣ, преимущественно такъ называемыя круговыя функціи играютъ въ кругѣ такую же роль, ни болѣе и ни менѣе, какъ и всякій самъ по себѣ разсматриваемый уголъ, и высшее значеніе геометріи именно въ томъ и состоитъ, чтобы служить посредствующею ступенью для количественнаго перехода отъ различія направленій къ линейнымъ протяженіямъ, такъ чтобы взаимная зависимость обѣихъ этихъ неоднородныхъ величинъ могла быть численно опредѣляема. Кстати замѣтить, отсюда же объясняется и размѣръ роли, какую пифагорово соотношеніе между сторонами прямоугольнаго треугольника играетъ во всей математикѣ. Значеніе этой теоремы—въ томъ, что ядро ея включаетъ переходъ отъ угловой величины къ зависящему отъ нея отношенію линій.

Въ дополненіе къ этому примѣрному указанію нужно еще относительно способа усвоенія присовокупить, что о какомъ-нибудь взвинченномъ опредѣленіи угла такъ же мало слѣдуетъ заботиться, какъ и о какой-нибудь гипергеометрической теоріи параллелей. Вопросъ здѣсь просто въ томъ, имѣется ли нѣтъ естественное понятіе о вещи. Искусство подыскиванія простаго и правильнаго словеснаго выраженія для какого-либо вѣрнаго отграниченія мысли не всегда легко; но не должно видѣть помѣхи въ томъ, если взвинченный способъ выраженія учебника нельзя замѣнить избраннымъ и совершеннымъ. Пока довольно и того, если правильно представляютъ дѣло и мыслятъ. Поэтому нечего утруждать себя уродливыми измышленіями за или противъ истины, что параллельныя не пересѣкаются, а непараллельныя пересѣкаются. Линіи, имѣющія одинаковое

направленіе и потому не образующія никакого угла, точно также какъ и линіи, имѣющія въ той же плоскости неодинаковое направленіе и потому образующія уголъ, суть основныя воззрѣнія, сами по себѣ удовлетворительныя, и хотѣть содержаніе этихъ воззрѣній словесно формулировать вдвойнѣ и затѣмъ для каждаго основнаго воззрѣнія еще особо доказывать яко бы вторую составную часть—значитъ возвращаться къ логическимъ промахамъ древности. Эти несложныя воззрѣнія относительно равенства угловъ, образуемыхъ параллельными, можно получить самымъ простымъ образомъ чисто изъ понятія о тождествѣ направленій, и отсюда легко видѣть, что въ геометріи натуральный путь и заключенія изъ основныхъ понятій, въ противоположность взвинченнымъ концепціямъ, доставляютъ большое облегченіе.

Кстати замѣтить, здравый математическій умъ никогда еще не сомнѣвался въ истинѣ теоремъ о параллеляхъ. Въ послѣднемъ основаніи, и для насъ, всегда ясно видѣвшихъ, что было неясно спорящимъ, вопросъ о параллельныхъ всегда былъ вопросомъ математической логики, и слѣдовательно относится только къ свойству доказательствъ и къ тому, что при этомъ натуральнѣе и цѣлесообразнѣе должно сдѣлать аксіоматическимъ исходнымъ пунктомъ. Но сомнѣваться, какъ профессоръ Гауссъ, въ самомъ пространственномъ отношеніи вещей и тщетно стараться замѣнить его другимъ представленіемъ—значитъ поступать противно здравому смыслу, и противъ подобныхъ явленій мы никогда не откажемся противопоставлять нашъ діагнозъ относительно математическихъ сумасбродствъ.

При изученіи можно избѣгнуть лишняго труда и колебаній, если слѣдовать нашему и подобнымъ діагнозамъ даже тамъ, гдѣ, какъ при первомъ самовведеніи въ эту область, еще нельзя надлежаще оцѣнить наши прямыя подробныя основы и характеристики.

196. Такъ какъ мѣровыя опредѣленія геометрическихъ протяженій, въ концѣ концовъ, составляютъ главную цѣль всей этой области, то, во избѣжаніе бесполезныхъ трудовъ въ этомъ, направленіи, слѣдовало бы съ самаго же начала проложить тотъ натуральный путь, какой иначе является почти только въ высшей геометріи. Не должно пугаться, что придется тотчасъ же опредѣлять величины накопленіемъ неограниченно-малыхъ единицъ мѣры, и потому напримѣръ объемъ фигуры составлять изъ элементовъ, у которыхъ всѣ или нѣкоторые измѣренія разсматриваются сначала какъ весьма малыя и притомъ еще такъ, чтобы эта малость могла неограниченно приближаться къ нулю. Такимъ образомъ мы повели бы дѣло не только въ смыслѣ логически законной методы Кавальери, но и дѣйствовали бы слѣдуя натуральному и во многихъ случаяхъ

неизбѣжному въ изысканіяхъ принципу, давно уже признанному въ геометріи кривыхъ, гдѣ онъ искаженъ только благодаря отсутствію строгой логики неограниченно малаго. Какъ скоро послѣдняя будетъ упорядочена въ такомъ смыслѣ, о какомъ мы говорили въ § 138, тогда не можетъ быть даже и рѣчи о томъ, будто-бы операции съ неограниченно малыми элементами величинъ имѣютъ какой-либо недостатокъ и не вносятъ такой строгой очевидности, какою мы обладаемъ въ непосредственныхъ приемахъ съ цѣлыми и опредѣленными величинами и частями величинъ. Нелогичность и абсурдность безконечно-малаго уже будетъ этимъ устранена, а въ ней одной и весь грѣхъ логической неточности.

Введеніе неограниченно малаго въ первыя основанія геометріи соотвѣтствуетъ натуральному требованію мышленія и, сверхъ того, содѣйствуетъ возстановленію доселѣ недостававшего единства методовъ въ низшихъ и высшихъ областяхъ математики. Естественность разложенія величинъ и формъ на такія малыя составныя части, которыя позволяютъ познать правила сложенія и измѣненія, есть средство, къ которому умъ приходитъ совершенно произвольно и прежде всякихъ другихъ приемовъ. Мѣрить можно лишь единицами мѣры, и когда рѣчь идетъ о нѣсколькихъ измѣреніяхъ, то нужно сначала обратить вниманіе только на одно, и слѣдовательно совершить отдѣленіе разсматриваемыхъ протяженій. Но о нѣсколькихъ измѣреніяхъ рѣчь идетъ не только въ случаѣ поверхностей и тѣлъ, но и при изслѣдованіи хода кривыхъ линій, и здѣсь это приведеніе къ неограниченно малой единицѣ мѣры служитъ для того, чтобы сдѣлать удобопонятными длины какъ такія, отвлекаясь отъ измѣненія направленія. Эти малые, почти прямые элементы играютъ здѣсь, слѣдовательно, подобную же роль, какъ и линіеобразные параллелограммы или параллелопипеды при опредѣленіи поверхностей и объемовъ. Но эта натуральная метода потому логически вполне удовлетворительна, что она разъ навсегда позволяетъ установить, что подобное приближеніе неограниченно, и такимъ образомъ соединяетъ строгость метода истощенія древнихъ съ естественностью произвольнаго движенія мыслей, а къ тому еще и съ чрезвычайною краткими заключеніями.

Впрочемъ, и въ низшей геометріи есть случаи, въ которыхъ хотя этотъ натуральный путь такъ или иначе и прикрываютъ, но фактически и по существу дѣла обойти его не могутъ. Напримѣръ, пришлось бы выкинуть изъ элементарной геометріи нахожденіе длины окружности круга или сравненіе объемовъ конуса, цилиндра и шара, если бы не желали употреблять въ дѣло неограниченно малыхъ элементовъ. И древняя геометрія должна была, — правда, неумѣло, — опе-

рировать съ ними, и всякое дѣленіе въ методѣ истощенія имѣло этотъ смыслъ. Поэтому, нѣтъ никакого основанія не допускать въ начатки математики тѣхъ естественныхъ облегченій, какія должно признать за лучший путь въ задачахъ болѣе трудныхъ и высшихъ. Изгнанію подлежатъ, скорѣе, тѣ несообразности въ дифференціаль-ныхъ понятіяхъ, какія пошли въ ходъ съ легкой руки Лейбница.

Замѣтимъ еще, что употребленіе малыхъ составныхъ частей въ качествѣ единицъ мѣры ведетъ еще далѣе и къ болѣшимъ сокращеніямъ, нежели это позволяла прежняя роль ихъ въ качествѣ просто вспомогательныхъ величинъ. Такъ какъ измѣрять можно каждою единицею, по крайней мѣрѣ, мысленно, то можно предпо-лагать и единицу мѣры неограниченно малою, а отсюда получается та выгода, что всѣ остатки, какіе могутъ оставаться при измѣреніи, можно также дѣлать неограниченно малыми и такимъ образомъ получить простѣйшее представленіе о неограниченной точности истощенія данныхъ величинъ. Подобный приѣмъ годится для всевозможныхъ величинъ и потому можетъ быть превосходно приспособленъ и къ аналитическимъ представленіямъ о постепенномъ измѣненіи величинъ и объ ихъ накопленіи изъ произвольно малыхъ элементовъ. Такимъ путемъ низшая математика и анализъ переменнаго получаютъ общій исходный пунктъ, такъ что не только съ самыхъ первыхъ шаговъ облегчается и сокращается изученіе предмета, но и дѣлается существенно важный шагъ къ матеріально и методически цѣлостной системѣ однородныхъ принциповъ и элементовъ всей математики.

197. Движеніе есть необходимое средство къ наглядному уясненію отношеній, которыя иначе, взятая въ неподвижной формѣ, не могутъ дать живого пониманія, а часто и вообще никакого пониманія дѣла. Поэтому, уже съ самыхъ первыхъ шаговъ въ основахъ геометріи надлежитъ прибѣгать къ непрерывному перемѣщенію, какъ къ средству изложенія, и систематическимъ примѣненіемъ этого великаго пособія, не стѣсняясь никакими сомнѣніями, можно необыкновенно облегчить себѣ путь. Приэтомъ само собою разумѣется, что движеніе еще не играетъ здѣсь форонимической роли, т.-е. здѣсь не вводятся въ разсмотрѣніе опредѣленные, предписанныя скорости. Здѣсь всегда рѣчь будетъ лишь о томъ, что путь отъ одного положенія до другаго проходится какъ нибудь, и какъ особыя предначертанія движенія могутъ подлежать изслѣдованію развѣ усмотрѣнія одновременности, слѣдовательно, въ сущности, одновременное фиксированіе отношеній положенія частей фигуръ. Итакъ, движеніе всегда имѣетъ здѣсь лишь значеніе непрерывнаго перехода изъ одного положенія въ другое. Только съ пополненіемъ

собственно геометріи чисто математически построяемымъ ученіемъ о движеніи приходится разсматривать и время какъ четвертое измѣреніе, и такимъ образомъ математика чистаго пространства завершается математикою и временно опредѣляемаго происхожденія образовъ. Чтобы приготовить это пополненіе изслѣдованія всей, отъ матеріи и силъ независимой, области, удобнымъ средствомъ представляется непремѣнное введеніе непрерывныхъ перемѣщеній въ первыя основанія геометріи, но не касаясь при этомъ понятія скорости. Но и помимо этой болѣе отдаленной цѣли, требующей согласованія всѣхъ частей системы, не слѣдовало бы пренебрегать движеніемъ, какъ легчайшимъ средствомъ самоудовольствія. Поэтому, чѣмъ непринужденнѣе оперировать съ этимъ средствомъ при произвожденіи фигуръ и при доказательствахъ, тѣмъ болѣе мы облегчимъ себѣ пониманіе и запоминаніе важнѣйшихъ представленій и теоремъ.

То, что въ протяженіяхъ играетъ роль какъ движеніе, должно имѣть паданъ и въ случаѣ чиселъ и величинъ вообще. Это — измѣненіе, и чѣмъ скорѣе будетъ введенъ, тѣмъ лучше, такой способъ представленія, въ силу котораго всѣ величины разсматриваются возникшими путемъ накопленія малыхъ частей. Какъ число нужно понимать какъ собраніе единицъ, такъ и непрерывную величину, если желаемъ надлежащимъ образомъ понять представляемое ею цѣлое, должно мысленно представлять какъ бы раздѣленную на части и, слѣдовательно, какъ результатъ наращенія частей. Счисленіе такихъ частей, которыя можно выбрать какъ угодно и неограниченно малыми, есть единственная ясная идея, посредствомъ которой скученное однородное, — а это вообще и есть величина, — вступаетъ въ соотношеніе съ непосредственно еще болѣе яснымъ понятіемъ числа въ собственномъ смыслѣ и притомъ цѣлаго. Туманное понятіе числа вообще, которое соотвѣтствовало бы нѣкоторому данному значенію въ непрерывномъ ряду величинъ, не будучи выражено въ цифрахъ, не можетъ быть оправдано основательнымъ изслѣдованіемъ. Такимъ образомъ, мы не только упростимъ воззрѣніе на элементы ариѳметики, но приобрѣтемъ вѣрный компасъ и для всѣхъ дальнѣйшихъ концепцій, какъ скоро исходнымъ пунктомъ тотчасъ же примемъ, что, напримѣръ, понятіе умноженія на дробь получаетъ ясный смыслъ не иначе, какъ если будемъ разумѣть подъ нимъ просто сочетаніе двухъ дѣйствій, именно умноженія и дѣленія. Вмѣсто этого доселѣ имѣютъ обыкновеніе разсматривать дробь непосредственно какъ число въ родѣ цѣлой величины, тогда какъ она въ сущности означаетъ ничто иное какъ дѣленіе на части одной или нѣсколькихъ единицъ. Но какъ въ дѣйстви-

тельности всѣ дроби введеніемъ достаточно малыхъ единицъ можно бы было привести въ цѣлыя числа, то ясно, въ чемъ дѣло какъ относительно туманнаго понятія числа, которое представляло бы непрерывную величину, такъ и относительно соотвѣстственнаго невозможнаго понятія о непрерывномъ интерполированіи ряда чиселъ. Здѣсь надо видѣть просто игру тѣхъ поспѣшныхъ сочинительствъ и овеществленій, къ какимъ новѣйшіе изслѣдователи, — и на этотъ разъ не по примѣру древнихъ, но въ противоположность болѣе строгимъ античнымъ способамъ представленія, — пришли вслѣдствіе поверхностнаго пониманія совпаденій схематизма вычислений.

Всякая величина есть или именованная или чистая числовая величина. Третьяго быть не можетъ, а отсюда слѣдуетъ, что представленіе всякихъ непрерывныхъ величинъ должно приводить къ наглядному типу, т.-е. къ протяженіямъ, ибо числа сами по себѣ не даютъ никакого объясненія сущности непрерывности. Но если отвлечься отъ подобнаго объясненія, то сведеніе всякаго представленія о нѣкоторомъ количественномъ отношеніи къ дѣйствительнымъ числамъ будетъ послѣднимъ требованіемъ, которому всегда можно отвѣчать, по крайней мѣрѣ, съ неограниченнымъ приближеніемъ. Такимъ путемъ алгебра и анализъ становятся не только обобщеніемъ ариометики, но и средствомъ для представленія всякихъ дѣйствительныхъ числовыхъ и количественныхъ отношеній, какія можно разсматривать и разлагать, во-первыхъ, въ пространственныхъ и временныхъ величинахъ, а затѣмъ и въ матеріальныхъ и механическихъ. Анализъ можно бы было назвать алгеброю перемѣнныхъ, ибо разница въ послѣдовательномъ переходѣ отъ низшаго исчисленія къ высшему, въ сущности, состоитъ въ томъ, что въ послѣднемъ нѣкоторыя величины представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ неограниченное число значеній или, взявъ точку зрѣнія шире, весь ходъ мыслимаго измѣненія, между тѣмъ какъ рядомъ съ этимъ измѣненіемъ другія величины сохраняютъ постоянно одинаковое значеніе. Но чтобы перейти въ эту высшую область, нуженъ не столько обширный матеріалъ подготовительныхъ знаній изъ низшей области, сколько привычка къ новымъ методическимъ основнымъ представленіямъ, каковыя, по нашему мнѣнію, безусловно должны быть введены уже въ первыя основанія математики. Болѣе спекулятивныя тонкости алгебры можно смѣло оставить безъ вниманія; ибо все, что въ этой области имѣетъ практическое значеніе, все, чѣмъ постоянно приходится пользоваться въ приложеніяхъ, ограничивается уравненіями первой и второй степени и, само собою разумѣется, еще представленіемъ объ общей возможности прибли-

зительнаго численнаго рѣшенія всякихъ уравненій по способу систематизированной методы послѣдовательныхъ подстановокъ.

198. Учебники высшаго анализа въ нѣкоторыхъ существенныхъ направленіяхъ разработаны значительно лучше, чѣмъ курсы низшей математики. Здѣсь нельзя оставлять на произволъ судьбы, какого рода руководства пользоваться. Дифференціальное и интегральное исчисленія, подъ обычнымъ у французовъ заглавіемъ курса анализа, дѣйствительно разработаны у нихъ со вкусомъ. Въ удовлетвореніе потребностей Парижской Политехнической Школы появились частію сносныя, частію же прямо хорошія работы. Великія школьныя учрежденія первой революціи, изъ коихъ какъ бы по традиціи вышла Политехническая Школа, которую впослѣдствіи все болѣе и болѣе уродовали, учрежденія эти, не только общимъ своимъ духомъ, но также благодаря и тому, что имъ посвящали свои силы такіе мужи, какъ Монжъ и столь рѣдкій геній, какъ Лагранжъ, установили преданіе, котораго не могъ въ концѣ уничтожить даже регрессъ нѣсколькихъ поколѣній. Въ своихъ образцовыхъ произведеніяхъ Лагранжъ далъ анализу и механикѣ столь изысканную форму, какой дотолѣ они никогда не имѣли. Обширныя произведенія Эйлера, дотолѣ пользовавшіяся наилучшею репутаціею у всѣхъ, кто стремился къ болѣе глубокому изученію предмета, должны были отойти на второй планъ. Этотъ толчокъ къ лучшему продолжалъ дѣйствовать во французской школѣ, хотя и съ меньшею силою. Для обыкновенныхъ потребностей обученія должны были изготovitъ курсы, въ которыхъ старыя привычки приведены были въ связь съ новою формою, и индивидуальная оригинальность Лагранжевскаго хода мыслей въ нихъ въ значительной мѣрѣ была утрачена. Кажется, это—неизбѣжная судьба всѣхъ великихъ твореній; но въ этомъ частномъ случаѣ извиненіемъ могло служить то, что въ образцѣ, по крайней мѣрѣ, отчасти не обращалось вниманія на удобства обычнаго знакоположенія, равно какъ и на общія требованія наглядности. Лагранжева теорія аналитическихъ функцій и соотвѣтствующія лекціи о функціонномъ исчисленіи хотя еще и теперь служатъ лучшими основами для изученія дифференціального и интегрального исчисленій вмѣстѣ съ ихъ приложениями къ геометріи и механикѣ, но еще и нынѣ исключительно имъ присущую строгость сохраняютъ, жертвуя ей удобствами, съ какими, хотя и временно, связана обыкновенная дифференціальная нотація. Благодаря этому, позднѣйшимъ учебникамъ, несмотря на низшія качества обработки, легко было въ практикѣ обученія занять то мѣсто, какое иначе должно бы было принадлежать твореніямъ этого генія. Впрочемъ, во всякомъ случаѣ, творческія созданія, содержа слишкомъ много превосходна-

го, — не для ремесленного изучения, а потому въ этомъ отношеніи всегда будетъ такъ, что заурядныя компиляціи придутся больше по вкусу толпѣ, которая желаетъ не мыслить, а просто ищетъ выучки для заработка на хлѣбъ. Все-таки этотъ нисшій сортъ учебниковъ не могъ бы имѣть такого сбыта, еслибы въ классическихъ трудахъ болѣе обращали вниманія на потребности обученія, приносившая и по содержанію къ болѣе удобной системѣ обученія. Впрочемъ, будемъ довольны и тѣмъ, что, по крайней мѣрѣ, во Франціи косвенное вліяніе Лагранжевской дѣятельности ощущается и въ позднѣйшихъ руководствахъ Политехнической Школы. Курсъ анализа Навье, хотя и просто—учебникъ, но учебникъ, обработанный необыкновенно тщательно и основательно. Хотя или, лучше, потому что онъ не изъ новѣйшихъ и слѣдовательно не обезображенъ иными излишними и замысловатыми модными пустяками, онъ выгодно отличается отъ новыхъ своихъ конкурентовъ. Есть и другіе подобные курсы Политехнической Школы, авторы которыхъ иногда принадлежатъ къ знаменитымъ математикамъ, какъ наприм. курсъ Штурма; но здѣсь уже одно то обстоятельство, что по смерти автора исправленіе текста беретъ другой и даетъ неудовлетворительную редакцію, можетъ склонить вѣсы въ противную сторону. Книга Навье, непосредственно отвѣчавшая потребностямъ преподаванія и получившая поэтому заглавіе *Résumé de leçons*, появилась въ нѣмецкомъ переводѣ, подъ именемъ Дифференціального и Интегрального Исчисленія, въ 4-мъ изданіи (Ганноверъ 1875 г.) и притомъ съ такими добавленіями переводчика, что даже любителю причудливыхъ модъ и игрушекъ, не исключая даже Гауссо-Римановскихъ построеній мнимаго, не остается желать ничего больше. Но самъ по себѣ текстъ Навье составленъ здраво и чуждъ неестественной взвинченности пониманія и искусственности изложенія, на что сплошь и рядомъ натыкаешься въ новѣйшихъ работахъ, какъ наприм. въ *Cours d'analyse* Эрмита (Paris 1873).

Весьма недурно, что нѣмецкій переводъ курса Навье вышелъ новымъ изданіемъ и употребляется въ высшихъ техническихъ школахъ. Кому нужна нѣмецкая книга, тому всего лучше взять курсъ Навье. Но кому французскій языкъ не представляетъ никакихъ помѣхъ, и кто пожелаетъ при этомъ воспользоваться и нѣкоторыми очевидными практическими выгодами, какъ наприм. прибавленіемъ краткаго *repetitorium'a*, тому большую пользу принесетъ новѣйшее изданіе Штурмовскаго курса. Каково его значеніе, какую эпоху и какую точку зрѣнія онъ представляетъ, ближайшія указанія объ этомъ, равно и кое-что еще по характеристикѣ этого курса см. въ нашихъ „Новыхъ основаніяхъ“.

199. Особья качества новыхъ французскихъ учебныхъ курсовъ вышеуказаннаго рода, натурально, оставляютъ желать многого, а именно они похожи не только на всѣ учебники, но и на всѣ иные полные трактаты въ этой области тѣмъ, что ни въ основѣ, ни въ выполненіи совсѣмъ не даютъ точной логики безконечно-мало. Но этого и нужно было ожидать, такъ какъ даже Лагранжъ ограничился тѣмъ, что просто обошелъ понятіе неограниченно-мало, да и вообще ни одинъ изъ числа позднѣйшихъ немногихъ образцовыхъ математиковъ не прилагалъ ровно никакихъ стараній, не говоря уже о стараніяхъ, которыя увѣнчались бы успѣхомъ, къ разрѣшенію разсматриваемыхъ трудностей. Коши, Гауссъ и Якоби занимались, вообще, только разработкою частныхъ, и имъ совсѣмъ не присуще было то чутье къ логическому и систематическому изяществу, которое повело Лагранжа дальше частныхъ вопросовъ и сдѣлало изъ него поборника античной строгости. Даже вообще имъ повсюду чуждъ былъ духъ 18-го столѣтія съ его логически просвѣтительнымъ направленіемъ; ибо легитимистъ и іезуитскій учитель Коши и ограниченный въ религіозномъ отношеніи, ладкій до протекцій высокопоставленныхъ особъ и до чиновныхъ титуловъ массонъ Гауссъ, поистинѣ, не являли собою типовъ въ смыслѣ 18-го столѣтія. Якоби же, съ своею склонностью къ изслѣдованію частныхъ, изолированныхъ вопросовъ, чтобы не сказать просто отрывковъ научнаго цѣлаго, совсѣмъ не симпатизировалъ такому законченному мышленію, какое находимъ у Лагранжа, и это въ немалой степени слѣдуетъ отнести на счетъ расовой особенности, хотя качество это, при высокихъ дарованіяхъ этой личности, и не могло вліять такъ неблагопріятно, какъ у современныхъ сильно ожидавленныхъ эпигоновъ, которые вконецъ утратили всякое чутье къ цѣлому, къ строгому обоснованію и къ ясной концепціи понятій. Въ самомъ дѣлѣ, общій способъ разсмотрѣнія и разработки вещей, коренится-ли онъ въ благопріятномъ духовномъ строѣ эпохи, или же слѣдуетъ ложному руководительству племенныхъ и унаслѣдованныхъ склонностей, такъ или иначе, не остается безъ вліянія и на математику. Характеръ образа мышленія не можетъ расколоться такъ, чтобы регрессъ или застой въ одномъ направленіи совсѣмъ не оказывалъ вліянія на состояніе другого, а потому вообще на 19-е столѣтіе слѣдуетъ смотрѣть какъ на время попятнаго движенія и въ формальной разработкѣ математики, и какъ на фазу изнеможенія логическаго и систематическаго духа. Предшествовавшій взмахъ, какъ онъ представляется въ особенности Лагранжемъ, еще не вполне достигъ цѣли, и такъ какъ не дано было ничего, что непосредственно

могло бы вести дальше, то естественно и послѣдовало движеніе вспять.

Этотъ регрессъ еще всего сноснѣе проявился въ методѣ, котораго обыкновенно придерживаются французскіе учебники. Правда, онъ отвергалъ превосходство и тонкость Лагранжевскаго способа воззрѣнія, но, по крайней мѣрѣ, не приводилъ къ чему либо худшему неточной Ньютоно-д'Аламберовской методы предѣловъ, съ которою во всякомъ случаѣ можно примириться, устранивъ ложные ея элементы. Почти во всѣхъ курсахъ этого рода, не исключая и курса Навье, доказательства начинаются съ такъ называемыхъ конечныхъ разностей. Эти опредѣленные разности, обыкновенно обозначаемыя большою дельтою, подлежатъ, по установкѣ формулъ, неограниченному уменьшенію, ибо онѣ, какъ говорится, при переходѣ къ предѣлу — нулю исчезаютъ. При этомъ исчезновеніи онѣ замѣняются обыкновенными знаками дифференціала. Весь этотъ пріемъ болѣе или менѣе неточенъ, хотя и представляетъ попытку покончить съ выдумкою безконечно малаго. Въ самомъ дѣлѣ, упомянутыя разности, отъ которыхъ здѣсь исходятъ, не могутъ сдѣлаться тѣмъ, чѣмъ онѣ не были; ибо между ними и нулемъ въ строгомъ смыслѣ нѣтъ никакой середины. Разъ онѣ исчезли, то нѣтъ и никакого дифференціала. Поэтому для большей ясности слѣдовало бы эти малыя разности ввести тотчасъ же съ знакомъ дифференціала, указывая при этомъ только то, что этимъ малымъ разностямъ должно приписать свойство уменьшаться неограниченно до нуля. Въ этомъ свойствѣ и заключается сущность дифференціала, причемъ онъ есть ничто иное какъ просто нѣкоторая малая разность. Въ такомъ разѣ вся эта мистическая возня съ актомъ исчезновенія, съ переходомъ къ предѣлу, или какъ хотите назовите эту воображаемую станцію передъ обращеніемъ въ нуль, или передъ строгимъ совпаденіемъ съ предѣломъ, — весь этотъ наборъ нелѣпостей будетъ устраненъ, и уже символика такого заключенія своею простотою не обнаружитъ никакой нелогичной двойственности представленія. Во всякомъ случаѣ, въ исчисленіи конечныхъ разностей въ собственномъ смыслѣ, причемъ должно быть исключено неограниченное уменьшеніе, для отличія должна быть принята и другая нотация; но чистое сумасбродство не приписывать въ дифференціальномъ исчисленіи этимъ малымъ величинамъ или отрѣзкамъ тотчасъ же свойства просто изображать собою произвольно малые элементы. Такимъ образомъ, этого рода исправленіе такъ называемой методы предѣловъ необходимо для приданія основнымъ выводамъ учебниковъ, въ нѣкоторой мѣрѣ, логической формы, и учащійся, чтобы ориентироваться, долженъ самъ озаботиться такимъ улучшеніемъ.

Кардинальная ошибка метода предѣловъ уже замѣчается у самого д'Аламбера въ статьѣ «Дифференціалъ» въ Энциклопедіи, и, не смотря на это, постоянно снова и снова повторяется вотъ уже болѣе столѣтія. Она состоитъ просто въ томъ, что предѣлъ, соответствующій случаю нуля, строго приравниваютъ частному дифференціаловъ и, слѣдовательно, думаютъ разрѣшить затрудненіе уравненіемъ $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, тогда какъ именно въ этомъ-то уравненіи и содержится противорѣчіе и ложь. Лагранжъ, не допуская сѣбя сюда понятія предѣла, тѣмъ не менѣе, во второмъ изданіи своей Теоріи функцій дѣлаетъ ту-же ошибку; ибо его производная y' есть ничто иное какъ точный предѣлъ, и тѣмъ не менѣе при сравненіи своего функціоннаго исчисленія съ дифференціальнымъ онъ позволяетъ себѣ замѣну y' выраженіемъ $\frac{dy}{dx}$, какъ слѣдствіе количественнаго равенства обоихъ выраженій. Но уравненіе $y' = \frac{dy}{dx}$ на дѣлѣ то же самое что и $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, и оба невѣрны. Только при одномъ предположеніи, — но оно не имѣетъ мѣста, — были бы они правильны, именно еслибы было $dy = 0$ и $dx = 0$. Но этого не можетъ быть, пока dy и dx остаются вообще величинами и дифференціальными элементами. Потому, правильное уравненіе будетъ $y' = \lim \frac{dy}{dx}$. dy тогда только имѣетъ смыслъ, когда это количество не должно уменьшаться неограниченно; иначе оно уже не будетъ ограниченной малою разностью, и указаніе опредѣленной величины противорѣчитъ фактически предполагаемому произвольному уменьшенію до предѣла — нуля. Но въ такомъ разѣ употребленіе обозначенія dy — неумѣстно. Итакъ, правильно будетъ одно — съ самаго начала писать dy , представляя при этомъ разность, имѣющую свойство изображать всякую степень малости, безъ всякаго ограниченія. Такимъ образомъ, dy есть разность въ обыкновенномъ смыслѣ слова, разность какой угодно величины, но которую цѣлесообразно сразу представлять себѣ величиною относительно малою, чтобы приблизительно видно было, что кромѣ свойства обыкновенной разности должна быть рѣчь о безпредѣльномъ умаленіи. Итакъ, правильное уравненіе, которымъ исправляется и Лагранжевое слѣдованіе ложной традиции, и вмѣстѣ съ тѣмъ, естественно, устраняется и д'Аламберовская ошибка метода предѣловъ, есть $y' = \lim \frac{dy}{dx} = \epsilon$, гдѣ ϵ — неограниченно малое количество. Но чтобы радикально исправить методъ предѣловъ, нужно бы было писать $\lim \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = \epsilon$; иначе этотъ методъ признавалъ бы два понятія о предѣлѣ, одно — тонкое, другое — грубое, все равно какъ еслибы въ геометріи мы захотѣли отождествить истинное и

несомнѣнное понятіе линіи съ однимъ протяженіемъ съ понятіемъ линіи, имѣющей ширину и толщину.

200. Однако, простымъ раціонализированіемъ не совсѣмъ удачной методы предѣловъ еще не все сдѣлано для ясности пониманія. Учащійся долженъ еще постараться, слѣдую вышеизложеннымъ нашимъ указаніямъ, уяснить себѣ двѣ системы обработки, и только совокупность ихъ дастъ вполне удовлетворительную логику дифференціального и функціоннаго исчисленія. Приѣмъ исчисленія съ настоящими дифференціалами нужно разсматривать какъ сокращенную методику. Но съ Карнотовскимъ понятіемъ несовершенныхъ уравненій, какъ съ понятіемъ слишкомъ неопредѣленнымъ, согласиться нельзя. Впрочемъ, Карно всетаки мы обязаны хоть тою услугою, что онъ сдѣлалъ попытку непосредственно оправдать вычисленіе, оперирующее съ настоящими дифференціалами, допущеніемъ хотя-бы, такъ сказать, хромыхъ уравненій. Но онъ никакъ не могъ достигнуть вполне отчетливыхъ и дозволильныхъ понятій; онъ не сумѣлъ даже расквитаться и съ Эйлеровскимъ воззрѣніемъ, по которому дифференціалы считаются нулями въ строгомъ смыслѣ слова. Но подобное шаткое отношеніе не соединимо съ отчетливыми и ясными понятіями. Нужно принимать эти разности такъ, какъ онѣ имѣютъ мѣсто и на практикѣ въ приложеніяхъ. Фактическое вычисленіе то урѣзываетъ, то оставляетъ эти знаки безъ измѣненія, т.-е. въ ихъ первоначальномъ смыслѣ. Величина дѣйствительно вычисляемаго дифференціального частнаго отъ x^2 есть $2x$, т.-е. сокращена откидываніемъ. Но если въ этомъ случаѣ написать $\frac{dy}{dx} = 2x$, то $\frac{dy}{dx}$ ни въ чемъ не измѣнено и не сокращено. Строгое уравненіе было бы $\lim \frac{dy}{dx} = 2x$. Пренебрегая этимъ различіемъ, мы этимъ самымъ открываемъ доступъ двусмысленному языку знаковъ всѣхъ дифференціальныхъ уравненій.

Чтобы въ эту двусмысленность знаковъ внести ясность, т.-е. строго дозволительную взаимность смысла, нужно знакъ равенства въ этихъ случаяхъ непосредственно разсматривать какъ знакъ неограниченнаго приближенія къ равенству, и соотвѣтственно этому давать ему различныя значенія. Въ такомъ случаѣ разъ навсегда можно доказать, что заключенія и законы дѣйствій могутъ быть передаваемы такъ же точно неограниченно малыми неравенствами, какъ и строгими уравненіями. Такимъ образомъ будетъ удержана сущность непосредственнаго исчисленія съ настоящими дифференціалами, и нечего останавливаться здѣсь въ недоумѣніи, напротивъ того, нужно приучиться имѣть въ виду самые эти малые элементы. Нужно освободиться отъ распространяемаго учебниками узкаго взгляда, что дифференціалы можно допускать только въ частныхъ

или только какъ факторы такихъ частныхъ. Ищущій основательныхъ познаній долженъ собственными усиліями и самостоятельнымъ исправленіемъ дѣла высвободиться изъ оковъ способа представленія учебниковъ, и приобрести навыкъ въ обращеніи съ каждымъ отдѣльнымъ дифференціаломъ, пользуясь нагляднымъ представленіемъ дифференціала посредствомъ числовой единицы или дроби, а въ геометрическихъ приложеніяхъ—при помощи пространственныхъ частицъ. Именно, если представлять себѣ числовой рядъ какъ рядъ неограниченный, а переменныя величины мыслить въ такомъ состояніи, когда они представляютъ уже значительныя числовыя величины, то можно единицу, — натурально, имѣя въ виду возможные ея подраздѣленія, — разсматривать какъ весьма пригодное средство для нагляднаго представленія нѣкоторой дифференціальной части всей величины, и такой способъ представленія имѣетъ то преимущество, что онъ совершенно абстрактенъ. Впрочемъ, геометрическіе образы, въ смыслѣ нагляднаго представленія, остаются единственными непосредственными образами уясненія непрерывности уменьшенія и накопленія величинъ. Впрочемъ, непрерывность вовсе не есть непосредственное предположеніе; ибо нужно всего лишь вообразить себѣ, что каждая изъ единицъ числового ряда подраздѣляется неограниченно и, слѣдовательно, слагается изъ произвольно малыхъ дробныхъ единицъ. Этой чисто мысленной неограниченной возможности вставокъ дробныхъ единицъ достаточно, чтобъ дать дифференціальному исчисленію подобающій числовой матеріалъ, да притомъ мы имѣли бы и логически болѣе надежный путь, допустивъ въ величинахъ пространственныхъ и временныхъ, равно и во всѣхъ приложеніяхъ къ дѣйствительности, на мѣсто нерѣдко туманнаго понятія непрерывности лишь понятіе мысленно неограниченной дѣлимости и подраздѣляемости, слѣдовательно, понятіе постановки единицъ мѣры и подраздѣленій единицы. Впрочемъ, главное дѣло, которое мы здѣсь преимущественно имѣемъ въ виду, отъ этого не зависитъ. Нужно было только показать, что во всякомъ случаѣ можно и должно дѣйствительно представлять себѣ изолированные дифференціалы.

Вторая система, благодаря которой первый, самъ по себѣ удовлетворительный, пріемъ испытываетъ важное для особыхъ цѣлей пополненіе и расширеніе, есть система, въ которой дифференціалы, какъ величины просто вспомогательныя, въ самомъ дѣлѣ доводятъ до исчезновенія и оставляютъ лишь вполнѣ опредѣленные функции, безъ какихъ-либо приблизительныхъ элементовъ. Это—чистое функціонное исчисленіе, т.-е. оперированіе съ производными и съ первоначальными функциями (Stammfunctionen). Лагранжъ

создалъ и провелъ эту строгую систему, но не охарактеризовалъ вполне удовлетворительно сопредѣльныхъ отношеній къ другой системѣ. Въ самомъ дѣлѣ, у него не видно, что безъ настоящихъ, но правильно понимаемыхъ дифференціаловъ нельзя приготовить исчисленія съ производными функциями, а слѣдовательно нельзя и выполнить. Дѣло не въ томъ, чтобы исходнымъ пунктомъ брать разложеніе функцій въ рядъ, а въ томъ, что въ ряду ли, или въ другой какой формѣ функцій, должно примѣнять вспомогательныя величины, которыя во всякомъ случаѣ суть разности, на мѣсто которыхъ въ концѣ концовъ ставится ноль. Но такія разности, которыя могутъ обращаться въ ноль,—пока еще онѣ не нули, суть ничто иное какъ дифференціалы, представлять ли ихъ какъ угодно большими или какъ угодно малыми; ибо въ направленіи возрастанія предѣлъ можетъ быть положенъ только природою самой функцій или цѣлю, надлежаше расчленивъ ея теченіе. Если такимъ образомъ исчисленіе производныхъ какъ бы подходитъ къ дифференціальному и, также точно, если интегральному исчисленію соответствуетъ опредѣленіе первоначальныхъ функцій по производнымъ, то это усугубленіе нисколько не излишнее, но, за исключеніемъ того, что обще обѣимъ системамъ, есть дѣйствительно новое приобрѣтеніе. Въ самомъ дѣлѣ, дѣйствительными дифференціалами совсѣмъ нельзя покрыть чисто пунктуальныхъ понятій геометріи и механики. Ни касательныхъ въ античномъ смыслѣ, ни скорости, соответствующей непротяженному пункту времени, нельзя точно опредѣлить посредствомъ приближеній, и должно бы было еще прежде всѣ геометрическія и механическія понятія замѣнить соответствующими геометрически-дифференціальными приблизительными понятіями, чтобы неопредѣленность вычисленія согласовалась съ неопредѣленностью предметовъ приложенія. Это, напримѣръ, и было сдѣлано, когда касательную опредѣлили какъ продолженіе элемента кривой, и слѣдуетъ признаться, что инаго выбора и нѣтъ, какъ или всѣ хорды, которыя можно провести чрезъ элементъ кривой отъ одного его конца, принимать, такъ сказать, суммарно за тангенціальныя, или же строгимъ употребленіемъ настоящаго функціоннаго исчисленія сдѣлать анализъ способнымъ отвѣчать точнымъ и вполне опредѣленнымъ понятіямъ древней геометріи и, аналогично, самимъ собою навязывающимся понятіямъ механики.

Тутъ-то и становится неизбежною необходимостью изученіе Лагранжевой Теоріи функцій и его функціоннаго исчисленія. Именно, если можно забраковать и вспомогательныя величины и такимъ образомъ отъ дифференціальныя частныхъ сдѣлать строгій переходъ къ чистымъ функциямъ и обойтись при этомъ безъ особаго

Лагранжевскихъ пріемовъ, то все-таки нужно указаніе, какимъ образомъ эти строгія понятія геометріи и механики соотвѣтствуютъ прямо лишь функціямъ, освобожденнымъ отъ примѣси неограниченно малыхъ величинъ. Но подобнымъ образомъ выполненное доказательство, притомъ въ классической формѣ, можно встрѣтить только въ «Теоріи аналитическихъ функцій». Это фундаментальное твореніе даетъ полное начертаніе всѣхъ существенныхъ функціонныхъ отношеній, вмѣстѣ съ главнѣйшими ихъ приложениями къ основнымъ понятіямъ высшей геометріи и механики. Исключеніе дифференціальной нотации въ немъ—вещь существенная; и текстъ вовсе перестаетъ гармонировать съ формулами, если, какъ это сдѣлалъ нѣмецкій переводчикъ Крелль (давшій подъ неискусно измѣненнымъ заглавіемъ «Lagranges mathematische Werke», 3 т. Берлинъ 1823—24 г., теорію функцій, функціонное исчисленіе и статью о числовыхъ уравненіяхъ, но не давшій механики) избранную авторомъ нотацию замѣнить обыкновеннымъ знакоположеніемъ дифференціального исчисленія. Такое искаженіе оригинала, усиленное еще комическою дерзостью переводчика, именно, вставкою имъ въ Лагранжевскій текстъ своихъ, якобы разъяснительныхъ, разглагольствій,—все это въ совокупности можетъ заставить пользоваться переводомъ только въ случаѣ крайней необходимости, и желательно, чтобы тѣ, кто по незнанію языка не можетъ прямо пользоваться оригиналомъ, по крайней мѣрѣ, справлялись съ нимъ во всемъ, что касается формулъ. Безъ этого дополненія будетъ не только испорчено эстетическое впечатлѣніе цѣлесообразной нотации, но и нанесенъ не маловажный ущербъ точному пониманію дѣла, надлежаще уясняемаго и отчетливо выражаемаго только этимъ знакоположеніемъ; и такой ущербъ едвали можетъ уравниваться стараніемъ самого читателя свыкнуться съ новыми, подлежащими тонкому различенію, понятіями, противорѣчащими подсунутой ему старой символикѣ.

Чего-либо въ какомъ угодно отношеніи совершеннаго внѣшнее соединеніе начертаній Лагранжа съ необходимостями непосредственнаго, но рационализированнаго дифференціального исчисленія, конечно, еще не даетъ. Отсылаемъ къ нашему подробному изслѣдованію этого вопроса въ трактатѣ объ «Основаніяхъ», а также и къ мимоходомъ указанной тамъ возможности, если угодно, даже и приравниваніе нулю устранить примѣненіемъ обобщенной аналогіи нашего исчисленія значностей. Хотя именно этому второстепенному отпрыску нашихъ методическихъ указаній придается особый вѣсъ и его сдѣлали исходнымъ пунктомъ разработки главныхъ пунктовъ дифференціального исчисленія, однако же сами мы далеки отъ

того, чтобы рекомендовать его для практического употребленія. Скорѣе, мы защищаемъ непосредственную и цѣлостную систему, въ которой двоякаго рода понятія сопринадлежны настолькоъ, что понятіе одного рода прямо требуется другимъ. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя имѣть правильнаго понятія о дифференціалѣ и о дифференціальномъ частномъ, если вмѣстѣ съ тѣмъ не имѣется понятія о чистомъ коэффициентѣ или о безпримѣсномъ значеніи. Нужна эта безпримѣсная функція, имѣющая опредѣленное значеніе, въ то время какъ малыя разности можно выбирать какъ угодно, функція, называемая предѣломъ или производною функціею, — нужна она, а не та болѣе специальная точка зрѣнія, которая даетъ ей имя. Безъ нея все остальное — шатко и многозначно. По сравненію съ ней и тщательно различаемыя отъ нея, дифференціальныя частныя только и получаютъ истинный, принадлежащій имъ смыслъ, свободный отъ всякихъ метафизическихъ вымысловъ.

Въ виду этого, и соотвѣтственно и автоматическому, но отуманенному метафизикою, историческому ходу дѣла, какъ теоретической, такъ и практической потребности можно удовлетворить не иначе, какъ непосредственно сохраняя дифференціалы, но при этомъ вводя, какъ неизбѣжную принадлежность, и эти чистыя и опредѣленныя значенія. Такимъ образомъ получается вычисленіе не одностороннее, а оперирующее какъ въ стадіи приближенія, такъ и съ опредѣленными значеніями. Нерѣдко, въ примѣненіяхъ къ физикѣ, къ практическимъ результатамъ прямо только и можно придти, вводя въ одно и то же уравненіе, рядомъ съ чистымъ понятіемъ предѣла, еще понятіе дифференціала, и основывая заключенія на взаимномъ различіи того и другаго понятія. Но подобнаго тонкаго средства пока мы не встрѣчаемъ даже и у Лагранжа. Его сила заключалась въ томъ, что онъ обошелъ понятіе дифференціала, и во всей чистотѣ выказалась только въ первомъ изданіи его Теоріи функцій, въ которой онъ ничего не говоритъ объ отношеніяхъ къ непосредственнымъ дифференціаламъ. Непосредственно о дифференціалѣ онъ не имѣлъ рачіональнаго понятія, но имѣлъ о немъ понятіе, какъ о метафизической гипотезѣ. И такъ, какъ здѣсь, такъ и въ иныхъ нашихъ трудахъ изложенное достаточно освѣщаетъ такое заключеніе, что и въ чисто математическихъ, и въ вещественныхъ понятіяхъ нужно въ одно и то же время соображаться съ обоимъ рода воззрѣніями и позиціями, принимая во вниманіе и предварительную стадію неограниченнаго приближенія, и случай строгаго предѣла. Безъ такой комбинаціи весь способъ дифференціальнаго исчисленія, или какъ хотите назовите всю эту область, является чѣмъ-то теоретически несовершеннымъ, а практически недостаточнымъ.

201. Кто скорѣе покончить съ учебникомъ обыкновеннаго рода, чтобы затѣмъ перейти къ гениальному фундаментальному творенію, тотъ лучше озаботится о своемъ болѣе совершенномъ развитіи. Идеаломъ ученія было бы совмѣстное изученіе обыкновеннаго руководства и гениальнаго основнаго произведенія. Способная голова будетъ обращаться къ обыкновенному учебнику только за справками, чтобы освоиться съ обычнымъ матеріаломъ въ употребительнѣйшей формѣ, будетъ ли это общепринятое правильно или ложно, и чтобы имѣть подъ рукою тѣ дополненія, какія учебный курсъ сообщаетъ и изъ смежныхъ областей, а при случаѣ и изъ области болѣе элементарныхъ вспомогательныхъ дисциплинъ. Такъ наприм., курсы Парижской Политехнической Школы составлены удобопонятно, хотя бы изъ аналитической геометріи и были знакомы читателю пока лишь простѣйшія основныя представленія. Не смотря на свою краткость, они содержатъ даже важнѣйшія приложенія анализа къ геометріи. Хотя тоже самое можно сказать и о такомъ основномъ произведеніи, какъ Лагранжевое, по скольку и въ немъ нѣтъ недостатка въ элементарныхъ приложеніяхъ, все-же изложеніе и форма его настолько систематичны, что въ него неумѣстно было вплетать просто въ виду пользы при изученіи, какія либо неоднородныя ему вспомогательныя ученія или пускаться въ подробныя изложенія предварительныхъ свѣдѣній изъ аналитической геометріи. Эти обстоятельства были бы совсѣмъ неважны, если бы имѣлось соотвѣтственное новое основное произведеніе о первыхъ основаніяхъ аналитической геометріи. Потому-то лишь въ рѣдкихъ случаяхъ, при отличныхъ дарованіяхъ, можетъ удасться попытка совсѣмъ обойти обычные учебники и курсы, и сразу приступить къ изученію прямо основнаго творенія. Въ другихъ же случаяхъ будетъ благопріятно вліять такое основное положеніе: заимствуй изъ обычныхъ учебниковъ, поканчивая съ ними какъ можно скорѣе, лишь необходимѣйшія элементарныя понятія, а затѣмъ переходи къ болѣе самобытнымъ источникамъ знанія.

Какъ бы то ни было, фундаментальныя произведенія съ своею системою нерѣдко являются представителями лишь одного способа воззрѣнія, пренебрегая другими, въ равной мѣрѣ полезными. Это вносится представляемымъ ими направленіемъ, и нечего удивляться, что значительный умъ неохотно нарушаетъ единство, благодаря которому группа его концепцій становится однороднымъ цѣлымъ. Представляя себѣ интегралъ просто какъ первоначальную функцію, а опредѣленный интегралъ какъ разность двухъ значеній этой начальной функціи, значитъ отвергать натуральнѣйшее исходное понятіе, именно пѣлаго—какъ суммы частицъ. Лагранжъ, у котораго

это послѣднее понятіе было самымъ обычнымъ во всѣхъ практическихъ приложеніяхъ, намѣренно налагаетъ на себя принужденіе въ своей Теоріи функций, и устраняетъ это представленіе; ибо только такимъ образомъ, думаетъ онъ, можно дать совершенно строгую систему. Но если обычные учебники лишь мимоходомъ замѣчаютъ, что знакъ интеграла, по своему происхожденію, есть знакъ суммы и что интеграль также можно понимать какъ сумму, то при этомъ они почти вполнѣ забываютъ о дѣйствительно практическихъ методахъ и способахъ представленія. Вообще, принимать общій интеграль за естественный исходный пунктъ и за источникъ происхожденія понятія объ интегралѣ, есть уже опрометчивое предположеніе: Происхожденіе и исходный пунктъ слѣдуетъ искать, скорѣе, въ области опредѣленныхъ интеграловъ. Всѣ задачи дѣйствительности являются опредѣленными задачами суммованія, и все это исчисленіе, какъ показываетъ исторія, возникло мало-по-малу, развиваясь изъ подобныхъ потребностей. Такимъ образомъ, тщательно не свыкаясь съ самаго начала во всѣхъ направленіяхъ съ понятіемъ суммированія всякихъ, между двумя предѣлами существующихъ, дифференціальныхъ элементовъ, мы прямо лишаемся такого представленія, которое дѣлаетъ изъ интегрального исчисленія непосредственное орудіе для приложеній. Но, какъ уже сказано, въ этомъ отношеніи учебники почти совсѣмъ забыли эту натуральную традицію, и предоставляютъ почти исключительно личному искусству учащагося самому выработать себѣ, когда встрѣтится надобность въ приложеніяхъ, это необходимое представленіе. Но мысль, что опредѣленные интегралы представляютъ ядро и естественный исходный пунктъ всей теоріи, хотя и основывается на самомъ предметѣ и на его исторіи, но есть совершенно новое воззрѣніе, и такъ какъ именно Лагранжъ въ своемъ основномъ произведеніи отнюдь этой мысли не раздѣляетъ, то она можетъ быть плодотворна при изученіи только при условіи, что самъ учащійся не будетъ забывать о ней въ каждомъ подлежащемъ случаѣ, и всюду радикально будетъ стремиться выдвигать ее на первое мѣсто. Тутъ то же самое, что и съ идеею, что частные, а не полные дифференціалы представляютъ настоящую и естественную абстракцію, о которой рѣчь идетъ при изслѣдованіи нѣсколькихъ, комбинирующихъ свои измѣненія, величинъ; ибо наприм. въ геометріи каждое измѣненіе можно разсматривать само по себѣ, и понятіе о приращеніи, происходящемъ просто въ одномъ направленіи, включаетъ высшую степень изолированности и отвлеченія, нежели представленіе о нераздѣльной совокупности полного приращенія. Но современные учебники отнюдь не воспитываютъ чутъ къ тому, что отношенія дѣйствительности представляются

намъ въ формѣ опредѣленныхъ, между естественными предѣлами взятыхъ, интеграловъ и парціальныхъ дифференціальныхъ отношеній, и что неопредѣленные интегралы суть лишь дополнительные особые продукты обобщающей, но потому-то и дѣлающей понятія болѣе и болѣе пустыми, теоріи. Это потому, что они пренебрегаютъ представленіемъ о суммѣ элементовъ; ибо интеграль, какъ сумма дифференціальныхъ элементовъ, требуетъ опредѣленнаго естественнаго ограниченія, а ограниченіе, какое, пожалуй, можно бы было подразумѣвать и при неопредѣленномъ интегралѣ, ограничивая его нулемъ и нѣкоторымъ произвольнымъ значеніемъ переменныхъ, въ высшей степени искусственно. Потому, самое понятіе неопредѣленнаго интеграла—производное, а понятіе опредѣленнаго интеграла—примитивно. Впрочемъ, только представленіе интеграла, какъ результата суммованія, только одно оно надлежало и причисляется исчисленію съ настоящими дифференціалами. Такое ничѣмъ не оправдываемое избѣганіе представленія суммы дифференціаловъ только и можно объяснить себѣ тѣмъ, что представленіе непосредственныхъ дифференціаловъ доселѣ все еще продолжаетъ считаться пугаломъ.

Чтобы сказанное въ предыдущемъ § пополнить здѣсь соотвѣтственными указаніями о понятіи интеграла, и такимъ образомъ еще яснѣе выставить идею суммированія, прибавимъ слѣдующее. Что касается интеграла въ обычномъ смыслѣ, то понятіе это отличается такою же двойственностью, какъ и понятіе дифференціала, причемъ обѣ различаемыя другъ отъ друга величины, каждую самое по себѣ, точнѣе уяснимъ, исходя изъ суммированія. Сумма всѣхъ неурѣзанныхъ разностей, будутъ ли онѣ ограничено или неограниченно малы, всегда есть въ точности совокупность (integrum) измѣненій между двумя предѣлами, между которыми мыслятся и накопляются дифференціаціи. Но на дѣлѣ интеграль, какъ и дифференціаль, есть нѣчто сокращенное. Онъ отличается отъ сказанной суммы на интеграль разностей втораго порядка, т.-е. на малую величину неограниченной опредѣлимости. Напримѣръ $\int_0^x 2x dx = x^2$ не есть уравненіе точное, но неограниченно малое отклоненіе отъ равенства или, если угодно, неограниченно малая неточность. Если не урѣзывать уравненіе, относительно интеграла, то должно писать $\eta + \int_0^x 2x dx = x^2$, или же, сокращая обѣ части, писать $\int_0^x 2x dx = x^2 - \eta$. Отклоненіе η дѣйствительнаго интеграла отъ его предѣла, т.-е. отъ предѣльнаго значенія для случая, когда дифференціаль равенъ нулю, это отклоненіе η есть функція отклоненія ω , на которое интегриру-

емый дифференціалъ разнится отъ своего неурѣзаннаго выраженія. Въ нашемъ простомъ примѣрѣ неурѣзанная разность $= 2x dx + dx^2$, слѣдовательно $\omega = dx^2$, а $\eta = \int_0^x dx^2 = x dx$. Если отнести знакъ суммы

сразу къ неурѣзаннымъ разностямъ, т.-е. взять $\int_0^x (2x dx + dx^2)$, то, вмѣстѣ съ этимъ, было бы точно опредѣлено и интегральное выраженіе, и, при этомъ, для всѣхъ значеній dx , все равно, предположить ли ихъ большими или неограниченно малыми.

Въ предѣльномъ значеніи для $dx = 0$ обстоятельство существованія или несуществованія урѣзки не составляетъ никакой разницы. Такъ какъ $\lim \int_0^x (2x dx + dx^2) = \int_0^x (2x dx + dx^2)$, ибо, какъ сказано, величина послѣдней суммы для всякаго dx постоянна, и такъ какъ, кромѣ того, соотвѣтственно вышесказанному, $\lim \int_0^x 2x dx = \lim \int_0^x (2x dx + dx^2)$, то $\lim \int_0^x 2x dx = \int_0^x (2x dx + dx^2)$. Итакъ, предѣльная величина функціи, т.-е. ея значеніе для случая дифференціала, равнаго нулю, равна неурѣзанному выраженію суммы, въ которомъ независимый дифференціалъ можетъ имѣть всякое количественное значеніе, вообще совмѣстное съ составомъ и ходомъ функціи. Здѣсь интересно то обстоятельство, что точный предѣлъ интеграла можно въ точности выразить посредствомъ вспомогательныхъ величинъ, между тѣмъ какъ отъ вспомогательныхъ величинъ этотъ предѣлъ эффективно независимъ. Впрочемъ, то же самое имѣетъ мѣсто и для предѣла дифференціального частнаго, такъ что во всѣхъ предѣльныхъ значеніяхъ функцій, при точномъ вычисленіи, эти второстепенныя количества въ точности взаимно уничтожаются, какія бы значенія имъ ни придавать. Поэтому, неограниченное приближеніе къ предѣлу нужно только для того, чтобы показать, каково отношеніе урѣзанныхъ выраженій.

Послѣднее главное обстоятельство всего очевидно же выказалось на интегралѣ какъ на суммѣ элементовъ, и какъ мы особенно отчетливо отмѣтили неточность и поверхностность основныхъ представлений, какъ они даются учебными курсами, то указаніе на точныя различія понятій интеграла представилось удобнымъ средствомъ къ указанію недостатковъ обычнаго изложенія. Обозрѣвая школьныя теоріи, какъ онѣ до сихъ поръ даются, найдемъ, что хотя и примѣняется знакъ $\lim \Sigma$, но не встрѣчается характеристики урѣзаннаго значенія обыкновеннаго интеграла, т.-е. урѣзанной суммы

элементовъ, какъ таковой. Число элементовъ неограниченно велико, но, несмотря на это, сумма всегда остается ниже предѣльнаго значенія. Чтобы получить это послѣднее, необходимъ скачекъ отъ случая величины къ случаю нуля, при чемъ понятія разности и дифференціала, суммы и интеграла теряютъ всякій смыслъ. Эти понятія должны здѣсь исчезать, ибо они стоятъ въ противорѣчій съ нулевымъ значеніемъ. Но потому-то именно и необходимо имѣть вычисленіе, которое, каковы бы ни были знаки, въ цѣлесообразномъ сочетаніи оперировало бы съ обоимъ рода величинами, и съ опредѣленными предѣльными величинами, и съ смежными ихъ значеніями.

202. Всѣ приложенія анализа къ дѣйствительности природы идутъ чрезъ геометрію, ибо они, прежде всего, предполагаютъ приложенія къ пространственнымъ образамъ. То, что называется аналитической геометріей, въ болѣе обширномъ смыслѣ, есть приложеніе всего анализа къ пространственнымъ отношеніямъ. Въ этомъ обширнѣйшемъ смыслѣ она обыкновенно входитъ въ составъ самыхъ курсовъ анализа, ибо, если не обращаться къ высшей геометріи, то самое исчисленіе стало бы слишкомъ ненаглядно-абстрактнымъ для изученія, и какъ анализъ существуетъ не ради самого себя, но какъ средство изслѣдованія величинъ, то онъ долженъ имѣть ближайшимъ предметомъ изслѣдованія какой-либо частный родъ количествъ. Но въ болѣе узкомъ смыслѣ аналитическая геометрія обнимаетъ только общія основоположенія, слѣдуя коимъ отношенія геометрическихъ образовъ могутъ быть сводимы къ алгебраическимъ выраженіямъ. Представленіе кривой линіи въ смыслѣ древнихъ, какъ общаго мѣста точки, которой положеніе всегда соотвѣтствуетъ опредѣленной совокупности предписаній, съ одной стороны, а съ другой стороны, выраженіе данныхъ для опредѣленія этой, такъ сказать, общей точки кривой линіи,—выраженіе этихъ данныхъ отношеній общими количественными знаками посредствомъ алгебраическихъ комбинацій, это—двѣ весьма другъ къ другу близкія мысли. Существенный шагъ въ направленіи къ аналитической геометріи былъ уже подготовленъ на зарѣ новаго времени этимъ представленіемъ геометрическихъ мѣстъ. То, что прибавили къ этому Декартъ и новыя, это—переводъ на языкъ алгебраическихъ символовъ. Разъ имѣется уравненіе кривой, то оно позволяетъ предпринять все, что угодно, для развитія возрѣнія на свойства кривыхъ, и тѣмъ основательнѣе, чѣмъ дальше ушли алгебра и анализъ. Такимъ образомъ, аналитическая геометрія есть не столько самостоятельная наука, сколько особый методъ, и ознакомленіе съ этимъ методомъ должно быть возможно упрощено учащемуся. Употребленіе координатъ, выраженіе свойствъ уравненіями и изслѣдованіе послѣднихъ, равно какъ и обратный переводъ

символическихъ результатовъ на наглядный геометрическій языкъ—таковы здѣсь главные пункты. Этотъ методъ надлежитъ, прежде всего, изучать только на кругѣ и на остальныхъ коническихъ сѣченіяхъ, чтобъ освоиться съ его общими приѣмами, а остальное закончить въ связи съ высшимъ анализомъ, какъ это принято, т.-е. руководствуясь вышеупомянутыми курсами. Учебники, совмѣщающіе въ себѣ весь матеріалъ, даже до специальностей о поверхностяхъ третьяго порядка, наприм. въ родѣ Салмоновскаго, или, обращаясь къ другому примѣру,—въ родѣ тяжеловѣсно педантическихъ лекцій О. Гессе, дающихъ, по меньшей мѣрѣ, большую часть матеріала,—въ сущности, ведутъ къ уклоненіямъ отъ прямого пути и къ обремененію учащагося. Подобные широковысказательные трактаты не есть что-либо существенно важное, и учащійся легко можетъ овладѣть всѣми математическими главными средствами и безъ такого нагроможденія аналитически-геометрическаго матеріала. Поэтому, вначалѣ надо ограничиваться основоположеніями метода, такъ, какъ онъ является въ простѣйшихъ отношеніяхъ, а затѣмъ нужно стараться идти дальше въ анализѣ въ собственномъ смыслѣ слова, къ которому высшія геометрическія приложенія свободно примыкаютъ, и ихъ нечего искать въ другаго рода учебникахъ. Конечно, въ поискахъ и за этими, такъ называемыми элементами аналитической геометріи, прежде всего нужными, можно смѣло опустить руку въ урну, какъ и въ случаѣ элементовъ низшей математики, ничѣмъ приэтомъ не рискуя.

203. Во всѣхъ приложеніяхъ алгебры и анализа къ геометріи учащійся долженъ особенно имѣть въ виду два обстоятельства, а именно—истинное значеніе знака минуса и способъ, какимъ прямо получаютъ аналитическія выраженія пространственныхъ формъ. Прежде всего, что касается геометрическаго смысла знака вычитанія или, выражаясь пока въ ложномъ новомъ стилѣ,—что касается отрицательныхъ величинъ, и именно—отрицательныхъ протяженій, то здѣсь нужна чистка уже въ элементарныхъ основаніяхъ науки. И рѣчь идетъ здѣсь объ одномъ изъ важнѣйшихъ предметовъ, значеніе котораго равносильно значенію ученія о неограниченно маломъ. Въ математикѣ нельзя достигнуть логической строгости, пока смыслъ, какой имѣютъ знаки, первоначально и въ приложеніяхъ окруженъ туманомъ или опредѣляется совершенно произвольно и эмпирически внѣшне. Смыслъ этотъ нужно выводить изъ одного единственнаго основнаго понятія, идетъ ли рѣчь о тригонометрическихъ функціяхъ въ элементахъ тригонометріи, или о собственно аналитической геометріи. Разъ здѣсь основаніе заложено правильно, то можно смѣло смотрѣть на всѣ алгебраическія и аналитическія

комбинаціи, включая и мнимыя, не боясь никакихъ затрудненій или мистицизма при ихъ истолкованіи.

Мы уже указали, что во всей области математики нельзя добиться удовлетворительнаго логическаго порядка, пока знаку вычитанія будемъ придавать какое-либо иное значеніе, а не то, какое ему первоначально свойственно. Ложный смыслъ, въ какомъ введены были отрицательныя количества, былъ въ исторіи первымъ самообманомъ. Въмѣсто того, чтобы продолжать развивать эту ложную систему даже до комплексныхъ образовъ съ новыми ложными овеществленіями, нужно бы было, скорѣе, сдѣлать первый шагъ вспять. Отрицательное число есть ничто иное, какъ абсолютное число, единицы котораго подлежали бы вычитанію, если бы это позволяло частный видъ сочетанія, въ которое онѣ входятъ. Это свойство служить основаніемъ не только для хода операций, но, какъ исходный пунктъ или результатъ, можетъ имѣть и самостоятельный смыслъ, именно смыслъ отсчитыванія вмѣсто присчитыванья. Итакъ, отрицательное число, въ сущности, основывается не на томъ, что предложено невозможное вычитаніе, именно, большаго изъ меньшаго, а на томъ, что выполненіе означеннаго вычитанія можетъ случайно стать возможнымъ. Абсолютное число связывается съ операциею, которая, при случаѣ, должна быть выполнена, и въ этомъ-то свойствѣ и состоитъ вся отрицательность. Когда полагають, —а таково теперь господствующее мнѣніе,—что для геометрическаго истолкованія отрицательнаго нужно еще особое понятіе, именно понятіе противоположности направленій, то и такое воззрѣніе нелогично и носитъ на себѣ печать эмпирической случайности. При помощи нѣкотораго рода индукціи установили, что если одно направленіе координатъ считать положительнымъ, то отрѣзки, наносимые по другую сторону начала въ противоположномъ направленіи, должно принимать отрицательными, если желательно сохранить полное соотвѣтствіе съ алгебраическими операционными отношеніями и если встрѣчающіеся различные знаки корней уравненій должны получить геометрическій смыслъ. Но такой пріемъ и произволенъ, и неясенъ; ибо при этомъ не доказывается, какимъ образомъ противоположность направленій покрывается противоположностью положительнаго и отрицательнаго, т.-е. слѣдуя нашему основному воззрѣнію,—противоположностью сложенія и вычитанія. Но ариѳметическое или алгебраическое дѣйствіе всегда одинаково, совершается ли оно надъ отвлеченными числовыми единицами или надъ реальными единицами величинъ. Въ томъ и другомъ случаѣ оно не можетъ имѣть двойкаго смысла, и вычитаніе линейныхъ единицъ, очевидно, есть на столько же вычитаніе, какъ и вычитаніе чистыхъ чиселъ. Поэтому,

оперативныя отношенія, во всей математикѣ, могутъ имѣть только одинъ смыслъ, и отрицательное нигдѣ не можетъ имѣть иного смысла, какъ указанія возможнаго вычитанія. Итакъ, непосредственно, противоположность алгебраическихъ операций, и никакъ не противоположность направленій, позволяетъ прямо одно изъ направленій координатъ всегда брать за отрицательное. Но если эту возможность ввести безъ доказательства, то это будетъ похоже на утвержденіе, какъ бы висящее въ воздухѣ, и для него, во всякомъ случаѣ, придется подыскивать индуктивное оправданіе при всякомъ дальнѣйшемъ употребленіи. Но подобный пріемъ введенія познаній не соотвѣтствуетъ ни математической строгости, ни дедукціи.

Этой бѣдѣ можно помочь сплошнымъ допущеніемъ одного простаго правила, и такимъ образомъ улучшить не только логическій строй математики, но и методу обученія. Примемъ прямо за исходный пунктъ, что разстоянія точки отъ координатъ только тогда могутъ быть опредѣлены всегда одинаково, т.-е. простымъ заданіемъ единицъ длины, когда координаты расположены достаточно далеко, чтобы точка во всякомъ положеніи могла находиться только по одну сторону отъ координатъ. Но это всегда будетъ такъ, какъ скоро координаты выбраны будутъ неограниченно далеко. Говоря на обыкновенномъ жаргонѣ, координаты всегда могутъ лежать въ безконечности или, говоря точнѣе, ихъ всегда можно взять въ неограниченно большемъ разстояніи. Но въ такомъ разѣ, при такихъ всегда абсолютныхъ разстояніяхъ, и не можетъ встрѣтиться надобности различать положительныя и отрицательныя разстоянія. Впрочемъ, чтобы это отношеніе упростить для созерцанія, можно къ данной системѣ координатъ съ двоякимъ направленіемъ мысленно присовокупить лишь достаточно отдаленную и потому на столько широкообъемлющую систему, чтобы всѣ разстоянія точки могли имѣть только одно значеніе. Даже можно бы было говорить только объ одной координатной оси и о точкѣ на ней, измѣняющей свое мѣсто; ибо, имѣя это простое представленіе, можно доказать все существенно важное. Въ такомъ разѣ, усмотрѣнію подлежитъ только близкое и отдаленное начало отмѣриванія разстояній. Сами эти постоянныя точки находятся въ неизмѣнномъ другъ отъ друга разстояніи, и если хотимъ перейти отъ ближайшаго начала къ отдаленному, то нужно будетъ изъ постоянного разстоянія вычитать разстоянія, направленные къ отдаленному началу. Потому, разстояніямъ разсматриваемаго направленія слѣдуетъ приписать свойство быть, при случаѣ, вычитаемыми. При обратномъ переходѣ оказалось бы, что вычитаніе постоянного разстоянія изъ нѣкоторой меньшей длины, будучи выполнимо только частью, дало бы въ остаткѣ нѣкоторую

часть вычитаемого, имѣющую свойство подлежать, когда случится, вычитанію, и снова обнаруживающую смыслъ этого свойства и при новомъ обратномъ переходѣ. Въ этой-то взаимности отношеній, и ни въ чемъ другомъ, и имѣетъ отрицательность самихъ по себѣ абсолютныхъ величинъ доказуемый смыслъ. Весьма простое практическое поясненіе этихъ взаимныхъ отношеній дастъ термометрическая скала, если вообразить, что ея нуль перенесенъ на произвольное число градусовъ въ направленіи возрастанія или пониженія теплоты. Впрочемъ и вообще въ области пространственно выражимыхъ отношеній не можетъ быть такихъ случаевъ, гдѣ бы нельзя было провести нашего способа вывода особаго значенія отрицательныхъ величинъ. Напр. въ случаѣ синуса и другихъ угловыхъ функций, которыхъ знаки легко объяснимы по нашему правилу, можно отнесеніемъ къ другимъ осямъ координатъ дать требуемыя доказательства легко и логично. Что же касается приложенія сказаннаго къ корнямъ уравненій въ аналитической геометріи, то и послѣдніе были бы необъяснимы чисто алгебраически, если бы вмѣстѣ съ тѣмъ не было доказано, что системы операций, подлежащія относительно ихъ выполненію, ясно обнаруживаютъ свой смыслъ, если на мѣсто отрицательнаго корня подставить разность абсолютныхъ чиселъ съ бѣльшимъ вычитаемымъ.

Въ сочиненіи о новыхъ основаніяхъ, давая новое опредѣленіе смысла отрицательнаго количества, мы исходимъ изъ чистаго анализа и изъ уравненій, и смыслъ отрицательнаго въ геометріи и въ приложеніяхъ обнаруживается здѣсь самъ собою. Всякое исключительно отрицательное рѣшеніе означаетъ, что положенная въ основаніе форма уравненія непригодна для рѣшенія въ абсолютныхъ количествахъ, и что въ знакахъ его членовъ нужно сдѣлать нѣкоторыя измѣненія. Знакъ минусъ въ рѣшеніи указываетъ, при какомъ именно измѣненіи уравненіе становится годнымъ. Слѣдовательно, сущность этого новаго пониманія состоитъ въ томъ, что знакъ минусъ передъ нѣкоторымъ количествомъ всегда указываетъ на правило, посредствомъ котораго нѣкоторая система вычисления, благодаря подстановкѣ означенной величины, испытываетъ нѣкоторое измѣненіе. Съ этой точки зрѣнія всего яснѣе явствуется, что знаки отдѣльныхъ количествъ получаютъ смыслъ только тогда, если ихъ относить, явно или неявно, къ нѣкоторой абстрактной аналитической системѣ вычисленій. Чтобы вполне оцѣнить значеніе слѣдствій этой точки зрѣнія, пришлось бы привести здѣсь извлеченія изъ упомянутаго сочиненія, но это, не говоря уже о трудности краткаго и, въ тоже время, удовлетворительнаго изложенія, не гармонировало бы съ нашею цѣлью, имѣющею въ виду примѣненія пре-

имущественно практическія, относящіяся къ области вещественной. Поэтому, если кто хочет ближе вникнуть въ теоретическія изысканія по этому вопросу, долженъ будетъ ознакомиться съ относящимися сюда ученіями нашего основнаго сочиненія по чистой математикѣ.

204. Разъ дѣло порѣшено съ отрицательнымъ, то и мнимое, это излюбленное чадо комплексной мистики, не можетъ представить уже никакихъ затрудненій. Нужно только и здѣсь исходнымъ пунктомъ принять, что имѣются два обозначенныя дѣйствія, но въ этомъ случаѣ еще въ противорѣчащемъ сочетаніи, и что ихъ невыполнимость и противорѣчіе должны имѣть панданомъ невозможность геометрическихъ комбинацій. Эти реальныя невозможности представляютъ параллель логически алгебраическимъ. Въ корняхъ буквеннаго квадратнаго уравненія можно натолкнуться на мнимыя выраженія только тогда, когда одинъ изъ коэффиціентовъ, сравнительно съ другимъ, получаетъ величину, обращающую подрадикальную разность въ количество отрицательное. Въ подобномъ случаѣ совершенно ясно, что формула, выражающая корни уравненія или, другими словами, послѣдовательность алгебраическихъ операций, коихъ выполненіе или обозначеніе дѣлаетъ видимымъ общій результатъ рѣшенія,—формула эта, сама по себѣ, безразлична въ отношеніи противоположности между дѣйствительнымъ и мнимымъ. Та же самая формула получаетъ дѣйствительное или мнимое значеніе смотря по тому, какія абсолютныя значенія приданы будутъ даннымъ въ ней величинамъ, такъ что здѣсь мы имѣемъ случай подобный тому какъ и при всякой буквенной разности, также включающей какъ положительный, такъ и отрицательный результатъ, смотря по отношенію уменьшаемаго къ вычитаемому. Если же нормальный случай естественнаго происхожденія мнимыхъ значеній въ символической общности формулы не представляетъ никакой разницы въ сравненіи съ случаемъ дѣйствительнаго значенія, то этимъ подтверждается, что, впрочемъ, и безъ того ясно, что именно въ комбинаціи дѣйствій можно смѣло поступать, руководясь одними и тѣми же основоположеніями, идетъ ли рѣчь о сопоставленіяхъ, дѣлающихся случайно дѣйствительными, или о мнимыхъ сопоставленіяхъ. Но какъ скоро мнимое тотчасъ же видимо какъ таковое, то его допущеніе и дѣйствія надъ нимъ—ничто иное, какъ гипотетическое оперированіе съ невозможнымъ количествомъ, и все такого рода вычисленіе становится тѣмъ, что логически слѣдуетъ назвать проведеніемъ заключенія чрезъ абсурдъ. Но такое гипотетическое предположеніе абсурда есть могущественное средство и совершенно правильная метода; ибо не должно забывать, что эти

невозможности и тракуются здѣсь какъ таковыя, а не какъ возможности.

Посему, нѣтъ ни малѣйшаго основанія не допускать въ вычисленія мнимыя и комплексныя величины; напротивъ, вполне свободное оперированіе съ этими формами сообразно съ общими правилами вычисленія слѣдуетъ разсматривать какъ торжество логической консеквентности. Но чего слѣдуетъ, дѣйствительно, остерегаться, такъ это мнимаго доказательства ихъ геометрической реальности, посредствомъ котораго мнимыя должны покрываться дѣйствительными величинами. Эта рѣдкостная, правда, довольно старая, но впервые опять таки пущенная въ ходъ Гауссомъ подтасовка относится къ той же категоріи, къ какой слѣдуетъ причислить и начинанія по части неевклидовой гипергеометріи, поощрявшіяся тѣмъ же математикомъ. Она относится къ той трансцендентной не-научности, въ которой проповѣдуется культъ фантазирования надъ чувственными образами изъ міра реальной математики и возводится до вѣрованія въ трансцендентную математику. Кое-какія замѣтки объ этихъ шалостяхъ съ мнимыми величинами читатель найдетъ въ § 183.

Выраженіе «невозможные корни», называющее правильнымъ именемъ противорѣчіе въ знакахъ дѣйствій, сплошь употреблялось для обозначенія мнимыхъ корней напр. еще Лагранжемъ въ его трудѣ о числовыхъ уравненіяхъ, и только потому оно какъ техническое наименованіе не цѣлесообразно, что въ способѣ сочетанія величинъ и въ ихъ измѣненіяхъ есть нѣсколько видовъ невозможностей. И вычитаніе большаго изъ меньшаго есть отчасти невозможность, ибо остается часть, которой нельзя вычесть. Подобный остатокъ даетъ въ геометріи напр., нѣкоторую реальную линію, но такая линія изображаетъ невозможное вычитаніе совсѣмъ не какъ выполненное, а напротивъ изображаетъ его неисполнимость, и должна быть мыслима не иначе, какъ если имѣть въ виду связь дѣйствій, изъ коей она возникла, а потому и должно ее представлять съ отрицательнымъ знакомъ, т. е. связанною съ возможнымъ дѣйствіемъ, которое снова становится выполнимымъ при другой зависимости и при другихъ условіяхъ. Въ мнимомъ же содержится невозможность не просто какъ отношеніе одного операционнаго знака къ нѣкоторой зависимости абсолютныхъ величинъ, но невозможность какъ сочетаніе двухъ антиномныхъ дѣйствій, постановка коего, конечно, можетъ быть отмѣнена, но ни при какихъ обстоятельствахъ не можетъ сдѣлаться сама по себѣ выполнимою. Само отрицательное должно прежде исчезнуть, чтобы квадратный корень могъ получить реальный смыслъ.

Истинное значеніе единицы или другой величины, которая сама по себѣ дѣйствительна, но поставлена въ связь съ мнимыми операціями, въ геометріи есть указаніе на нѣкоторый абсурдъ, а именно на то, что это мнимое должно бы было представлять катетъ прямоугольнаго треугольника, котораго гипотенуза была бы нулемъ, а другой катетъ—дѣйствительною единицею или иною величиною. Можно принять, что дѣйствительная единица или иная величина находится въ связи съ этимъ геометрически нелѣпымъ построеніемъ, и эта бессмыслица и есть единственный смыслъ, въ какомъ можетъ быть рѣчь о геометрическомъ построеніи или, лучше, непострояемости мнимаго. Но можно построить дѣйствительный элементъ мнимаго количества самъ по себѣ. т. е. независимо отъ этой мнимой аффекціи, и разъ это сдѣлано, можно будетъ какъ бы перекинуть мость, облегчающій превращеніе пространственныхъ образовъ другъ въ друга посредствомъ сродныхъ промежуточныхъ образовъ и сдѣлать замѣтною непрерывность такого мнимаго перехода тамъ, гдѣ нить непрерывности обрывается. Если взять для примѣра кругъ, и проще всего его уравненіе относительно центра какъ начала прямоугольныхъ координатъ, то для всякой абсциссы, большей радіуса, ордината становится мнимою. Если, теперь, построить дѣйствительный факторъ при мнимой единицѣ въ выраженіи этой ординаты, т. е. если поступать при построеніи такъ, какъ если бы корня изъ отрицательной единицы въ формулѣ совѣмъ не было, то получимъ гиперболу. Послѣдняя выражается вполне дѣйствительнымъ уравненіемъ, отличающимся отъ уравненія круга только переменною знака при обоихъ квадратичныхъ членахъ. Обратный ходъ отъ дѣйствительнаго уравненія такой гиперболы ведетъ къ другой ея вѣтви чрезъ мнимое, и именно посредствомъ того же дѣйствительнаго круга, отъ котораго выходили прежде. Этотъ примѣръ утратилъ бы свою простоту, если бы взято было общее уравненіе гиперболы, приче́мъ, въ поясненіе рода мнимаго разрыва непрерывности, вмѣсто частнаго случая круга выступилъ бы дѣйствительный эллипсъ.

Если припомнить, какимъ образомъ возникъ кругъ изъ частнаго случая гиперболы при посредствѣ мнимаго отношенія, и перейти на другую сторону, гдѣ самъ онъ опять лишь при посредствѣ мнимыхъ можетъ превратиться въ другую вѣтвь гиперболы, то замѣчаемъ, что первое мнимое касаніе отмѣняется вторымъ. Въ виду такой и подобной взаимности, чтобы обозначить разомъ правило построенія, при посредствѣ мнимыхъ, нѣкоторой на сколько возможно родственной формы, должно, во всякомъ случаѣ, ради краткости говорить о мнимомъ кругѣ или о мнимой гиперболѣ. Но при этомъ строится не мнимое, а лишь совокупность всѣхъ точекъ его невозможности.

Такимъ нагляднымъ уясненіемъ всѣхъ дѣйствительныхъ частей функціи можно судить о ея ходѣ, а подобное продолженіе ея хода посредствомъ мнимыхъ точекъ разсматривать какъ измѣненіе вслѣдствіе переменны знака.

205. Нашъ примѣръ показываетъ логику мнимаго въ смыслѣ, совершенно рациональномъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ важный принципъ для плодотворныхъ изслѣдованій; и эта рациональность даетъ возможность самымъ непринужденнымъ и надежнымъ образомъ оперируясь, не только аналитически, но и геометрически, съ реальными предположеніями и исходными пунктами мнимыхъ невозможностей. Въ виду нашихъ положительныхъ указаній падаютъ весь произволъ, всѣ неправильности, всѣ мистическіе вымыслы, въ силу которыхъ все, доселѣ практиковавшееся, оперированіе съ мнимыми, всѣ приемы этой игры, носили печать какой-то *table convenue* и туманной нелогичности.

Здѣсь не мѣшаетъ припомнить примѣчаніе къ § 183 и полную теорію мнимыхъ въ нашихъ Основаніяхъ. Выраженіе «построеніе мнимаго» само по себѣ не только дозвоительно, но и полезно, если его разумѣть въ смыслѣ нашего основнаго математическаго произведенія. Тамъ мы намѣренно его усвоили, чтобы придать ему истинный его смыслъ, противопоставивъ его простой графикѣ. Именно, если устранить Гауссовскія нелѣпицы и туманности, то отъ прежнихъ такъ называемыхъ построеній останется нѣкоторое ядро, и это ядро есть ничто иное, какъ произвольная графика для чисто аналитическихъ цѣлей, не имѣющихъ ничего общаго съ геометриєю какъ таковою. Но наша схема круга и гиперболы, впервые указанная здѣсь въ зародышѣ и развитая въ нашихъ Основаніяхъ, вовсе не есть графика, а новый отдѣлъ аналитической геометріи. Соответствующее построеніе получается и для третьяго измѣренія, такъ какъ уравненію шара отвѣчаютъ и два равноосные гиперболоида съ одною, либо съ двумя мнимыми ординатами. Впрочемъ, о всѣхъ подобныхъ обобщеніяхъ, равно и о понятіи воображаемаго количества (*imaginativ*), необходимомъ для геометрическаго изслѣдованія предмета,—обо всемъ этомъ подробный отчетъ даетъ наше основное произведеніе. Тамъ можно найти и отвѣтъ на то, что такое вообще означаетъ построеніе значимыхъ величинъ, будутъ ли это величины отрицательно—или мнимо-значимыя. Тамъ же можно, кромѣ того, убедиться и въ томъ, и это—обстоятельство несравненно болѣе важное, что проблема мнимаго принадлежитъ непосредственно чисто аналитической области, если только ясно выставить корни ея геометрическаго и вещественнаго характера и познать ихъ какъ простыя отношенія къ нѣкоторому систематическому порядку вычисленій и уравненій.

Обыкновенно Гауссу приписываемая графика, т. е. его такъ называемое построение, если только очистить его отъ всякаго метафизическаго тумана, логическихъ противорѣчій и математическихъ нелѣпицъ, въ этомъ очищенномъ видѣ, какъ набросокъ реальныхъ элементовъ, сама по себѣ не есть что-либо ложное, а просто ненужный и неизящный аналитическій костыль. Она—продуктъ безсилія, поскольку это—ложная потребность освѣщенія предмета тамъ, гдѣ она неумѣстна и гдѣ она болѣе сильными и здоровыми умами и не ощущалась. Великій, даже только серьезный аналитъ и не могъ бы обратиться къ подобной процедурѣ, какъ эта мнимая графика. Видоизмѣненную форму общей, мнимо-смѣшанной величины $\rho(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ онъ сталъ бы примѣнять непосредственно, вмѣсто того, чтобы трактовать ее только посредствомъ геометрическаго изображенія ея дѣйствительной части. Подобное изображеніе тотчасъ къ услугамъ каждаго; ибо построение $\rho.\cos\varphi$ и $\rho.\sin\varphi$ при посредствѣ угла, синуса и косинуса, а вмѣстѣ съ этимъ количества ρ какъ длины радіуса, должно быть дѣломъ чисто механическимъ для всякаго, кто ищетъ геометрическихъ изображеній для простыхъ чиселъ. Для Гаусса, занимавшагося теоріей чиселъ и уравненіями дѣленія окружности, это было какъ нельзя болѣе кстати. Но какъ бы автоматически это представленіе ни навязывалось, все таки оно было и остается непосредственно свидѣтельствомъ неспособности къ анализу, а кромѣ того и признакомъ математической дисгармоніи мышленія. Въ самомъ дѣлѣ, къ величинамъ вообще и къ агрегату ихъ измѣреній оно неприложимо; уже при возвышеніи упомянутой видоизмѣненной формы въ квадратъ оно становится непригоднымъ; ибо ρ^2 можетъ имѣть геометрическое значеніе только въ предположеніи, чтобы ρ задавалось и считалось съ самаго начала ничѣмъ инымъ какъ числомъ. Какъ скоро ρ дѣйствительно — длина, то ρ^2 , слѣдуя способу Гаусса, вовсе не можетъ быть представлено образно, и чтобы поправить Гауссовскіе костыли, то должно бы было представить ρ^2 въ третьемъ измѣреніи какъ площадь. Что же касается дальнѣйшихъ степеней и въ противность общности анализа, то всякая построяемость вообще прекращается, все равно, идетъ ли рѣчь о мнимыхъ или о дѣйствительныхъ величинахъ. То, что засимъ остается, есть, слѣдовательно, чистая графика, т. е. несвойственное предмету изображеніе чистыхъ чиселъ; ибо число, какъ таковое и взятое вообще, всегда имѣетъ только одно измѣреніе, да и то лишь въ своемъ родѣ, ибо оно не имѣетъ никакого измѣренія въ томъ родѣ какъ вещественныя величины. Въ виду этого, то, что въ вещественныхъ величинахъ, при всякомъ графическомъ изображеніи, переводится на языкъ геометріи, т. е. представляется

какъ агрегатъ единицъ длины, это—непосредственно лишь числа, служить-ли это графическое изображеніе абстрактному анализу или физикѣ.

Только тогда, когда эта графика аналитическихъ величинъ, т. е. мнимая графика Гаусса, какъ ложная опора, разъ навсегда будетъ выброшена за бортъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ когда произвольное нанесеніе длинъ около вершины прямого угла не будетъ считаться построеніемъ въ геометрическомъ смыслѣ, только тогда и станетъ понятно, что есть совершенно иная и положительная область настоящаго построенія. Это настоящее построеніе освѣщаетъ и вопросъ о томъ, въ какомъ смыслѣ можетъ быть рѣчь о построеніи отрицательныхъ величинъ. Отрицательное количество, какъ и мнимое, нельзя представить пространственно; ибо это есть не болѣе какъ правило вычисленія, относимое къ абсолютнымъ величинамъ и приписываемое имъ какъ знакъ. Уравненіе вмѣстѣ съ этимъ правиломъ вычисленія, содержащимся въ указаніи знака, представляетъ систему аналитическихъ отношеній или, говоря иначе, систему операций, при посредствѣ которой абсолютныя величины ставятся во взаимную зависимость.

Поэтому, можно эту задачу перевернуть и, что естественнѣе, вмѣсто того, чтобы искать построеніе аналитическаго выраженія, годнаго въ своей специальной формѣ и для геометрическаго опредѣленія смысла, вмѣсто этого искать аналитическое выраженіе для даннаго построенія. Здѣсь же, строго говоря, всегда даются только абсолютныя величины. Эти же послѣднія могутъ быть относимы другъ къ другу прямо посредствомъ уравненія или же такимъ образомъ, что кромѣ уравненія и въ придачу къ нему для всего функціональнаго отношенія абсолютныхъ величинъ основаніемъ служить и знаки вычисленій, замѣтные и въ самихъ величинахъ. Такимъ образомъ, напр., аналитически выразить данныя реальныя отношенія непосредственно подлежащихъ строяемыхъ величинъ двоякимъ средствомъ, мнимымъ обозначеніемъ извѣстныхъ линий или отрѣзковъ съ одной стороны, и уравненіемъ, съ другой стороны, значить—для реального образа найти посредствуемое мнимыми аналитическое выраженіе. Уравненіе взятое само по себѣ, въ подобномъ случаѣ есть нѣчто несоотвѣтственное, даже нелѣпое; оно заключаетъ въ себѣ противорѣчіе или соотвѣтственную невозможность. Но введеніе мнимаго обозначенія превращаетъ его въ уравненіе, приличествующее вопросу; ибо оно означало нѣчто лишенное смысла, только будучи непосредственно отнесено къ абсолютнымъ величинамъ. Съ этимъ вмѣстѣ, постановка гипотетически абсурднаго снова упраздняется, или, лучше, въ этой, съ самаго начала связан-

ной съ отмѣною, постановкѣ нѣтъ ничего нелѣпаго, напротивъ, это — совершенно реальное отношеніе. Итакъ, всѣ непосредственно мнимыя отношенія суть лишь отдѣльные отрывки болѣе широкаго аналитическаго механизма, исчезающіе въ законченныхъ отношеніяхъ дѣйствительныхъ величинъ, все равно какъ — взаимнымъ ли уничтоженіемъ или исключеніемъ. Такимъ образомъ, изысканіе мнимо посредствуемаго аналитическаго выраженія для подлежащаго реального отношенія, очевидно, есть такой способъ, который нужно только обратить, чтобы съ полною математическою ясностью представить себѣ, что такое можетъ означать геометрическое построеніе мнимой величины или обнаруженіе ея вещественно. Въ самомъ дѣлѣ, наше понятіе о мнимыхъ величинахъ, по природѣ своей, не ограничивается областью геометріи, но можетъ играть роль во всякихъ вещественныхъ областяхъ; ибо мнимое принадлежитъ не вещамъ, а вычисленію.

206. Кромѣ ориентированія касательно знаковъ, при изученіи аналитической геометріи слѣдуетъ въ особенности рекомендовать усмотрѣніе перваго возникновенія ея образовъ. Напримѣръ, далеко не все равно, какимъ способомъ получать различныя кривыя линіи. Если выходить изъ чисто геометрическаго опредѣленія, то при помощи его и, пожалуй, нѣкоторыхъ вспомогательныхъ построеній уравненіе должно еще быть выведено, и таковъ и былъ естественный и историческій путь, какимъ разрабатывалась геометрія при посредствѣ анализа. Но можно также исходнымъ пунктомъ взять сразу произвольное алгебраическое соотношеніе, наприм. хотъ уравненіе второй степени, и въ предположеніи, что содержащаяся въ немъ перемѣнная должны означать координаты, смотрѣть, какая группа образовъ опредѣляется этимъ аналитическимъ выраженіемъ. Опредѣленіе здѣсь содержится въ самомъ уравненіи, и лишь позднѣе дознано будетъ, что оно значитъ геометрически. Этотъ способъ созиданія аналитической геометріи, правда, весьма абстрактенъ и отличается тѣмъ, что весьма далека отъ наглядной геометріи; но онъ имѣетъ ту невыгоду, что, благодаря своему слишкомъ самодержавному методу, мѣшаетъ видѣть натуральныя необходимости въ выборѣ образовъ. Кромѣ того, слишкомъ много приходится блуждать въ пустыхъ обобщеніяхъ и въ массѣ излишнихъ, подчасъ непреодолимыхъ, комбинацій. Для болѣе простыхъ отношеній онъ очень хорошъ, когда требуется доказать, что всѣ возможности исчерпаны, наприм. что извѣстныя коническія сѣченія суть единственныя кривыя втораго порядка. Не смотря на это, нельзя совѣтовать на этотъ чисто аналитическій исходный пунктъ, посредствомъ котораго то, что все-таки должно просто оставаться методомъ, могло бы при-

нять видъ науки съ самостоятельнымъ содержаніемъ,—нельзя совѣтовать смотрѣть на него, какъ на главное дѣло. Случись послѣднее, то неминуемо болѣе и болѣе будешь удаляться въ бесплодную область несозерцательнаго и, такъ сказать, въ изрядной степени терять чутье къ геометріи въ собственномъ смыслѣ. Это и случилось съ новыми геометрами, такъ что теперь преобладанію такого, въ своей области себѣ довлѣющаго, анализа, но, когда формальное поле уже пройдено, геометрически оказавшагося несостоятельнымъ, начали полагать предѣлы. Но какъ бы своеобразно, а отчасти и необыкновенно это противное теченіе, извѣстное подъ именемъ синтетической геометріи, подчасъ и ни выглядѣло, тѣмъ не менѣе, это новое направленіе, по меньшей мѣрѣ, напоминаетъ, что аналитическому методу съ его автономіей пришелъ конецъ. Можно бы было снова вернуться къ обыкновеннымъ методамъ геометріи, а пожалуй, ввести и движеніе, какъ основное вспомогательное средство, и, такимъ образомъ, нашли бы также коррективъ противъ аналитическихъ экстравагантностей, и даже, можетъ быть, на практикѣ при изученіи математики и ея приложеній даже больше выиграли бы, чѣмъ на такъ называемомъ синтетическомъ или, лучше сказать, проэктивномъ пути. Впрочемъ, мы не имѣемъ здѣсь въ виду изрекать хулу противъ въ главномъ пунктѣ благотворныхъ фактовъ исторіи, а хотимъ лишь обратить вниманіе на то, что, во всякомъ случаѣ, полезно изъ-за аналитическаго метода не забывать существенно-нагляднаго характера геометріи.

Но что въ этомъ отношеніи нужно особенно рекомендовать изученію, такъ это правило—давать себѣ точнѣйшій наглядно-геометрическій отчетъ о всякомъ геометрическомъ образѣ, который можетъ играть роль въ приложеніяхъ къ природѣ. Это можно дѣлать различнымъ образомъ; но, вообще, натуральнѣйшимъ и удобнѣйшимъ средствомъ будетъ обращеніе къ движеніямъ, посредствомъ которыхъ можно бы было произвести этотъ образъ. Для плодотворнаго мышленія уравненіе не можетъ замѣнить самый образъ, и всѣ ухищренія новѣйшей алгебры, съ ея культомъ детерминантовъ, не могутъ замѣнить собою наглядныхъ способовъ усвоенія матеріала. Геометрія, по существу своему, должна оставаться непосредственнымъ ученіемъ о пространственныхъ образахъ, а аналитическія операціи умѣстны лишь какъ служебныя вспомогательныя средства. Поэтому, при изученіи нужно принять себѣ за правило, по крайней мѣрѣ, исходные пункты и опредѣленія упорядочивать чисто геометрически, прежде чѣмъ пускаться въ чисто аналитическіе выводы. Вездѣ долженъ быть перекинутъ мостъ отъ геометрическихъ образовъ къ аналитическимъ выраженіямъ, если бы даже логически онъ и не былъ бы

нуженъ и могъ бы быть тотчасъ замѣненъ чисто аналитическимъ опредѣленіемъ. Но и наоборотъ, всегда должно дѣлать переходъ отъ абстрактныхъ аналитическихъ способовъ, при посредствѣ уравненій, къ наглядному представленію соотвѣтствующихъ пространственныхъ образовъ, и даже, — и это должно быть принципомъ, — всегда удерживать въ умѣ параллель между нагляднымъ предметомъ и его панданомъ въ формулѣ, дабы она оказывала руководящее вліяніе на ходъ операций.

207. Синтетическая или, лучше, проэктивная геометрія, выступившая въ 19 столѣтіи рядомъ съ аналитическою, также точно имѣетъ цѣну лишь какъ методъ, и, притомъ, какъ такой методъ, который ограничивается опредѣленною группою геометрическихъ свойствъ. Главнымъ ея основателемъ, генераломъ Понселе, ей были даны широкія рамки, причемъ геніальное начертаніе ея предложено было въ истинно оригинальномъ произведеніи — въ Трактатѣ о проэктивныхъ свойствахъ фигуръ (*Traité des propriétés projectives des figures*, первое изд. въ 1822 г., второе, въ 2-хъ томахъ, Парижъ, 1865—66). Дѣйствіе этого произведенія было благотворно, ибо оно мало-по-малу сломило единоедержавіе аналитическаго метода и впервые дало почувствовать его недостаточность контрастомъ своихъ методовъ. Не смотря на эти выгоды, изученіе метода Понселе требуетъ извѣстной осмотрительности, дабы на эту умозрительно, во всякомъ случаѣ, интересную и, по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторыхъ направленіяхъ, методически полезную область не терять силъ несоразмѣрно. Дабы не обмануться въ ожиданіяхъ, лучше предварительно точнѣе узнать, на что можно рассчитывать въ самомъ благопріятномъ случаѣ.

Этотъ благопріятнѣйшій для изученія случай являетъ намъ само пролагающее новые пути произведеніе. Въ Германіи не только, какъ въ другихъ странахъ, къ вашимъ услугамъ второстепенныя произведенія профессоровъ математики, какъ будто бы это были единственныя сокровищницы знаній, но и слава знаменитаго имени является также препятствіемъ на пути къ лучшему способу изученія. Кое-какія заслуги Штейнера въ дѣлѣ пропаганды и разработки Понселетовскихъ методовъ не подлежатъ никакому сомнѣнію; но не должно забывать, что нѣмецкій математикъ со своимъ систематическимъ трудомъ, къ тому же, незаконченнымъ (именно со своею «Зависимостью геометрическихъ формъ», Берлинъ, 1832) явился не только цѣлымъ десятилѣтіемъ позже, но, что касается формы изложенія и округленія матеріала, остался далеко позади своего предшественника. А такъ называемыя Штейнеровскія лекціи, появившіяся долгое время спустя послѣ его смерти подъ знаменемъ имени, уже успѣвшаго съ тѣхъ поръ пріобрѣсти авторитетъ, — лекціи эти —

сплошь плохая замѣна оригинальнаго произведенія; ибо, какъ извѣстно, онѣ редактированы не самимъ авторомъ, а потому здѣсь мы, въ лучшемъ случаѣ, имѣемъ дѣло съ субъективными замѣтками и воспоминаніями о лекціяхъ учителя, а не съ подлинникомъ. И сравненіе можетъ научить, что было бы несомнѣнно выгоднѣе штудировать собственный трактатъ виновника методы, не стѣсняясь датой (1832 г.). Прежде всего, о результатахъ отдѣльныхъ статей заботиться нечего, да и такъ называемыя лекціи, ограничивающіяся областью элементарныхъ основаній, также даютъ ихъ не много, такъ что разница на одно поколѣніе во времени появленія не имѣетъ никакого значенія. Но Понселе, дожившій до глубокой старости, самъ обогатилъ дополненіями 2-ое изданіе своего Трактата, снабдивъ его историческими и критическими указаніями обо всемъ, что со времени 1-го изд. успѣло появиться, такъ что именно здѣсь, а не гдѣ-либо въ иномъ мѣстѣ, и слѣдуетъ искать руководства и для цѣлесообразнѣйшаго изученія частностей.

Сверхъ того, работа Понселе не только носитъ печать творчества, что касается ея содержанія, но и печать геніальности, что касается способа изложенія. Если присовокупить къ этому полноту и широту взгляда, ведущаго далѣе области коническихъ сѣченій, то будемъ имѣть еще большее основаніе предположить, что эта работа даетъ не только фундаментъ, но и самое знаніе синтетической геометріи, и сосредоточить всѣ силы первѣе всего на изученіи этого монумента. Тогда найдемъ, что нѣкоторыя сходныя свойства законѣрно набросанныхъ пространственныхъ образовъ можно бы было установить, изслѣдовавъ, какія формы сопринадлежны перспективно, или, другими словами, въ центральной проеэкціи, какъ наприм. всѣ коническія сѣченія. Если смотрѣть изъ вершины конуса, то эллипсъ есть лишь центральная проеэкція круга и обратно, такъ-что для всѣхъ коническихъ сѣченій и частныя отношенія, и свойства ихъ можно изслѣдовать проеэтивно, и то, что относится къ одному образу, перенести и на другой, какъ бы руководясь проеэціей. Ясно, что при подобномъ способѣ изслѣдованія, сопринадлежности и группы общихъ свойствъ доказуемы, относительно говоря, просто. Здѣсь и слѣдуетъ искать нервъ новыхъ методовъ; ибо Штейнеровскій пріемъ отдѣльныхъ пучковъ, но сохраняющихъ, въ своихъ отношеніяхъ, проеэтивные свойства, просто есть дальнѣйшее развитіе этой первоначальной концепціи. Всѣ другія направленія также примыкаютъ къ этой главной точкѣ зрѣнія, и наименованіе проеэтивной геометріей этого способа концепціи, существовавшей прежде въ видѣ кое-какихъ намековъ, и принявшей широкіе размѣры только въ рукахъ Понселе, наименованіе это—и кратчайшее, и самое характерное.

208. Тѣ, что молодой французскій офицеръ, въ плѣну у русскихъ въ 1813—14 г., въ Саратовѣ, изобрѣлъ вполне самостоятельно, безъ книгъ, съ блѣдными остатками познаній, вынесенныхъ изъ школьныхъ курсовъ анализа и механики, и что въ своей первоначальной формѣ было имъ обнародовано только въ 1862—64 г. въ его «Applications d'analyse et de geometrie», во всякомъ случаѣ, представляло нѣчто такое, что было выше деревянныхъ методовъ алгебраической геометріи, обратившихся въ чисто внѣшніе ремесленные приемы, и давало духу пищу, болѣе соотвѣтственную его естественнымъ склонностямъ. Тѣмъ не менѣе, Понселетовская или, если принимать въ расчетъ все-таки нѣкоторые спеціальные отдѣлы, Понселе-Штейнеровская геометрія есть все же разработка только одной точки зрѣнія, которой при изысканіи наглядныхъ методовъ достигли прежде всего, но которая не можетъ имѣть притязанія исчерпывать собою область всей геометріи, каковая, по своему основному характеру, во всѣхъ направленіяхъ касается нагляднаго. То, что съ этой новой точки зрѣнія, которой не совсѣмъ чужда была и древность, сказано было противъ «тяжеловѣснаго» синтеза древнихъ, во всякомъ случаѣ могло бы сполна относиться къ античному способу доказательствъ, но лишь отчасти можетъ касаться болѣе натуральныхъ методовъ, участвовавшихъ въ отысканіи теоремъ и въ дѣйствительно произвольномъ мышленіи. Слѣды этихъ натуральныхъ методовъ нерѣдко можно разглядѣть сквозь искусственную постройку доказательствъ, а потому доселѣ мы не имѣемъ права утверждать, что эта обыкновенная наглядная геометрія натурального рода уже отодвинута на второй планъ. Проективная геометрія отнюдь не есть довлѣющая себѣ и всеобъемлющая метода, посредствомъ которой были бы разрѣшимы всякаго рода проблемы. Она, напримѣръ, оказалась не въ силахъ одолѣть задачи, относящіяся къ области опредѣленій кривизны, и именно — поверхностей третьяго порядка, и вообще, по существу своему, приложима только къ разрѣшенію вопросовъ о такихъ свойствахъ, которыя касаются непосредственно проэктивныхъ отношеній. Всякое дальнѣйшее расширеніе ея границъ налагаетъ на нее неестественное принужденіе, произвольно примѣшиваетъ къ ней чуждыя точки зрѣнія, и даже приемы, гдѣ, пожалуй, такая примѣсь и не совсѣмъ неумѣстна, дѣлаетъ, по меньшей мѣрѣ, неудобными и неизящными. Поэтому, учащійся долженъ остерегаться тратить свои силы на эту разнокалиберную, подчасъ чудовищную помѣсь, въ которой особенно виновны профессора съ своею наклонностью сваливать все въ одну кучу; а чтобы всего вѣрнѣе избѣжать этой опасности, нужно самому свободно приобщиться духу оригинальнаго творенія. Обыкновенно гений

самъ знаетъ границы новаго направленія, имъ созданнаго; сверхъ того, онъ—за чистоту родовъ и—противъ всякихъ неестественныхъ скрещиваній, при посредствѣ которыхъ обрывки всякихъ методовъ, въ рукахъ заурядныхъ синкретистовъ, приводятъ къ появленію на свѣтъ недолговѣчныхъ уродовъ. Итакъ, нечего тратить времени на эту профессорскую пачкотню, въ родѣ наприм. Плюкеровской, на расплывчатость и неясность котораго, кстати замѣтить, указывалъ еще Понселе, да и безъ того жалкія качества эти прямо бросаются въ глаза всякому безпристрастному читателю, какъ скоро отъ Понселе и Штейнера онъ попадетъ въ сорную кучу этого математическаго калибана. Само собою разумѣется, безпристрастно судить о подобной пустой пачкотнѣ можетъ только тотъ, кому извѣстна манера, съ какою обыкновенно наряжаютъ всякую университетскую мелюзгу, послѣ чего она среди такихъ же жалкихъ или еще жалчайшихъ коллегъ фигурируетъ передъ студентами и публикой какъ дѣйствительно-авторитетная величина, а рядомъ съ нею о дѣйствительныхъ творцахъ или ревнителяхъ въ дѣлѣ науки совсѣмъ или почти совсѣмъ не упоминаютъ. Кто этой манеры не знаетъ, тому, какъ это съ публикою обыкновенно и бываетъ, грозитъ опасность быть обманутымъ такою школьною рекламою и въ самомъ благопріятномъ случаѣ только послѣ немалыхъ жертвъ временемъ и деньгами подконецъ убѣдиться, какого пошиба ревнители науки передъ нимъ фигурировали. Въ Германіи познаніе этой манеры въ нѣкоторыхъ другихъ научныхъ направленіяхъ уже сдѣлало публичные успѣхи, и такъ какъ мы еще вернемся къ этому вопросу вообще, то пока, что касается нѣмецкой почвы, достаточно указать на профессора Плюкера, какъ на типъ, по большей части, еще худшихъ варіантовъ, и упомянуть еще объ одномъ французскомъ скандалѣ, хотя и въ нѣсколько иномъ родѣ, но, въ сущности, подобномъ же; упоминаніе о немъ можетъ быть полезно именно при изученіи проэктивной геометріи, или, лучше сказать, можетъ уберечь отъ немаловажнаго зла.

209. Во Франціи, на самой родинѣ проэктивной геометріи Понселе, ей съ самаго начала пришлось бороться съ академическими интригами, въ которыхъ особую роль игралъ аналитъ Коши. Но еще больше мѣшали ей единичные некомпетентные сторонники уже приобрѣтенныхъ синтетическихъ истинъ, и они сумѣли такъ войти въ моду, что, въ концѣ концовъ, для нихъ открыты были особая новыя каѳедры такъ называемой высшей геометріи. Таковъ былъ, наприм., г-нъ Шаль; занимая новую каѳедру въ Парижѣ, онъ еще имѣлъ неосторожность считать себя главою синтетической геометріи и наказатъ публику по-истинѣ плоскимъ учебникомъ, въ которомъ нечего искать живаго духа новыхъ методовъ, но сколько

угодно обыкновенной, такъ сказать, геометріи болота. Правда, Шалевская геометрія отличается отъ упомянутой Плюкеровской тѣмъ, что въ ней не имѣлось въ виду дать какую-либо помѣсь аналитическихъ и проэтивныхъ методовъ; напротивъ того, она должна была быть чисто синтетическою, но на столько потонула въ низинахъ простаго выпраданія малозначащихъ теоремъ, что завоеванія болѣе высокихъ умовъ не только ею не пропагандируются, а скорѣе завалены въ ней мусоромъ мелочей и тривіальностей. Отсюда весьма понятно, что такой профессоръ, какъ г-нъ Шаль, уже въ раннихъ своихъ историческихъ работахъ умалчивалъ объ истинныхъ виновникахъ новыхъ геометрическихъ методовъ. Такого рода историческіе подлоги, впервые начатые имъ въ большемъ размѣрѣ въ одной работѣ, напечатанной на счетъ Бельгійской Академіи, вполне согласуются и съ его позднѣйшею ролью; въ самомъ дѣлѣ, пріобрѣтеніе кѣедры при весьма заурядныхъ средствахъ считать большимъ завоеваніемъ, нежели открытія генія, а потомъ стремленіе заставить своими маленькими шажками забыть гордое и смѣлое шествіе великихъ писателей,—это уже прямо злостное высокомеріе. Итакъ, не будь даже инцидента съ хитрымъ обманщикомъ, заставившимъ тщеславнаго профессора порядочно поплатиться своимъ кошелькомъ за подложныя рукописи; не будь даже и глупой попытки перенести происхождение теоріи тяготѣнія на французскую почву,—и безъ этого г-нъ Шаль давно бы уже нашелъ у ученыхъ подобающую себѣ оцѣнку, если бы его коллеги, и близкіе, и далекіе, не были бы, въ большинствѣ случаевъ, того же пошиба.

И такъ, если мы и потратили нѣсколько строкъ, чтобы охарактеризовать двумя-тремя штрихами явленіе, само по себѣ второстепенное, но раздутое до извѣстной степени обычнымъ способомъ ученой оцѣнки, то это сдѣлано нами не просто въ интересахъ изученія синтетическихъ методовъ, но въ виду болѣе широкихъ цѣлей. Въ самомъ дѣлѣ, то, что совершенно ясно предлежитъ въ дѣлѣ поименованной личности, съ весьма незначительными уклоненіями есть обыкновенное, даже почти нормальное отношеніе. Такова всегда судьба значительныхъ, проторяющихъ новые пути, отмѣченныхъ печатью генія, умовъ и книгъ, что ихъ мѣсто занимаетъ жалкій сбродъ ничѣмъ не выдающейся заурядности. Подъ такимъ флагомъ и шествуютъ такъ называемыя величины академическихъ учреждений туда, откуда пришли, и когда одно-другое поколѣніе такихъ казенныхъ продуктовъ бездарности безслѣдно исчезаетъ, тогда только продукты творческаго духа въ нѣкоторой мѣрѣ получаютъ возможность вступить въ свои, впрочемъ, все еще урѣзанные права; ибо тогда имъ уже непосредственно ничто не угрожаетъ, и можно

ими осторожно, безъ вреда для себя, пользоваться. О нихъ говорятъ съ благоговѣніемъ, но все-таки держатся отъ нихъ въ почтительномъ разстояніи, ибо все еще опасаются рекомендовать ихъ какъ простѣйшія средства къ основательному изученію науки.

Какимъ образомъ и на нѣмецкой почвѣ пропаганда проэкривной геометріи даровитою головою, т.-е. превосходящею обычную профессорскую мѣрку, хотя и не особенно, испытала на себѣ всѣ тѣ помѣхи, на какія выше мы указали,—это ясно можно видѣть на личности Штейнера. Этотъ въ своемъ родѣ выдающійся математикъ, послѣ Понселе всего болѣе содѣйствовавшій развитію новой геометріи, долженъ былъ, не смотря на свои заслуги, довольствоваться экстраординарною профессурою, и, слѣдовательно, оставаться внѣ факультета, ибо въ Берлинскомъ университетѣ для него не нашлось ординарной каведры, или, лучше сказать, не желали ему дать таковой; и однако, этотъ университетъ, за все время своего существованія, если не говорить о быстро промелькнувшей въ немъ дѣятельности Дирикле, не можетъ указать въ числѣ своихъ ординарныхъ профессоровъ не только ни одного имени, которое, хотя бы отдаленнѣйшимъ образомъ, могло тягаться съ Штейнеромъ, но, вообще, не можетъ назвать ни единого имени, которое значило бы сколько-нибудь болѣе простаго эхо профессуры и ея вліянія на замѣщеніе мѣстъ и въ сферѣ другихъ протекцій. Штейнеръ былъ не изъ числа тѣхъ, кто преклоняется передъ подобными авторитетами, и еще нынѣ наслѣдники его прежнихъ враговъ не перестаютъ всякими способами чураться результатовъ его работъ. Думаютъ, что съ виду лучше всего этого достигнуть, какъ бы пристегнуть новую геометрію къ анализу, чтобы увѣрить публику, что и сами они—представители того же направленія, что и чистые синтетики, да еще съ прибавкою могущественныхъ средствъ анализа. Но на дѣлѣ это излюбленное аналитами сочетаніе привело къ крайне безсвязной анархіи. Оно имѣло быть хитрымъ средствомъ подчинить своей монополіи то, чему нельзя было помѣшать появиться, но показало только, и далѣе еще яснѣе будетъ показывать, что процедуры скрещиванія могутъ способствовать только искаженію обоихъ методовъ и господству спутанной безсодержательности. Такимъ образомъ, и основанная Штейнеромъ премія за труды по развитію синтетической геометріи по его принципамъ и методамъ, имѣла обычную для большинства премій судьбу; ибо въ рукахъ Берлинской Академіи дѣло вскорѣ приняло такой оборотъ, что предлагавшіяся ею задачи, какъ практически неразрѣшимыя этими методами, оставались безъ отвѣта. Приэтомъ, вопреки смыслу Штейнеровскаго завѣщанія, Академія имѣла предусмотрительность внести

дополнительную статью о выдачѣ завѣщанной преміи и за инныя работы, такъ что премировались, по произволу, уже напечатанныя работы, причемъ дѣло не обошлось и безъ лицепріятнаго отношенія къ трудамъ иныхъ особъ, какъ, наприм., вышеупомянутаго О. Гессе, которыхъ главнымъ занятіемъ въ литературѣ была не синтетическая, а аналитическая геометрія. Впрочемъ, математика самаго молодаго поколѣнія профессоровъ обнаруживаетъ и вездѣ въ способѣ оцѣнки новыхъ матеріаловъ и методовъ присущій ей характеръ или, скорѣе, безхарактерность. Поэтому, въ видахъ свободнаго самообразованія, тѣмъ болѣе приходится отыскивать методы тамъ, гдѣ ихъ можно найти въ ихъ первобытной чистотѣ, гдѣ, слѣдовательно, они въ полной своей силѣ. Сваливаніе въ одну кучу всякаго рода математическихъ стилей, что нынѣ въ порядкѣ вещей, можно разсматривать какъ несомнѣнный признакъ положительнѣйшаго упадка монопольныхъ ученыхъ сферъ, въ которыхъ эта манера укоренилась,—упадка, проявляющагося и въ томъ, что юное поколѣніе почти перестало поставлять изъ себя матеріалъ для замѣщенія математическихъ каедръ.

210. Странное нанизываніе или даже сваливаніе въ одну кучу пріемовъ, которые, если брать ихъ въ отдѣльности, выглядятъ исключительно аналитическими, или же исключительно методами построенія, можетъ исчезнуть и дать мѣсто болѣе натуральному, выходящему изъ рамокъ того и другого способа, единству возрѣнія только тогда, когда, съ одной стороны, будутъ доказаны извѣстныя естественныя права абстрактнаго анализа, а съ другой стороны, будетъ глубже познана узкость геометрическихъ реакціонныхъ явленій нашего столѣтія. Главныя линіи того и другого намѣчены въ нашихъ «Новыхъ основаніяхъ», и вмѣстѣ съ этимъ пополненіемъ и ограниченіемъ, все, что въ подлежащей книгѣ указано вкратцѣ и съ практической точки зрѣнія, получаетъ совершенно точный смыслъ, не допускающій односторонности ни въ какомъ направленіи. 19-е столѣтіе, если выключить технику, всюду носитъ реакціонную окраску, и этого свойства нельзя отрицать даже и въ томъ, что анализъ, получившій въ 18-мъ столѣтіи, благодаря Лагранжу, сравнительно ясную и изящную форму, въ 19-мъ столѣтіи принявъ, въ большинствѣ случаевъ, печать заурыднаго цеховаго вырожденія, тогда какъ рядомъ съ этимъ вырожденіемъ утвердилось, хотя только частію завоевавшая себѣ права, геометристическая реакція, съ противоположными недостатками и ограниченіями.

Кто надлежащимъ образомъ оцѣнитъ то, что изложено въ послѣдней главѣ нашего математическаго основнаго произведенія по вопросу о естественной послѣдовательности методовъ и то, что

предъявлено нами по части разъясненій проэктивтики и всякаго иного синтеза, равно какъ и о главныхъ ревнителяхъ въ этой области, тотъ можетъ стать на высшую точку зрѣнія касательно общаго современнаго разногласія въ методахъ или смѣшенія различныхъ методовъ. Разъ онъ достигнетъ этого, то онъ уже не захочетъ подчиниться какому-нибудь искусственнымъ или натянутымъ приемамъ, какой бы области методовъ эти несообразные или узкіе приемы ни касались. Отвращеніе къ ложной аналитической роскоши не заставитъ его промѣнять ее на проэктивику или синтетику тамъ, гдѣ она представляетъ бесполезные вычуръ въ томъ же родѣ. Онъ прямо можетъ покончить съ этими вопросами о чистотѣ формы и о заимствованіяхъ; ибо если второстепенные аналиты кое въ чемъ и обокрали новыхъ геометровъ, то вожаки послѣднихъ, какъ мы впервые показали это въ нашемъ основномъ произведеніи, вообще и, притомъ, въ существенныхъ пунктахъ позаимствовались кое-чѣмъ изъ анализа, и едва ли могутъ они не сознавать этого.

Что же касается вопроса о дарованіяхъ, то великіе аналиты, какъ Лагранжъ, конечно, неизмѣримо выше стояли, нежели таланты въ области проэктивистической или даже синтетической, каковы Понселе или напр. Штейнеръ и Пуансо. Что касается послѣдняго, даже превосходившаго своею геометрически механическою манерою обоихъ проэктивистовъ, то слѣдуетъ особенно подчеркнуть одну ошибку его, характеризующую отсутствіе въ немъ находчивости, ошибку, которую нѣсколько поколѣній принимало за Пуансотовское открытіе якобы Лагранжевской ошибки, о чемъ можно читать въ цитированной главѣ нашихъ Новыхъ основаній. Ошибка эта принадлежитъ прямо синтетической геометріи; ибо она основывается на томъ, что Пуансо не понялъ системы координатъ въ Аналитической Механикѣ Лагранжа. А именно, у Лагранжа введены были перпендикулярныя разстоянія отъ косоугольныхъ осей; а Пуансо, руководясь обычнымъ школьнымъ шаблономъ, вообразивъ, что рѣчь идетъ о косыхъ разстояніяхъ, искажилъ этимъ самымъ соотвѣтственные Лагранжевскія аналитическія теоремы и думая, что онъ исправляетъ послѣднія, написалъ цѣлую статью, которая, благодаря глупости математиковъ—эпигоновъ, красуется даже въ третьемъ изданіи Лагранжевскихъ произведеній какъ поправка къ Лагранжу.

Подобныхъ разоблаченій, упраздняющихъ притязанія реакціонеровъ, будто бы они сообразно дѣлу представляютъ интересы наглядности, еще не было. Лагранжъ, не смотря на то, что былъ преимущественно аналитомъ, лучше представлялъ въ приведенномъ случаѣ эти интересы, нежели самый выдающійся синтетистъ, который не сумѣлъ ориентироваться и свою геометрическую ошибку

ложно приписалъ великому аналиту какъ недостатокъ анализа. Но чтобы дѣйствительно примирить эти несомнѣнно одностороннія точки зрѣнія, нужно совершенно отвлечься отъ проэктивники и именно отъ ея искусственнаго исходнаго пункта, отъ ангармоническихъ двойственныхъ отношеній. Послѣднія—чистая игрушка и никоимъ образомъ не имѣютъ такой цѣнности, какъ непосредственно изъ центральной проэкции вытекающія наглядныя заключенія о свойствахъ формъ. Главный вопросъ долженъ быть поставленъ, исходя изъ точки зрѣнія, хватающей дальше; онъ касается естественной исторіи и необходимыхъ стадій развитія математики. Въ самой общей формѣ, онъ гласитъ: Какая доля участія принадлежитъ вычисленію, и какая—построенію?

Здѣсь мы не будемъ повторять отвѣтъ, данный въ иномъ мѣстѣ но частію коснемся его, частію пополнимъ двумя—тремя замѣчаніями. Въ числѣ различныхъ доказательствъ совершеннѣе будетъ всегда то, которое требуетъ наименьшей мѣрки непосредственной геометріи. Всякое дополненіе необходимой отвлеченности общаго исчисления чѣмъ-либо конкретно нагляднымъ есть несущественное для дѣла, случайное привнесеніе чего-то неумѣстнаго и соотвѣтствуетъ ребяческой точкѣ зрѣнія, неспособной къ отвлеченностямъ. Поэтому, гдѣ аналитическая геометрія въ самомъ дѣлѣ на своемъ мѣстѣ, тамъ, такъ сказать, геометрическая геометрія ненужна, все равно, какъ бы она была написана на мертвомъ языкѣ, или какъ бы рѣчь шла о выдумкахъ новаго времени, появившихся послѣ Монжа. Поэтому, руководящимъ принципомъ доказующаго изложенія будетъ *minimum* геометріи. Самый анализъ будетъ надежнѣ и нагляднѣе, когда сознано будетъ, что онъ нуждается лишь въ *minimum*'ѣ геометрическихъ предпосылокъ и посредствъ. Но для цѣлей геометріи весь излишній балластъ непосредственно геометрическихъ и строящихъ методовъ исчезаетъ, ибо онъ при наличности болѣе глубокихъ основаній, т. е. твердо установленныхъ аналитическихъ отношеній, становится ненуженъ.

То, что называется совершенствомъ въ доказательствѣ и въ изложеніи системы, не нужно ни для практическихъ цѣлей обученія, ни для разнообразныхъ путей изобрѣтенія. Здѣсь зачастую пользуются одновременно двумя путями и непосредственное созерцаніе даетъ иное указаніе, какого не оказалось бы при болѣе абстрактномъ отношеніи. Но и обратно, общій аналитическій символизмъ для всякаго, кто умѣетъ надлежащимъ образомъ примѣнять его, является особымъ самостоятельнымъ средствомъ изобрѣтенія, какого нельзя найти въ пространственной наглядности. Итакъ, нужно пользоваться обоими источниками вмѣстѣ, но не сливая ихъ, а упо-

требляя каждый для того, что онъ можетъ дать сообразно съ своею особенностью, — какъ для изслѣдованія, такъ и для простаго ориентированія. Но къ требованію *minimum*'а геометріи въ доказательствахъ и въ области системы, даже, поскольку это возможно, и для обученія и для открытій, должно присоединяться требованіе и *minimum*'а анализа. Въ самомъ дѣлѣ, руководство чистыми понятіями движется еще ступенью выше въ абстракціи, нежели аналитическое руководство, и природа задачи будетъ каждый разъ давать нужный матеріалъ по части абстрактныхъ вещественныхъ исходныхъ понятій.

Поскольку дѣйствительно создается нѣчто вещественное, аналитическій автоматизмъ не есть фактъ честный, это — обманчивая видимость. Лишь поскольку въ виду имѣются чистыя цѣли исчисленія какъ таковыя, постольку при наличности достаточнаго уравненія требуется только привести въ движеніе аналитически алгебраическую операціонную машину. Напротивъ того, уже опредѣленіе направленія и цѣли есть нѣчто вещественное. О показаніяхъ вещественнаго компаса, на который смотрять, нужно прямо дать отчетъ, иначе намѣреніе и переходъ къ извѣстнымъ аналитическимъ операціямъ останется немотивированнымъ. Въ частномъ случаѣ геометріи нерѣдко, но не всегда, вещественные мотивы аналитическихъ постановокъ и сифпленія аналитическихъ операцій возникаютъ изъ пространственнаго созерцанія. Вещественное и пространственное означаетъ здѣсь не одно и то же; ибо напр. понятія, какъ подобіе, симметрія, равномерность и т. п., содержатъ ядро вещественное, но не только отвлеченнѣе нежели созерцаніе, но и сокровеннѣе, нежели аналитическія представленія, которыми оно какъ бы окутано.

Нужно проникнуть до этого ядра, т. е. до принципіальныхъ руководящихъ вещественныхъ понятій, чтобы найти истинную мѣру аналитической оснастки и строящей созерцательности. При этомъ особенно нужно еще избѣгать предразсудка новѣйшей Гауссовской моды, что алгебраическое сочетаніе символовъ имѣетъ дѣло только съ числами. Послѣднее допущеніе на столько ложно, что въ противность ему нужно спросить, въ самомъ ли дѣлѣ для аналитической формулы число есть вещь прежде всего существенная. Но это не такъ; ибо опредѣленные виды количествъ, слѣдовательно, пространственныя величины, какъ таковыя, т. е. не обращая вниманія на разьединеніе единицъ и на наименованіе, приводятся въ соотношеніе и съ уравненіями. При этомъ напр. вещественныя измѣренія подразумѣваются въ этихъ аналитическихъ знакахъ и сочетаются въ операціяхъ. Чистое числовое исчисленіе доставляло бы только

числа, вещественно лишены измѣреній. Такимъ образомъ въ составѣ аналитическихъ выраженій можно видѣть нѣчто большее правилъ чистаго числоваго исчисления, и въ этомъ высшемъ смыслѣ, относящемся къ вещественной природѣ количествъ, общій символическій анализъ съ понятіемъ функціи, какъ съ руководящимъ понятіемъ, есть первая основная форма, въ какой должно отпечатлѣваться всякое вещественное изслѣдованіе. Только самое вещественное изслѣдованіе, очевидно, должно предшествовать своему отпечатку, и этого принципа достаточно въ видахъ устраненія схоластически пустаго употребленія и вообще злоупотребленія аналитически символическими, равно и непосредственно наглядными средствами, т. е. въ видахъ устраненія въ одно и тоже время двухъ заблужденій.

211. Кое-какіе недостатки въ способѣ обработки математики имѣютъ даже болѣе глубокое основаніе, чѣмъ общій упадокъ ученыхъ учрежденій, носящихъ средневѣковый характеръ. Легко видѣть, что они обусловливаются тѣмъ фактомъ, что многія вѣтви математики, такъ сказать, уже исчерпаны, т. е. уже прошли извѣстную фазу прогресса и достигли такого пункта, далѣе котораго, по крайней мѣрѣ, въ прежнемъ направленіи, идти не могутъ. Гдѣ потокъ прогресса какъ бы изсякъ, тамъ легко распространяются всякаго рода ненужныя ухищренія, имѣющія замѣнить собою отсутствіе дѣйствительнаго успѣха или, лучше сказать, прикрыть отсутствіе прогресса видимостью новшествъ. Но съ этою принадлежностью явленій застоя въ отдѣльных областяхъ мы ближе ознакомимся только тогда, когда далѣе уйдемъ въ нашемъ обзорѣ математики-механическихъ наукъ, а именно, когда ближе ознакомимся съ характеромъ аналитической механики и соответствующихъ учебныхъ пособій. А пока здѣсь можетъ найти себѣ мѣсто одно замѣчаніе по поводу этой послѣдней области, а именно, что тамъ, гдѣ научный матеріалъ въ доселѣ существовавшихъ направленіяхъ, повидимому, исчерпанъ, вмѣсто праздныхъ ухищреній умѣстнѣе было бы приложить стараніе къ выработкѣ болѣе изощреннаго пониманія и болѣе изысканныхъ способовъ изложенія.

Въ механикѣ аналитическая обработка, начиная съ 18-го столѣтія, получила такое преобладаніе, можно даже сказать, сдѣлалась настолько исключительною, что съ тѣхъ поръ подъ именемъ аналитической механики вообще разумѣютъ всю высшую механику. Въ силу этого, аналитическая механика столько же есть вѣтвь разработки общихъ математическихъ теорій, сколько и отдѣлъ реальной науки. Но эта двойственная роль ея только тогда станетъ намъ вполне ясна, когда мы будемъ имѣть въ виду, что сказанное

наименованіе, долженствующее указывать на особую науку, въ сущности, есть просто сокращеніе, обозначающее предметъ приложений аналитическихъ средствъ. Поэтому, объ аналитической механикѣ мы можемъ сказать то же самое, что нами сказано и объ аналитической геометріи. И та, и другая—просто особые методы, но не настоящія и самостоятельныя науки, имѣющія матеріаломъ особый предметъ. Какъ аналитическая геометрія, вообще, есть приложение анализа къ геометріи, такъ и аналитическую механику можно считать просто приложеніемъ анализа къ общей механикѣ. Аналитическіе приемы—это просто служебныя вспомогательныя средства, а система всей механики не должна опредѣляться чисто служебнымъ элементомъ. Поэтому, для обозначенія строго дедуцируемой, т. е. сводимой къ простымъ принципамъ, части этого, нерѣдко просто практически-эмпирическаго знанія слѣдуетъ предпочесть выраженіе «раціональная механика», какъ скоро дѣло въ томъ, чтобы дать подобающее наименованіе содержанію самостоятельной науки, а не просто истинамъ, сгруппированнымъ съ точки зрѣнія аналитическихъ методовъ.

Условившись въ этомъ, обратимся къ основной формѣ, въ какой аналитическая механика существуетъ въ литературѣ. Во-первыхъ, мы имѣемъ монументальное твореніе Лагранжа, подробно разобранное въ нашемъ сочиненіи, но, конечно, еще не оцѣненное со стороны его отношенія къ студіямъ. Оно имѣло рѣшающее вліяніе,—не общимъ своимъ планомъ, но существенными частями способовъ концепціи и изложенія,—на форму позднѣйшихъ приемовъ обученія и на расположеніе французскихъ учебниковъ, доселѣ остающихся образцовыми. Благодаря только этому произведенію, о французахъ можно сказать, что своими курсами и своею учебною литературою они опредѣлили научный строй, равно форму и матеріалъ въ дѣлѣ преподаванія механики и у другихъ народовъ. Если развитіе изъ общей формулы, какъ вещь слишкомъ отвлеченная, въ господствующемъ способѣ преподаванія и не принято, тѣмъ не менѣе, все-таки курсы Политехнической Школы, доселѣ оставшіеся образцами, разнымъ образомъ держались отдѣльныхъ приемовъ Лагранжескаго метода, и большинство принятыхъ въ учебникахъ приемовъ никогда не получило бы въ нихъ мѣста или, по крайней мѣрѣ, такой совершенной формы, если бы имъ не предшествовало это твореніе и различными путями имъ посредствуемая традиція. Последнее, входящее во всѣ тонкости, специальное изученіе аналитической механики еще и теперь невозможно, если не обращаться къ этому основному творенію, которое не только дало имя самому предмету, но и вообще дало и большую часть матеріала. Даже не

только при послѣднемъ спеціальному изученіи, но и при первыхъ приступахъ главные параграфы и главы Лагранжевой Аналитической Механики могли бы лучше всего помочь ориентироваться въ общихъ ученіяхъ и точкахъ зрѣнія всякому, кто прямо сколько-нибудь довѣряетъ своимъ силамъ, и послѣ перваго ознакомленія съ основными понятіями въ силахъ самъ одолѣть болѣе важныя ученія. Въ концѣ концовъ, превосходный и творчески владѣющій своимъ предметомъ гений говоритъ не только основательнѣе, но и проще и понятнѣе, нежели обыкновенный учебникъ, въ которомъ сплошь и рядомъ на мѣсто яснаго находишь плоское.

Выгоды, какія всегда имѣетъ изученіе фундаментальнаго творенія, въ нашемъ частномъ случаѣ увеличиваются еще тѣмъ, что со времени появленія этой Лагранжевой работы аналитическая механика не сдѣлала важныхъ пріобрѣтеній, а варианты, на которые стоитъ обратить вниманіе, въ родѣ Гамильтоновскихъ, являются лишь исключеніемъ.

212. Но какъ не всякій, кто занимается аналитической механикой по-школьному или для своего образованія, захочетъ ограничиться исключительно аналитическими средствами, безъ освѣщенія дѣла элементарно-механическими основными ученіями и безъ ихъ примѣси, то выборъ среди новыхъ учебниковъ является дѣломъ практически немаловажнымъ, причемъ и краткость, а чрезъ это и сбереженіе времени и денегъ, имѣютъ также свое значеніе. Небольшая книга Делоне, въ оригиналѣ озаглавленная раціональною механикою, а въ нѣмецкомъ переводѣ, сообразно съ ея главнымъ содержаніемъ, появившаяся подъ обыкновеннымъ именемъ аналитической механики (Висбаденъ, 1868), имѣетъ кое-какія преимущества предъ прежними и позднѣйшими конкуррентами. Разъясненіе основныхъ понятій исполнено въ ней тщательно, а вычисленій не больше, чѣмъ требуется. Если не слишкомъ много времени тратить на предпосланную учебнику, довольно обширную, кинематику, то онъ можетъ служить весьма удобнымъ и сноснымъ введеніемъ въ область механики. По крайней мѣрѣ, большаго, чѣмъ даетъ Делоне, отъ обыкновеннаго учебника требовать нельзя. Въ прежнее время, а отчасти еще и теперь, во Франціи и въ Германіи былъ въ большомъ ходу болѣе объемистый учебникъ Дюгамеля, но ни обиліе матеріала, ни способъ изложенія въ немъ особенно похвалить нельзя. Можетъ быть, то обстоятельство, что обширная, двухтомная механика Пуассона, которая не была ни основнымъ произведеніемъ, ни учебникомъ, а общимъ трактатомъ, дававшимъ сводъ и переработку матеріала,— что эта книга, какъ практическое пособіе къ изученію науки, позднѣе отошла совсѣмъ на задній планъ, способствовало тому, что

далеко уступавшая ей по исполненію, но болѣе расчитанная на обычные потребности, работа академика Дюгамеля пользовалась легко ей доставшеюся извѣстностью. Впрочемъ, напоследокъ, въ четвертомъ, собственно механикѣ посвященномъ и появившемся въ 1870 г., томѣ своей работы о методахъ умозрительныхъ наукъ (*Des méthodes dans les sciences de raisonnement*), этотъ ученый наглядно показалъ все скудоуміе, съ какимъ онъ относился къ основнымъ понятіямъ и къ систематикѣ. Если бы третій томъ вышеупомянутаго дѣльнаго курса Навье, содержащій механику, и переведенный отдѣльно и на нѣмецкій языкъ (Ганноверъ, 1858 г.), не былъ бы для иныхъ слишкомъ малъ, то онъ не только имѣлъ бы неоспоримое превосходство предъ Дюгамелевскимъ учебникомъ, но и доселѣ ему принадлежало бы первое мѣсто, какъ наиболѣе цѣлесообразному пособию. Итакъ, большинству мы скорѣе порекомендуемъ вышеупомянутый учебникъ Делоне: эта книга сгладить путь начинающему, а особенно сообщить ему требуемый навыкъ въ обращеніи съ аналитическими формулами. Но если угодно видѣть на примѣрѣ, какъ въ настоящее время излагается механика въ болѣе полныхъ трактатахъ, со включеніемъ механики теплоты, въ сносномъ видѣ, съ особенно тщательнымъ начертаніемъ кинематики, довольно близко придерживаясь технического способа мышленія, то, во всякомъ случаѣ, можно указать на *Mécanique générale* Резаля (3 т., Парижъ, 1873—75), какъ на весьма полезную вещь, особенно по новымъ частностямъ.

Но если рѣчь идетъ о дѣйствительно учебномъ курсѣ, то традиціонный курсъ Парижской Политехнической Школы все еще остается относительно лучшимъ, и кто владѣетъ французскимъ языкомъ, тотъ не только для анализа, но и для аналитической механики могъ бы воспользоваться тою общераспространенною ея формою, которая введена вышеупомянутымъ учебникомъ Навье, приспособленнымъ къ школьной формѣ ближайшаго поколѣнія. Двухтомный курсъ Механики, который мы здѣсь имѣемъ въ виду, принадлежитъ преемнику Навье—Штурму, но его нужно разсматривать какъ коллективный трудъ профессоровъ Политехнической Школы, и, кромѣ того, надлежаще урѣзанный однимъ изъ репетиторовъ. Къ немалымъ его достоинствамъ принадлежитъ и особое повторительное резюме; ибо, что касается учебниковъ, какъ работъ, не имѣющихъ собственно научной цѣнности, то такія обстоятельства должны имѣть рѣшающее значеніе при рекомендаціи. Натурально, всегда нужно держаться новыхъ изданій такихъ книгъ, ибо въ случаѣ ходячихъ учебниковъ изданія быстро повторяются. Въ такомъ случаѣ, можно, по крайней мѣрѣ, быть увѣреннымъ, что, кромѣ текста, остающагося

безъ измѣненій не одно поколѣніе, найдется и еще кое-что, въ родѣ репетиторіумовъ, задачъ для упражненія и кое-какихъ, хотя и скудныхъ, дополненій, касающихся новостей, — короче, всякія практическія мелочи, безъ которыхъ подобный книжный товаръ имѣлъ бы еще меньше цѣны, чѣмъ какую онъ имѣетъ. Въ самомъ дѣлѣ, всегда нужно исходить отъ положенія, что требуемое практическими соображеніями употребленіе второстепенныхъ работъ, подобныхъ вообще компиляціямъ, всегда есть, относительно говоря, зло, хотя зачастую и неизбежное.

На нѣмцевъ, которые до сихъ поръ, и не только аналитической механикѣ, должны были учиться, въ сущности, по французскимъ твореніямъ и учебникамъ, война подѣйствовала возбуждающимъ образомъ какъ во всѣхъ направленіяхъ, такъ и въ здѣсь разсматриваемомъ, и тщеславіе побудило ихъ какъ-нибудь замѣть для всѣхъ очевидное положеніе дѣла. Къ счастью, наука и преподаваніе — не такія вещи, чтобы пробѣлы, оставленные въ нихъ національною литературою, можно было заполнить, не имѣя въ наличности ничего, кромѣ тщеславія. Итакъ, пока еще дѣло остается такъ, какъ оно было, и пока не только форма аналитической механики дана французами, но у нихъ же мы заимствуемъ и учебные курсы, отличающіеся и своею пригодностью, и своимъ изяществомъ. Попытки, какія доселѣ были сдѣланы, по составленію самостоятельныхъ нѣмецкихъ учебниковъ, а не просто переводовъ или передѣлокъ, пока не подають надежды на скорое осуществленіе желаемой замѣны. Пока только очевидно отсутствіе остроумія и пракческаго искусства въ выборѣ матеріала. Легкость свободныхъ, непедантичныхъ пріемовъ, ничего не оставляющихъ желать въ смыслѣ точности и отчетливости, суть свойства, вырабатывавшіяся у нашихъ сосѣдей мало-по-малу, и созрѣвшія именно въ области математическихъ и сродныхъ наукъ благодаря вѣковой, ревниво оберегаемой, школьной традиціи.

Опытъ самостоятельнаго нѣмецкаго учебника г. Кирхгоффа (подъ заглавіемъ «Лекціи математической физики; Механика», Лейпцигъ, 1876) также подтверждаетъ нашъ взглядъ; ибо, хотя эта книга иногда прямо ссылается на Лагранжа, но все-таки изложеніе въ ней далеко уступаетъ французскимъ учебникамъ. Тяжеловѣсною изложенія и сразу слишкомъ высоко взвинченною манерою она безъ всякой пользы затрудняетъ учащагося, а на читателя, въ дѣлѣ компетентнаго, сразу производитъ негармоническое впечатлѣніе. Какъ учебникъ, она не только чрезмерно нагружена гидродинамическими и другими излюбленными авторомъ частностями и, вообще, неплодотворными умозрѣніями, но и даетъ такой исключительный перевѣсъ

вычисленіямъ, что ими совершенно вытѣснены всякія наглядныя средства; основныя понятія, не вполне ясны и самому автору, не смотря на то, что мѣстами послѣдніе результаты перемѣшаны съ элементарнѣйшими, не выступаютъ впередъ, а систематика матеріала едва изъ-за вычисленій видна: Нѣкоторыя хорошія стороны книги, наприм. сообщеніе кое-какихъ новыхъ варіантовъ аналитической механики, каковъ, наприм., Гамильтоновскій принципъ, не выкупаютъ собою вообще мало соотвѣтствующаго учебнымъ цѣлямъ выбора матеріала и формы изложенія. Но именно потому, что опытъ этотъ солиднѣйшій въ своемъ родѣ, такъ что избавляетъ насъ отъ труда разбирать другіе опыты, навѣрняка можно утверждать, что положеніе дѣла относительно французскихъ учебниковъ пока еще не измѣнилось. И если нѣкоторая часть университетской публики, въ виду, наприм., экзаменовъ, и должна покориться необходимости изучать подобные тяжеловѣсные учебники, то все же, въ видахъ выработки большей опытности, она не можетъ совсѣмъ обойтись безъ приватнаго употребленія французскихъ пособій. Но въ нѣмецкихъ политехническихъ и подобныхъ школахъ, для которыхъ болѣе свободное и болѣе практическое обладаніе математикою и механикою есть жизненный принципъ результатовъ обученія, рассчитанныхъ не на переучиваніе заново, а на примѣненіе,—въ этихъ новѣйшихъ сферахъ должно сплошь держаться такихъ пособій, которыя и въ выборѣ матеріала, и въ способахъ обработки, отличаются педагогическимъ тактомъ и изяществомъ. Впрочемъ, достаточно и малой доли труда, какого потребовалъ бы негодный учебникъ въ безсмысленно аналитическомъ родѣ, чтобы сразу проложить себѣ путь къ фундаментальному творенію и обезпечить пониманіе того изъ его содержанія, что особенно важно на первыхъ шагахъ усвоенія науки. Поэтому, нѣтъ ни малѣйшаго основанія непосредственное изученіе главнаго творенія Лагранжа откладывать въ дальній ящикъ, если только не представляется возможности первый приступъ къ этой наукѣ облегчить себѣ дѣйствительно отвѣчающимъ ей ичени учебнымъ курсомъ, т.-е. цѣлесообразно изложеннымъ выборомъ важнѣйшаго матеріала.

213. Механика не есть просто приложеніе математики, но существенно основывается на реальныхъ фактахъ. Впрочемъ, уже первые шаги въ обработкѣ этихъ фактовъ требуютъ примѣненія математики; но, какъ показываетъ исторія науки, въ большинствѣ случаевъ шли впередъ и добыли почти всѣ главныя истины при помощи сравнительно весьма простыхъ математическихъ средствъ. Впослѣдствіи стали примѣнять аналитическіе методы, употребленіе коихъ принесло нѣкоторыя выгоды, но слишкомъ широкая ихъ

разработка иныя отношенія, первоначально отличавшіяся большею ясностью, какъ бы засыпала мусоромъ вычисленій. Кто изучаетъ механику исключительно съ аналитической стороны, обращая вниманіе лишь на вспомогательныя средства, главная цѣль которыхъ— приложеніе вычисленія, тотъ подвергается опасности упустить изъ виду натуральнѣйшія основанія дѣла и такимъ образомъ затруднить себѣ пониманіе предмета. Лучшее противоядіе противъ такого односторонняго уклоненія и, вмѣстѣ, практическое средство оріентироваться, это—изученіе всего того, что принято излагать въ лучшихъ учебникахъ общей физики по предмету основаній механики. Въ самомъ дѣлѣ, исходный пунктъ здѣсь долженъ быть экспериментальный, а математическіе выводы, обыкновенно ограничивающіеся тѣмъ, что проще и, по большей части, относится къ практической сторонѣ дѣла, должны играть роль просто служебныхъ вспомогательныхъ средствъ. Такой способъ обработки сообщаетъ цѣлому болѣе естественность и даетъ нагляднѣе выступить экспериментальнымъ отношеніямъ.

Если теперь обратиться къ вопросу о выборѣ содержательнаго учебнаго курса физики, то прежде всего нужно замѣтить, что основнаго произведенія по предмету общей физики, которое представляло бы нѣчто большее компилятивнаго учебника, до сихъ поръ еще не существуетъ. Это обстоятельство, съ одной стороны, не позволяетъ предъявлять къ современнымъ учебникамъ слишкомъ высокихъ требованій, а съ другой стороны, облегчаетъ самый выборъ, заставляя довольствоваться тѣмъ, что есть, если только оно изысканно отвѣчаетъ учебнымъ цѣлямъ. Послѣднимъ свойствомъ въ высокой мѣрѣ обладаетъ опять-таки одинъ изъ курсовъ Парижской Политехнической Школы, а именно Cours de physique Жамена. Наибольшими, сравнительно говоря, преимуществами отличался онъ въ первоначальной формѣ, данной ему самимъ авторомъ, каковую и сохранялъ съ конца пятидесятихъ до середины шестидесятихъ годовъ. Но бесполезно говорить теперь объ этой лучшей формѣ курса. Что касается учебниковъ, особенно пространныхъ или имѣющихъ характеръ руководствъ, въ которыхъ соединены главныя частности съ текущими изслѣдованіями, то какихъ-нибудь двадцати лѣтъ достаточно, чтобы книга устарѣла и уже негодилась къ употребленію. Но быстро старѣютъ книги въ переходные періоды, когда существенно измѣняются воззрѣнія въ наукахъ опытныхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ, накапливается много новаго матеріала. Уже третье изданіе упомянутаго курса, который можно разсматривать, нѣкоторымъ образомъ, также какъ продуктъ преподаванія въ Парижскомъ Политехникумѣ, появившееся въ 80-хъ годахъ, разрослось въ четыре

толстых тома, что зависит от допущенія въ него переходныхъ теорій, ложнаго культа продуктовъ авторитетиковъ дня и, вообще, отъ несостоятельности въ критическомъ отношеніи. Хотя послѣднее обстоятельство, если принять въ расчетъ состояніе нашего времени и физики, по отношенію къ общему трактату и неудивительно, но оно вредить, столь необходимой съ точки зрѣнія учебныхъ цѣлей, концентраціи и послѣдовательности въ сочетаніи всѣхъ элементовъ.

Тѣмъ не менѣе, за разсматриваемымъ произведеніемъ остаются извѣстныя преимущества вкуса, порядка и должной мѣры собственно учебной рутинѣ, каковыхъ нельзя признать напр. въ нѣмецкомъ подражаніи. Послѣднее, именно Вюльнеровскій курсъ, первоначально было простою обработкою перваго Жаменовскаго курса, но приняло характеръ болѣе руководства, да притомъ — руководства, составленнаго неискусно, которое, будучи чрезчуръ размазано, въ лучшемъ случаѣ соединяетъ въ себѣ, пожалуй, качества богатаго, хотя безъ всякой критики, набросаннаго сборника матеріаловъ. Но согласно нашей личной точкѣ зрѣнія, знакомство начинающаго съ экспериментальными и математически простыми основаніями механики, какъ они даются въ курсѣ физикѣ, только тогда будетъ полезною предварительною ступенью для специфически аналитическаго изученія, когда оно вмѣстѣ съ тѣмъ напоминаетъ, что наука, даже при примѣненіи высшихъ искусственныхъ средствъ анализа, не должна забывать своего источника и не должна отвергать своихъ наглядныхъ исходныхъ пунктовъ. Однако же, все возрастающая тенденція математической обработки, даже въ учебникахъ физики успѣла уже слишкомъ отодвинуть на задній планъ опытные основанія механики, ложно выдвигая на первый планъ, какъ главное дѣло, аналитическія рамки. Это уже ясно замѣчается въ новой формѣ упомянутаго курса физики, тогда какъ напр. обработка механики въ Вюльнеровскомъ курсѣ физики вообще не можемъ подлежать разсмотрѣнію, ибо она не только не отличается искусствомъ, но и устарѣла.

Что касается болѣе правильнаго соразмѣренія экспериментальной части съ математическою, и что касается формы изложенія, то обширное произведеніе Біо, появившееся въ 1816 г., въ своемъ родѣ и въ свое время гораздо лучше удовлетворяло своему назначенію, чѣмъ Жаменовское. Но его авторъ въ молодыхъ годахъ принадлежалъ поколѣнію, въ полной мѣрѣ участвовавшему въ духовномъ движеніи и дѣятельности 18 го столѣтія. Съ тѣхъ поръ болѣе и болѣе распространялась духовная реакція, омрачавшая прежнюю ясность и въ ученыхъ сферахъ, причемъ этому благопріятствовали

ретроградные государственные и общественные элементы, нанося вредъ здоровымъ формамъ науки. Истинная наука всегда отличалась духовно революціоннымъ характеромъ, и кто хочетъ усвоить себѣ ея жизненные стремленія, тотъ, по большей части, долженъ обращаться къ простой формѣ, въ какой новыя истины выступили при своемъ появленіи.

Новая механика появилась на свѣтъ какъ часть физики, и кто думаетъ, что теперь можно обойтись безъ Галилеевскихъ или безъ Гюйгенсовскихъ приемовъ, тотъ не можетъ приобщиться болѣе глубокому духу дѣла. Механику нужно изучать какъ экспериментальную и вмѣстѣ раціональную, такъ сказать, общую часть физики, и какъ скоро дѣло идетъ о выработкѣ лучшаго основнаго трактата общей физики, тотчасъ же построеніе ея общей механической части убѣждаетъ не только въ недостаткахъ теперешнихъ учебниковъ физики, но и въ односторонности аналитическихъ начертаній механики, даже въ частностяхъ.

214. Потребность, дающая себя чувствовать при изученіи какъ протестъ противъ исключительнаго преобладанія вычисленія, нѣкоторымъ образомъ уже сказалась и въ самой разработкѣ науки. Поворотъ къ синтезу, представителемъ котораго въ механикѣ является Пуансо въ своихъ ясныхъ и наглядныхъ работахъ, есть явленіе, подобное проэктивной геометріи въ области чистой математики. Только эти прибавки къ синтетической механикѣ еще проще и малочисленнѣе, чѣмъ новая точка зрѣнія въ геометрии, ограничивающаяся кругомъ болѣе определенныхъ отношеній и задачъ. Приемъ Пуансо есть не болѣе какъ возвращеніе натуральному мышленію присущихъ ему правъ. Не сама Пуансотовская статика, слишкомъ напоминающая Эвклидовскую форму доказательствъ, и не введеніе силовыхъ паръ само по себѣ суть факты, въ которыхъ воплотились новые методы. И обогащеніе теории вращенія новыми изящными приемами также еще не рѣшаетъ дѣла въ частномъ вопросѣ, насъ занимающемъ. Скорѣе, вообще восподствующій въ Пуансотовскихъ работахъ естественный ходъ, съ своимъ нагляднымъ изъясненіемъ понятій, есть то, что составляетъ великое преимущество новыхъ методовъ, протестующихъ противъ пустой болтовни исчисленія. Проэктивная геометрія и подымающаяся надъ исчисленіемъ синтетическая раціональная механика всплываютъ въ литературѣ почти въ одно и то же время, и, какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ направленіи, сошло со сцены одно поколѣніе и его мѣсто заняло другое, прежде чѣмъ эти новыя точки зрѣнія были въ нѣкоторой мѣрѣ оцѣнены по достоинству и приобрѣли нѣкоторое, хотя далеко еще неполное, вліяніе. Тупое упорство, и именно со стороны огра-

нных партизановъ вычисленія, оказавшихся самыми упрямыми, ставило преграды надлежащему разграниченію, и еще въ настоящее время скорѣе можно встрѣтить разнокалиберную, неразработанную смѣсь обоихъ методовъ, нежели истинно-цѣлостные образы, въ которыхъ каждое средство было бы соразмѣрено съ цѣлью. О продуктахъ скрещиванія анализа съ проэктивной геометрией мы уже говорили; но въ механикѣ примѣсь въ синтетическомъ родѣ не могла быть въ такой полной мѣрѣ неподобающею, ибо въ концѣ концовъ приэтомъ нашло себѣ мѣсто, по крайней мѣрѣ, нѣкоторое сокращеніе вычисленій и кое-гдѣ замѣна схематизма вычисленія болѣе общими сужденіями. Поэтому, зло могло проявиться здѣсь только въ одномъ: въ неправильности оцѣнки и распредѣленія разсужденія и вычисленія менѣе способными изслѣдователями. Не смотря на это, тѣ уступки, которыя уже сдѣланы Пуансотовскимъ методамъ въ лучшихъ учебникахъ, можно считать приобрѣтеніемъ какъ въ отношеніи обработки науки, такъ и удобствъ ея изученія. Дальнѣйшею цѣлью должно бы было быть превращеніе синтетически раціональной механики, и не только въ границахъ данныхъ Пуансо примѣровъ, въ общую основную форму механическаго знанія. Собственно говоря, это значило-бы просто держаться натуральной логической консеквентности. Въ самомъ дѣлѣ, заключенія, руководимыя общими понятіями и воззрѣніями, по своей широтѣ и краткости, тамъ гдѣ вообще можно при посредствѣ ихъ кое чего добиться, стоятъ ступенью выше аналитическихъ свѣпленій путемъ чистаго исчисленія, поэтому не только неизяшно, но и логически ошибочно—все, что можно вразумительно установить безъ всякихъ вычисленій,—все это съ трудомъ выковыривать или нерѣдко только дѣлать видъ что выковыриваешь, изъ аппарата формулъ.

Сама исторія даетъ вѣскія указанія на то, что система главныхъ истинъ раціональной механики, въ существенныхъ своихъ частяхъ, могла быть закончена при помощи простыхъ математическихъ средствъ, и что позднѣйшія выгоды аналитическаго метода мало увеличили итогъ дѣйствительныхъ открытій. Конечно, изученіе нѣкоторыхъ спеціальныхъ вопросовъ облегчается именно здѣсь имѣющими немалое значеніе внѣшними удобствами аналитическихъ приемовъ, да и для нѣкоторыхъ общихъ основныхъ отношеній получается абстрактно характеристичное выраженіе; но къ основополагающимъ и оригинальнымъ главнымъ воззрѣніямъ аналитическая форма свѣпленія не прибавила ничего важнаго, и если у великихъ аналитиковъ, какъ Лагранжъ, и встрѣчаемъ нѣчто творческое, то не должно забывать, что въ подобныхъ выдающихся случаяхъ отнюдь не преобладала полная односторонность воззрѣнія. Аналитическій языкъ

зачастую только выражалъ то, что было познано путемъ раціонально выше мотивированныхъ концепцій или путемъ непосредственного воззрѣнія. Впрочемъ, заслуги, какія ведутъ къ прогрессу въ предѣлахъ самаго анализа, нельзя смѣшивать съ заслугами въ области матеріальныхъ истинъ механики. Даже тамъ, гдѣ развитіе особыхъ механическихъ воззрѣній поставлено было въ зависимость отъ выполнения аналитическихъ операций, даже здѣсь хорошо извѣстно, какія помѣхи этого рода концепція проблемъ противопоставляла усиліямъ къ ихъ разрѣшенію. Составленіе уравненій вообще не представляло никогда большихъ затрудненій; но этимъ еще ничего не достигалось, пока дальнѣйшія средства анализа не позволяли какъ-либо угадать, какова, напр., интегрируемая форма отношеній. Въ такихъ случаяхъ кажущееся рѣшеніе или возможность рѣшенія, на что позволяло надѣяться символическое формулированіе, нерѣдко приводила къ уклоненію отъ непосредственного пути, представлявшего больше шансовъ натолкнуться на разрѣшеніе вопроса, хотя бы, можетъ быть, сперва лишь при частныхъ предположеніяхъ и потому лишь въ тѣсныхъ рамкахъ.

Галилей и Гюйгенсъ, эти два творца новой механики, также достигли своихъ результатовъ безъ посредства анализа. Ньютонъ, третій главный ревнитель этой новой научной отрасли, обходился весьма простыми аналитическими средствами, а въ изложеніи даже отдавалъ предпочтеніе синтезу древнихъ. Но вмѣстѣ съ этимъ главный циклъ новой науки былъ почти завершенъ, а потому и при оцѣнкѣ значенія методовъ никогда не слѣдуетъ забывать, что въ сферѣ дѣйствительныхъ открытій и истиннаго, основы полагающаго, творчества непосредственные и наглядные способы пониманія и обработки исполнили все существенное, прежде чѣмъ анализъ, со своей абстракціей и со своими символическими искусственными средствами уже существующія истины только какъ бы перевелъ на другой языкъ.

Тѣмъ не менѣе, какъ уже ранѣе сказано, мы очень далеки отъ слишкомъ высокой оцѣнки свойственныхъ Пуансо приѣмовъ. Эти приѣмы не могли даже уберечь ихъ виновника отъ полного непониманія теоремъ и геометрически механическаго распорядка у Лагранжа. Сверхъ того, они даже не всегда были истинными и чистыми отпрысками созерцанія, но, какъ силовыя пары, заимствовались отъ аналитическихъ моментовъ вращенія, отъ аналитическихъ понятій, и будучи, по характеру своему, заимствованиями, отличались и вещественною неопредѣленностью. Итакъ, Пуансотовское направленіе принадлежитъ, въ истинномъ смыслѣ слова, къ реакціоннымъ математическимъ явленіямъ 19-го столѣтія, что, однако, не исклю-

часть, относительно говоря, благотворнаго его вліянія. По крайней мѣрѣ, этимъ путемъ схоластически одностороннее направленіе въ одномъ родѣ умѣрялось ему противоположнымъ; ибо если лучшее Пуансотовское направленіе и было просто игрушкою въ рамкахъ узкаго школьнаго духа, тѣмъ не менѣе, оно дѣйствовало въ вихряхъ чисто аналитической школьной пыли, поднимаемой зауряднымъ кропаньемъ, и подобно спасительному дождю унимало эту пыль.

Само собою понятно, что высшая, вещественно натуральная точка зрѣнія, на которую мы указали въ математикѣ и механикѣ, ведетъ съ собою единственную методу, при помощи которой какія угодно средства распредѣляются естественно. Такимъ образомъ, примѣнимы всякія средства, каждое на своемъ мѣстѣ, столько же абстрактное исчисленіе, сколько и конкретное сочетаніе непосредственныхъ фактовъ и созерцаній. Но для этого не требуется никакихъ искусственныхъ средствъ, тѣмъ болѣе, новыхъ ублюдочныхъ понятій, напротивъ, достаточно, если держаться старыхъ историческихъ основъ, смотря на аналитическую ихъ отдѣлку, поскольку она есть сильнѣйшая абстракція, какъ на существенный прогрессъ, но всюду, какъ въ цѣломъ, такъ и въ частностяхъ, изгонять всякую узкость, всякую порчу и взвинченность, все равно принадлежатъ ли эти недостатки античному синтезу, новому аналитическому взмаху, или новѣйшей синтетической реакціи.

215. Въ каждой наукѣ исторія ея развитія можетъ служить болѣе или менѣе непрямымъ указаніемъ для студій. Очищенное критикою изложеніе составныхъ частей, изъ которыхъ мало по малу составилось существующее цѣлое, показываетъ намъ естественную послѣдовательность, въ какой наука шла отъ болѣе простыхъ и непосредственныхъ воззрѣній къ послѣднимъ отвлеченіямъ и искусственнымъ методамъ. Но исторія науки особенно полезна при изученіи механики, и можно даже утверждать, что само историческое изложеніе, въ своихъ главныхъ исходныхъ пунктахъ, образуетъ естественное первоначальное введеніе въ эту область. И это соображеніе отнюдь не было второстепенною точкою зрѣнія при составленіи нашей книги. По меньшей мѣрѣ, изображеніе раннихъ эпохъ должно себѣ довлѣть и быть насколько возможно независимымъ отъ другаго знанія, скорѣе, наоборотъ, основныя понятія въ этой области, именно въ исторической то своей связи и должны найти себѣ лучшее освѣщеніе, чѣмъ при иномъ способѣ изложенія. Съ этой точки зрѣнія, обращеніе къ инымъ вспомогательнымъ средствамъ только тогда могло бы имѣть какой-нибудь смыслъ, когда бы рѣчь зашла о наглядномъ поясненіи экспериментовъ. Что же касается позднѣйшихъ эпохъ, то не слѣдуетъ забывать, что здѣсь простота матема-

тическихъ средствъ прекращается, и что поэтому изученіе нашего введенія въ механику можетъ исполнѣть удовлетворить только тогда, если мы ранѣе уже открыли себѣ доступъ къ уразумѣнію основныхъ понятій высшаго анализа. Тогда намъ ощутителенъ будетъ и контрастъ, господствующій въ самомъ сооруженіи науки, смотря по тому, взята ли мѣриломъ простая естественность первоначальныхъ приѣмовъ, или же искусственно обоснованный способъ мышленія позднѣйшаго времени.

Подобныя же выгоды можно бы было извлечь и для изученія чистой математики, если бы существовала критическая исторія всѣхъ принциповъ, исходныхъ пунктовъ и главныхъ направленій и для этой широкоразвѣтвленной области. Но общая исторія математики еще доселѣ осталась почти въ томъ же состояніи, въ какомъ оставилъ ее въ 18-мъ столѣтіи Монтюкла въ имъ самимъ написанныхъ томахъ его обширнаго произведенія, задуманнаго имъ въ широкихъ рамкахъ. Это обширное произведеніе француза сдѣлалось въ послѣдствіи почти исключительнымъ источникомъ для болѣе краткихъ очерковъ, и даже въ современныхъ опытахъ подобныхъ сокращеній тотчасъ же замѣтна ихъ полная зависимость отъ названной работы прошлаго столѣтія. Понятно также, что они не пускаются въ изслѣдованія о 19-мъ столѣтіи, и даже относительно прошлыхъ столѣтій крайне несостоятельны тамъ, куда оригинальныя части Монтюкловскаго труда не простираются, и гдѣ поэтому приходится опереться на несравненно ниже стоящую дополнительную часть этого произведенія. Подобающаго пониманія главной цѣли Лагранжевыхъ работъ въ подобныхъ очеркахъ искать напрасно, и это только одинъ изъ примѣровъ, по которому можно судить вообще о манерѣ, какъ въ подобныхъ исторіяхъ математики раздѣляются съ выдающимися личностями изъ новѣйшихъ. Даже и Монтюкла скорѣе отличался тщательностью въ передачѣ легче схватываемыхъ фактовъ, нежели критическою глубиною. Единственный трудъ въ 19-мъ столѣтіи, выдающійся въ области исторіи математики дѣйствительно гениальнымъ исполненіемъ, это—четыре тома Либри, повѣствующіе о судьбахъ математическихъ наукъ въ Италіи, начиная съ эпохи Ренессансъ и до эпохи Галилея включительно. Эта подробная, критическая работа природнаго итальянца, написанная на французскомъ языкѣ и впервые появившаяся въ Парижѣ въ 1838—1841 гг., въ послѣдствіи перепечатана была въ Германіи (Галле 1865). Это въ самомъ дѣлѣ образцовая работа, но, къ сожалѣнію, касается только подготовительныхъ явленій и первыхъ исходныхъ пунктовъ новой математики и ея приложеній, да и то лишь постольку, поскольку дѣло касается Италіи, во всякомъ случаѣ, являющейся здѣсь образцомъ.

Все, о чемъ еще можно бы было упомянуть по исторіи математики, разбросано въ монографіяхъ, да кромѣ того эти отдѣльныя статьи, съ своимъ отрывочнымъ содержаніемъ, главнымъ образомъ имѣють предметомъ явленія древняго или средневѣковаго міра и представляютъ поэтому мало интереса. Несравненно высшее значеніе, нежели такія спеціальныя сочиненія, расчитанныя, большею частію, на заурядную ученость и на внѣшность пониманія, сверхъ того, высоко поднимаясь надъ уровнемъ пока имѣющихся общихъ историческихъ трактатовъ, прямо имѣють разрозненные историческія замѣтки перворазрядныхъ математиковъ, какъ лучшія указанія для болѣе глубокаго проникновенія въ дѣло. Такъ, Лагранжевскія лекціи о функціонномъ исчисленіи богаты тонкими указаніями о способахъ, какими различныя истины анализа были находимы и исторически развивались дальше. Вообще, во всякой исторіи науки должно быть руководящимъ основоположеніемъ, что историческіе *aperçus* творческихъ умовъ должны быть оцѣниваемы выше, чѣмъ обычные, какъ бы профессиональныя историческіе очерки. Тонкости и послѣднія различія, равно и болѣе отдаленные элементы связи, въ благопріятнѣйшемъ случаѣ, видны прежде всего тѣмъ, кто владѣетъ предметомъ, формируя его и развивая далѣе. Случай критической исторіи, дѣйствительно глубоко проникающей въ дѣло, всегда наступаетъ позднѣе, да и тутъ весьма рѣдко такое проникновеніе выходитъ за предѣлы обыкновенной критики и рѣдко бываетъ связано со способностью схватывать творческіе мотивы значительныхъ умовъ во всемъ ихъ своеобразіи.

О такомъ недостаткѣ исторіи математики 19-го столѣтія можно дать себѣ отчетъ, который вмѣстѣ съ тѣмъ бросалъ бы нѣкоторый свѣтъ и на состояніе самой науки. Во-первыхъ, само собою понятно, что новѣйшая манера работать только въ самыхъ спеціальныхъ углахъ математическаго поля, или, какъ часто это бываетъ, показывать только видимость дѣятельности, дѣлаетъ собраніе такихъ разбросанныхъ мѣстъ вещь необходимою для писателя исторіи, хотя бы только для того, чтобы доказать, какъ безплодны и пусты многія изъ этихъ предпріятій или просто поवादокъ. Но чрезъ это занятіе по составленію историческихъ очерковъ было бы обременено такими предвзрительными работами, которыхъ результатъ ни какъ не соотвѣтствовалъ бы потраченному труду. Безалаберная смѣсь фактовъ съ такими совершенно безплодными, но все-таки цѣнными и уважаемыми, явленіями, должна бы была простаго повѣствователя исторіи совсѣмъ сбить съ толку, составителя же критической исторіи побудить чаще рѣшать дѣло безъ дальнѣйшихъ разбирательствъ и многое прямо отбрасывать, если уже съ виду оно не имѣетъ ника-

кого значенія. Но такое просѣиванье, конечно, было бы работою весьма неблагодарною, это была бы личная жертва, конечно, весьма нежелательная въ сферѣ учебныхъ занятій по математикѣ. Стоитъ, наприм., только вспомнить о томъ, какую роль въ современной коллегіальной оцѣнкѣ научнаго прогресса играютъ новѣйшіе варианты въ алгебрѣ, все равно, будутъ ли это инварианты или коварианты! Кто такіе и подобные отбросы науки, уже достигшей своихъ предѣловъ, захотѣлъ бы оцѣнить по достоинству, тому пришлось бы уязвить такое множество современныхъ авторитетиковъ, что не будь у него никакой опоры кромѣ его книги, его жизнь, какъ ученаго ничѣмъ не была бы обезпечена. Но ко всему этому на дѣлѣ присоединяется еще трудность правильной группировки этихъ позднѣйшихъ побѣговъ въ связи съ лучшимъ наслѣдіемъ прежнихъ временъ, а еще и трудность полного и яснаго изложенія обширнаго матеріала, хотя бы практическая цѣнность его была бы и не велика. Подобное концентрированное изложеніе требовало бы, по меньшей мѣрѣ, еще не имѣющагося на лицо систематизированія того, что какъ цѣлое еще не получило связной формы ни въ одной головѣ. Но ожидать подобнаго значить требовать большаго, чѣмъ могутъ дать даже болѣе обширныя историческія предпріятія и лучшія способности, нежели какими обладаютъ заурядныя личности, обыкновенно занимающіяся писаніемъ исторій.

Указанный пробѣлъ въ исторіи математики тѣмъ знаменательнѣе, что состояніе, какого достигала чистая математика уже въ теченіе 18-го столѣтія, обѣщало настоящее наводненіе, и въ самомъ дѣлѣ привело его съ собою въ 19-мъ столѣтіи. Но когда науки достигаютъ границъ, гдѣ онѣ становятся безплодными, то ихъ представители имѣютъ обычай искать вознагражденія за отсутствіе прогресса въ историческихъ обзорахъ прошлаго. Приступаютъ въ обширныхъ размѣрахъ къ историческимъ изслѣдованіямъ, и даже тамъ раскапываютъ прошлое, гдѣ искать нечего, забавляясь мелочами и второстепеннаго свойства варьяціями. Если это можно еще видѣть и въ современной математикѣ, то все таки доселѣ не замѣчается стремленія къ систематическимъ и широкообъемлющимъ историческимъ изслѣдованіямъ, а вину въ этомъ слѣдуетъ исключительно приписать отталкивающему состоянію новѣйшей фазы. Эта безалаберщина еще не кончилась, и потому столъ еще установленъ всякою снѣдью, которая только сбила бы съ толку зауряднаго историка, поставивъ его въ невозможность надлежаще оріентироваться среди разнообразныхъ, хотя и размалеванныхъ и снабженныхъ всякими ярлыками, но пустыхъ блюдъ.

216. Если въ общемъ изслѣдованіи научнаго состоянія сопоста-

вить чистую математику съ областями, гдѣ она должна искать себѣ приложній, то въ отношеніи прогресса окажется въ настоящее время поразительный контрастъ. Тогда какъ чистая математика, во всѣхъ своихъ направленіяхъ, очевидно попала въ безвыходные переулки и уже давно, даже тамъ, гдѣ ея представителями были лучшіе умы, мучится надъ исчерпанными предметами и направленіями, физика далеко ушла впередъ, и именно за послѣднее время пришла къ замѣчательнымъ открытіямъ, и нѣкоторыя изъ нихъ, какъ напр. механической эквивалентъ теплоты, представилъ аналитическому мышленію новый случай проявить свою дѣятельность. Такъ какъ чистая математика и физика обставлены въ научныхъ учрежденіяхъ съ внѣшней стороны одинаково, то застой въ одной области и движеніе въ другой слѣдуетъ отнести прежде всего къ внутреннимъ жизненнымъ условіямъ. Поэтому, упадокъ академій и университетовъ имѣетъ здѣсь только второстепенное значеніе. Этотъ упадокъ усиливаетъ наводненіе въ области чистой математики и задерживаетъ успѣхи, какіе можно бы было ожидать въ реальной области; но ни въ томъ, ни въ другомъ направленіи его нельзя признать достаточнымъ основаніемъ объясненія внутренней жизни науки. По счастью, послѣдняя, гдѣ только въ основаніи, какъ мотивъ, лежатъ здоровые интересы человѣческаго духа, не связана съ этими червивыми учрежденіями. Вспомнимъ, что главное открытіе нашего вѣка, имѣющее такое громадное значеніе для механики и физики, сдѣлано было нѣмецкимъ врачомъ, слѣдовательно, говоря языкомъ ремесленной учености, простымъ диллетантомъ, и что оно совсѣмъ не было подаркомъ случая, но плодомъ систематическаго размышленія и надлежаще комбинированныхъ вычисленій.

Обогащеніе математики значительными новыми средствами начинается флюкціоннымъ методомъ Ньютона, т. е. съ 17-го вѣка, и въ спеціальномъ дальнѣйшемъ развитіи, въ сущности, ограничивалось тѣмъ матеріаломъ, какой въ самомъ началѣ необходимъ былъ для осуществленія механики тяготѣнія. Высшаго пункта въ своемъ развитіи эта второстепенная метода достигла въ подготовленномъ еще Эйлеромъ, но созданномъ Лагранжемъ, вариационномъ исчисленіи. вмѣстѣ съ этимъ, и съ переходомъ отъ 18-го столѣтія къ 19-му, этотъ первоначально начертанный циклъ аналитическихъ успѣховъ можно считать пройденнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, позднѣе даже именитые математики могли прокладывать лишь боковыя тропинки или же должны были сразу пускаться въ такія спекуліаціи, которыя на практикѣ не имѣютъ ни малѣйшаго значенія, да и когда угодно могутъ считаться только пустою игрою ума. Прежде всего, что касается этихъ праздныхъ, не имѣющихъ никакого отношенія къ

требованіямъ реальныхъ наукъ, умозрительныхъ забавъ. то на зарѣ 19-го столѣтія снова приходится вспомнить Фермата, и его недоказанныя теоремы теоріи чиселъ сдѣлались важнымъ предметомъ, къ которому привилась особая дисциплина и въ концѣ концовъ пустила глубокіе корни въ нѣмецкихъ университетахъ. Начиная съ латинскихъ «Изслѣдованій по ариметикѣ» Гаусса, появившихся въ началѣ 19-го столѣтія, и Лежандровской *Théorie des nombres* вплоть до работъ Дирикле и появившейся послѣ его смерти подъ его именемъ теоріи чиселъ, изданной по его лекціямъ, разыгрывались разныя варьяціи на ту же тему, подконецъ же дѣло дошло до того, что эта отрасль умозрѣнія, преимущественно по примѣру Дирикле, сдѣлалась въ нѣмецкихъ университетахъ главнымъ предметомъ лекцій, и имъ было даже придано значеніе образца для изученія.

Другое направленіе, какое привелъ съ собою господствующій въ цѣломъ застой, было малою и крайне специальною вѣтвью цѣлаго. Сюда прежде всего относится разработка эллиптическихъ функций, дѣйствительно оригинальное созданіе Абеля. Когда видишь, что столь высокоодаренный умъ, по праву считающійся перворазряднымъ гениемъ, не могъ найти себѣ инаго предмета, кромѣ этихъ почти незамѣтныхъ отпрысковъ анализа, то невольно ищешь причины этого, главнымъ образомъ, въ самомъ положеніи, въ какое видимо пришелъ анализъ вслѣдствіе того, что первыя главныя его направленія исчерпаны. Изящные приемы Норвежскаго математика настолько противоположны были отрывочной манерѣ Якоби, шаги котораго въ этомъ предметѣ были подобны Абелевскимъ, на сколько неодинаковы были и языки, ими избранные. Абель выбралъ себѣ живой французскій языкъ, Якоби—не только мертвую, но и положительно дрянную латынь. Но обстоятельство, что разсматриваемый предметъ былъ крайне второстепеннаго значенія, объясняетъ, во всякомъ случаѣ, почему эта двойственность научной его разработки для нѣкоторыхъ частей его дѣйствительно могла существовать, для другихъ же частей, по крайней мѣрѣ, завоевать себѣ довѣріе. При обработкѣ отдаленныхъ полей публика не въ состояніи достаточно контролировать дѣло, и этимъ въ нѣкоторой мѣрѣ объясняется, почему оригинальный типъ, отмѣчающій Абелевскія работы, доселѣ не удостоился полной мѣры единственно ему подобающей оцѣнки. Но не смотря на такую высокую цѣнность Абелевскаго наслѣдія, нельзя не видѣть въ подобномъ приложеніи математическаго таланта прискорбныхъ слѣдствій состоянія, которое не могло дать никакой пищи для болѣе высокаго взмаха. Если и впослѣдствіи кропотливая разработка другихъ отдѣльныхъ функций позднѣйшимъ поко-

лѣніемъ сдѣлалась модою, и нынѣ это ковырянье въ сферѣ не имѣющихъ практическаго значенія частностей стало господствующимъ, то это—явный признакъ измельчанія.

Если кто къ указаннымъ признакамъ упадка пожелалъ бы прибавить болѣе осязательный симптомъ, тому стоитъ только нѣсколько критически взглянуть, какимъ образомъ разъ навсегда законченное аналитическое орудіе примѣняютъ въ области реальныхъ изысканій. Какъ скоро сдѣлано какое-нибудь матеріальное открытіе въ области физики, имѣющее математическую сторону, тотчасъ находятся люди и растягиваютъ надъ нимъ свою алгебраическую паутину, какъ будто бы дѣло шло о мухѣ, которую только и можно было поймать ихъ аналитическою сѣтью. Стоитъ, напр., только припомнить судьбы механической теоріи теплоты. Какъ просто было проторяющее новые пути открытіе Майера само по себѣ и въ безупречномъ изложеніи самимъ его виновникомъ! И сколько аналитическихъ пустяковъ съ тѣхъ поръ успѣли къ нему прицѣпить, заваливъ эту область пустыми орѣхами! Примѣненіе анализа къ этой области въ должной мѣрѣ—большая рѣдкость, за то сколько угодно фокусовъ безрезультатнаго исчисленія со всѣми его суетными притязаніями. Между прочимъ, въ этомъ послѣднемъ направленіи особенно отличился путаницею одинъ нѣмецкій профессоръ, г-нъ Клаузіусъ. Подобные визиты въ область механики и физики обнаруживаютъ, какого они пошиба, еще и тѣмъ, что при такой молотьбѣ пустой аналитической соломы, стукотню, долженствующую возбуждать видимость плодотворной дѣятельности, они еще усиливаютъ трескотней ни къ чему ненужныхъ техническихъ выраженій. Гдѣ орудія для выковыванья новыхъ мыслей не хватаетъ, тамъ пытаются надуть читателя новыми словами и заставить его вѣрить, что подъ рѣдкостною оболочкою должно скрываться и внутреннее содержимое. Какихъ только глупостей ни дѣлалось съ разными новыми терминами именно въ механической теоріи теплоты, чтобы только давно извѣстныя вещи выдать за нѣчто новое и оригинальное! Отвратительныя продѣлки подобнаго пошиба въ современной математикѣ стали модою, а особенно въ новѣйшихъ мелочахъ по алгебрѣ, гордо величаемыхъ громкимъ именемъ новѣйшей алгебры, можно сколько угодно найти новинокъ въ этомъ родѣ. По поводу этой повадки далъ полный просторъ своей насмѣшкѣ и Понсле, вообще весьма осторожный въ дѣлѣ констатированія подобныхъ злоупотребленій.

Надменная пустота, съ какою люди простой аналитической дрессировки пытаются прибрать къ рукамъ открытія творческихъ головъ, была уже для Пуансо предметомъ презрительнаго осмѣянія.

Но въ настоящее время эти аналитическія, а отчасти и вообще математическія поползновенія можно разсматривать и съ другой еще точки зрѣнія. Именно, рутинеры простой формы употребляютъ анализъ, а также и другія математическія средства подобнымъ же образомъ, какъ нѣкогда средневѣковые схоластики примѣняли логику. Насколько силлогизмы этихъ послѣднихъ не въ силахъ были дать чего-либо вещественнаго, на столько же и употребленіе пустыхъ патроновъ анализа нашими современными схоластиками математики неспособно обогатить исторію какими-либо реальными успѣхами. Историкъ будущаго будетъ смотрѣть на наше время въ математическомъ отношеніи подобно тому, какъ мы смотримъ на средневѣковую логику, преспокойно сравнивая безрезультатность хожденія на ходуляхъ силлогизмовъ съ такимъ же ходульнымъ прилаживаніемъ аналитическаго или вообще математическаго схематизма; ибо причинъ смотрѣть розно на оба эти явленія тогда не будетъ.

217. Среди такой эксплуатаціи математики, какъ выше указано, основоположеніе, въ силу котораго слѣдуетъ обращаться къ произведеніямъ творческихъ головъ прежняго времени, получаетъ еще большее значеніе, чѣмъ ему и безъ того подобаетъ. Если, наприм., взять уже разсмотрѣнный примѣръ проэктивной геометріи, то оригинальныя творенія, въ родѣ Понселетовскаго, что касается ихъ гениальной индивидуальности, незамѣнимы начертаніями второразрядныхъ головъ, не говоря уже объ обыкновенныхъ учебникахъ. Но вліятельное и въ будущемъ возбужденіе можетъ исходить только отъ впечатлѣнія, какое оставляетъ по себѣ непосредственное общеніе съ самостоятельно мыслящими и творческими натурами. На различіе послѣднихъ отъ всякихъ посредственностей и сводится все въ какомъ угодно направленіи занятій. Кто разъ позналъ эту пропасть, о которой обычная косная форма, въ какой знаніе преподносится ходячими компендіями или заурядными профессорами, не даетъ никакого понятія,—кто разъ постигъ это, самую природою полагаемое, ранговое различіе умовъ, тотъ, какимъ бы путемъ онъ ни достигъ обладанія первоначальными познаніями въ данной области, уже никогда не сдѣлаетъ даже и попытки обратить главную силу своихъ стараній на что-либо иное, а не на оригинальныя и фундаментальныя творенія. Чѣмъ раньше наступитъ эмансипація отъ заурядныхъ учебныхъ пособій, тѣмъ умнѣе и плодотворнѣе обставлены будутъ занятія. Результатъ такого отношенія къ дѣлу скажется тѣмъ ярче, чѣмъ скорѣе дозволятъ способности и благопріятныя обстоятельства выкинуть за бортъ обыкновенные учебники, и ни въ лекціяхъ, ни въ заурядныхъ книгахъ, не искать настоящихъ пособій.

Авторская слава, и даже не только мимолетная, — признак довольно неопредѣленный и, по большей части, остается вещь не вполне выясненной. Даже въ благоприятѣйшемъ случаѣ, когда она вообще умѣстна, обыкновенно бываетъ такая путаница въ оцѣнкѣ самыхъ неодинаковыхъ степеней умственной силы, какъ будто бы между гениемъ, талантомъ и виртуозностью какого-нибудь компилятора не было никакой разницы. Нахальное кривлянье авторитетиковъ и взаимныя самовосхваленія популярнѣйшихъ, но на дѣлѣ ровно ничего не значащихъ, профессоровъ обыкновенно на столько сбиваютъ публику съ толку, что она даже и не помышляетъ о томъ, чтобы поискать чего-нибудь помимо этихъ мимолетныхъ фигурантовъ рекламы, и даже не предполагаетъ, что живой духъ заключенъ въ твореніяхъ или наслѣдіи свободныхъ творческихъ натуръ. Послѣднія, по большей части, даже ей извѣстны, если не со стороны ихъ истиннаго характера, то, по крайней мѣрѣ, по имени. На сколько хитро обманываютъ здѣсь публику монополисты школы умышленнымъ ступеньчаніемъ границъ, почти всегда можно судить по глупому отношенію всѣхъ тѣхъ, кто подъ давленіемъ обычнаго способа обученія становится совершенно апатичнымъ, и кому даже и въ голову не приходитъ, что мысли и болѣе глубокія воззрѣнія въ весьма простой формѣ они могутъ найти, иногда, впрочемъ, лишь въ печатномъ словѣ давно сошедшихъ со сцены авторовъ, да что и притупляли то ихъ ради того, чтобы со стороны ихъ не было запросовъ на эти глубокія воззрѣнія. Какъ мало смыслитъ публика въ дѣлѣ различенія истинно славнаго имени отъ простой заурядности и какіе иногда бывають курьезы вслѣдствіе такого непониманія, доказываетъ одно выраженіе весьма извѣстнаго нѣмецкаго профессора исторіи, книги котораго все еще читаются и послѣ его смерти: его можно въ данномъ случаѣ прямо считать представителемъ сужденія толпы. Ф. Х. Шлоссеръ, въ первомъ отдѣлѣ второй части своей «Исторіи древняго міра» (Франкфуртъ-на-М., 1828), желая высказать свое мнѣніе объ эвклидовскомъ методѣ, дѣлаетъ при этомъ случаѣ въ высшей степени комичное сопоставленіе именъ; на стр. 225 онъ пишетъ: «Всѣ мыслящіе математики отъ Архимеда до Кестнера признавали этотъ методъ единственно правильнымъ». Архимедъ и Кестнеръ, — дѣйствительно, удивительное родство! Геній, почти единственный представитель всей математической мощи древняго міра, и рядомъ съ нимъ, какъ равный ему, весьма въ свое время популярный Геттингенскій профессоръ, но о которомъ теперь совершенно забыли, и книгъ его давно никто не читаетъ. Дѣйствительно, еще и теперь невѣжество тѣхъ, кто учился по официальнымъ шаблонамъ, таково, что они не задумаются поставить на одну

доску Архимедовъ и Кестнеровъ, а пожалуй, еще и нынѣ найдется и такой историкъ, который будетъ вамъ говорить о механикѣ или о физикѣ отъ Галилея до Гельмгольца!

Но особенно полезна бываетъ подобающая оцѣнка именъ, когда рѣчь идетъ не объ отдѣльныхъ произведеніяхъ, а о журналахъ. Судьба послѣднихъ, и преимущественно академическихъ записокъ, въ новѣйшее время всегда одна и та же: они помогутъ вамъ собрать цѣлую гору макулатуры, въ которой, между тысячами не имѣющихъ никакого значенія бездарныхъ произведеній или и прямо дрянныхъ статей, найдется какая-нибудь пара и выдающихся работъ. Иные изъ академическихъ актовъ прямо можно бы было бросить въ печь, и наука не потерпѣла бы отъ этого никакой потери. Другіе журналы, какъ наприм. Креллевскій въ первые года его существованія, цѣнны потому, что содержатъ отдѣльныя работы значительныхъ или интересныхъ авторовъ, въ родѣ Понселе, Абеля, Штейнера и Софи Жерменъ, особенно въ виду того, что позднѣе иногда не появлялось оригинальной переработки ихъ въ отдѣльныхъ книгахъ или въ собраніи произведеній. Относительно пользованія подобными отдѣльными работами, учащимся можетъ быть данъ только одинъ совѣтъ—держаться извѣстныхъ именъ. Какъ въ учебникахъ, такъ и въ лекціяхъ, обыкновенно не указываютъ источниковъ и мѣсто-нахожденія частныхъ. Часто къ оригинальнымъ статьямъ относятся еще хуже, чѣмъ къ оригинальнымъ основнымъ трактатамъ, ибо обыкновенно надлежащихъ свѣдѣній о существованіи такихъ источниковъ не приводятъ тамъ, гдѣ это было бы умѣстно, и однако же именно въ настоящее время, когда частности и мелочи берутъ рѣшительный перевѣсъ, есть вѣская причина ученымъ образомъ заняться этимъ пунктомъ, приводя, конечно, не все сплошь, ибо это было бы бесполезно, но съ извѣстнымъ критическимъ разборомъ.

218. Иногда бываетъ полезно, вмѣсто того, чтобы обращаться къ монографіямъ, брать работы, имѣющія характеръ свода, или же, въ нѣкоторой мѣрѣ, и самостоятельнаго сочетанія существующаго, но разбросаннаго матеріала. Такія работы никогда не бываютъ въ высокомъ жанрѣ, какъ бы часто ихъ авторовъ ни цитировали и какимъ бы уваженіемъ онѣ ни пользовались. Сюда же принадлежатъ и такіе труды, которые можно назвать работами выпряданія, ибо въ нихъ дается широкое развитіе легко выводимымъ результатамъ примитивныхъ истинъ. Къ лучшимъ изъ старыхъ работъ въ этомъ послѣднемъ родѣ принадлежитъ, наприм., «Введеніе въ анализъ алгебраическихъ кривыхъ» Крамера (Женева, 1750). Эта работа, обставленная элементарнѣйшими примѣрами и написанная легкимъ французскимъ языкомъ, конечно, есть ничто иное, какъ де-

тальная разработка легко доступных истинъ на основѣ того, что дано было, начиная съ Ньютоновскихъ работъ; но было бы очень недурно, если бы и нынѣшнія работы въ такомъ родѣ отличались бы такою же солидностью и такимъ же умѣньемъ распоряжаться матеріаломъ. Иначе трудно было бы объяснить себѣ, почему все еще обращаются къ этой старой книгѣ, и почему, въ самомъ дѣлѣ, еще и теперь въ этомъ трудѣ женевского математика учащійся можетъ найти кое-какія свѣдѣнія, какихъ въ столь же удобопонятной формѣ онъ не найдетъ въ новыхъ руководствахъ.

Что касается современныхъ намъ опытовъ общихъ трактатовъ, то нельзя сказать, чтобы здѣсь дѣло обстояло вполне благополучно; ибо даже тамъ, гдѣ такой сводъ матеріала въ новой формѣ былъ бы дѣломъ своевременнымъ и нетруднымъ, какъ, наприм., въ области дифференціального и интегрального исчисленій, мы не можемъ указать ни одного удовлетворительнаго трактата. Извѣстная по этой части книга французскаго ученаго Бертрана, не говоря уже о ея вообще неудовлетворительномъ, а для такого объемистаго трактата—и крайне одностороннемъ изложеніи, все-таки есть лишь нѣчто среднее между учебникомъ и полнымъ трактатомъ. Задачи въ этой объемистой книгѣ своимъ школьнымъ характеромъ производятъ комическое впечатлѣніе, но благодаря имъ книга не становится особенно удобопонятнымъ пособіемъ. Въ сравненіи съ подобными произведеніями, большой трактатъ Лакруа, написанный еще въ началѣ столѣтія, и представлявшій, все-таки, второстепенное явленіе, еще можно назвать образцомъ, какъ по комбинаціи матеріала, такъ и по изложенію. По крайней мѣрѣ, Лакруа славился качествами хорошаго учителя математики, а его вполне сносные учебники, обнимающіе всѣ части математики, благодаря переводу ихъ на разные языки, обошли весь міръ. Еще и теперь можно встрѣтить новыя изданія этой, нѣкогда столь вліятельной, книги.

Большой общій трактатъ не нуженъ ни при первоначальномъ изученіи предмета, ни при дальнѣйшихъ систематичныхъ штудіяхъ; онъ нуженъ просто для справокъ по частнымъ вопросамъ, или же для пополненія пробѣловъ. Детальныя свѣдѣнія нужны бываютъ только въ опредѣленныхъ отдѣльныхъ направленіяхъ; поэтому никто не будетъ удѣлять одинаковаго вниманія всякимъ ученіямъ и частностямъ. Хорошіе общіе трактаты должны приводить въ надлежащій порядокъ то, что разсыяно гдѣ попало, въ видѣ специальныхъ работъ—монографій или журнальныхъ статей, и такимъ образомъ стремиться сдѣлать болѣе доступнымъ не только старый, но и новый матеріалъ данной области. Иногда случается, что вскорѣ послѣ того, какъ создана нѣкоторая новая отрасль науки, появляются и

полные трактаты высшего рода, когда их авторы принадлежать къ числу производительныхъ математиковъ, такъ что не только лучше владѣютъ своимъ предметомъ, но и дѣйствительно обогащаютъ его собственными цѣнными вкладами. Въ такомъ родѣ были по-латынѣ написанныя главныя работы Эйлера, вмѣстѣ съ тѣмъ, первоначально служившія и настоящими учебниками при болѣе глубокихъ и обширныхъ студіяхъ; это—его «Введеніе въ анализъ безконечнаго», содержащее не самое исчисленіе безконечныхъ, но лишь подготовительный къ нему анализъ, а затѣмъ и его дифференціальное и интегральное исчисленіе. Такъ какъ эти три сочиненія есть и въ нѣмецкомъ переводѣ, то рекомендація ихъ, въ видахъ болѣе полного и основательнаго изученія нѣкоторыхъ частныхъ, вполне умѣстна. Поповское многоглаголаніе, унаслѣдованное имъ отъ отца вмѣстѣ съ ханжескими наклонностями, и логическія погрѣшности, въ силу коихъ дифференціалы считаются у него чистыми нулями,—все это не такъ вредитъ, если брать у него отдѣльныя ученія, чѣмъ при сплошномъ чтеніи.

Равнымъ образомъ, и Эйлерово «Полное введеніе въ алгебру» (2 части, Петербургъ, 1770), написанное имъ по-нѣмецки послѣ потери зрѣнія,—учебникъ хорошій и до сихъ поръ еще довольно пригодный для первоначальнаго изученія, особенно въ виду того, что случаи появленія элементарныхъ руководствъ, написанныхъ первостепенными математиками,—явленіе, въ исторіи исключительное. Качества этой книги, какъ и другія работы Эйлера, доказываютъ его умѣнье просто и удобопонятно для учащихся излагать свой предметъ. Поэтому, такимъ начинающимъ, которые на первыхъ шагахъ нуждаются въ простыхъ и подробныхъ разъясненіяхъ, и поэтому не побоятся терпѣливой переработки пространнаго матеріала, такимъ начинающимъ можно смѣло рекомендовать указанныя произведенія Эйлера, какъ первое введеніе въ дифференціальное и интегральное исчисленія, равно какъ и вообще въ анализъ, что, конечно, не избавитъ отъ необходимости впослѣдствіи заняться и Лагранжемъ, и будетъ служить лишь цѣлесообразною подготовкою и облегченіемъ этихъ позднѣйшихъ студій. Впрочемъ, все-таки это не мѣшаетъ смотрѣть на большія работы Эйлера, главнымъ образомъ, какъ на высшіе полные трактаты, и сверхъ того, какъ на источники, откуда можно почерпнуть и собственные ученія этого математика. Касательно ариѳметики и элементарной алгебры кстати замѣтить, что превосходныя лекціи Лагранжа въ Нормальной Школѣ недавно переведены на нѣмецкій языкъ, и, такимъ образомъ, впервые сдѣлались доступны какъ особое сочиненіе. Въ отношеніи формы,—а только въ этомъ смыслѣ о данномъ матеріалѣ и можетъ быть рѣчь, а также бла-

годаря гениальному изображенію простыхъ вещей, онѣ стоятъ несравненно выше упомянутой обширной работы Эйлера. Подробности см. объ этомъ въ нашихъ указаніяхъ, содержащихся въ основномъ трактатѣ по математикѣ.

Что касается обычной главной области приложеній высшаго исчисленія, именно ученія о тяготѣніи, то въ своей многотомной небесной механикѣ Лапласъ далъ произведеніе, по характеру своему ничѣмъ не отличающееся отъ общихъ трактатовъ, т.-е. свода матеріала и детальныхъ выкладокъ, не смотря на то, что въ немъ имѣются кое-какіе самостоятельные элементы и отдѣлы. Слишкомъ высокая оцѣнка предмета и обычное отсутствіе пониманія ранговой разницы выдающихся умовъ, о чемъ мы уже ранѣе говорили, все это повело къ тому, что о Лапласѣ вошло въ привычку говорить такъ, какъ будто бы это имя стояло на одинаковой высотѣ съ Эйлеромъ и даже Лагранжемъ. И однако, *Mécanique céleste*—не болѣе, какъ подробная разработка матеріала по планетной механикѣ, имѣющагося на лицо въ Ньютоновскомъ главномъ твореніи и въ позднѣйшихъ работахъ по этой части. Избытокъ аналитическаго схематизма служить немалою помѣхою связанному пониманію, и потому книга Ньютона, нѣмецкій переводъ которой появился еще въ 1872 г., по своей краткости и скупости на алгебраическія выкладки, все еще остается единственнымъ прибѣжищемъ, гдѣ, по меньшей мѣрѣ, можно кратчайшимъ способомъ изучить всѣ главныя основанія планетной механики. Итакъ, Лапласа, Лежандра и Пуассона всегда можно поставить на одну доску; но слѣдуетъ разъ навсегда уяснить себѣ, что между компиляторскою виртуозностью Лапласа и свободно творческою гениальностью Лагранжа цѣлая пропасть, сказывающаяся уже и внѣшнимъ образомъ въ ихъ стиляхъ и писательскихъ аллюрахъ.

219. Если какая наука, въ сущности, не требуетъ устной передачи при обученіи, то это—математика. Независимость ея отъ устнаго слова и полнѣйшая возможность передачи ея истинъ путемъ печатнаго слова настолько несомнѣнны, что на лекціи по этому предмету можно смотрѣть какъ на бесполезную трату времени. Въ самомъ дѣлѣ, чудная вещь эти лекціи математики или, какъ говорятъ для красоты слога, это преподаваніе. Въ лучшемъ случаѣ, профессоръ будетъ сопровождать свою пачкотню мѣломъ по доскѣ и операціи при помощи губки такими замѣчаніями, какія можно найти въ своемъ мѣстѣ и въ книгѣ. Вычисленія, напечатанныя въ книгѣ, и изустныя вычисленія играютъ совершенно одинаковую роль, только съ тою разницею, что, читая книгу, имѣешь возможность не спѣшить, когда не можешь быстро слѣдовать за авторомъ.

тогда какъ профессоръ нисколько не стѣсняется утомлять слушателей медленнымъ изложеніемъ тривіальностей, и наоборотъ, быстро миновать болѣе трудные пункты, нисколько не уясняя ихъ слушателямъ. Слушатели, обыкновенно, обзаводятся тетрадами и записываютъ въ нихъ преподаваемое, но эта послѣдняя операція какъ разъ въ математикѣ крайне плохо мирится съ потребнымъ напряженіемъ вниманія и съ потребною для усвоенія свободною теченія мыслей.

Не устное преподаваніе вообще, но чтеніе лекцій—вещь въ математикѣ не только излишняя, но и вредная. Даже вся университетская манера обученія можетъ сохранить нѣкоторую привлекательность развѣ въ смежныхъ съ математикою отрасляхъ, напр., въ физикѣ, тѣмъ, что здѣсь производимые опыты непосредственно предлагаютъ зрѣнію нѣчто такое, о чемъ книга можетъ дать понятіе только рисунками и описаніями. Центральныя учебныя учрежденія, благодаря сосредоточенію въ нихъ большихъ приборовъ, могутъ пріобрѣсти нѣкотораго рода монополію, основывающуюся какъ бы на снабженіи ихъ капиталами, т. е. обширными средствами на эксперименты. Сверхъ того, иногда и наличность дѣйствительно искуснаго экспериментатора можетъ сообщить извѣстную прелесть такъ называемымъ лекціямъ по физикѣ. Но что касается самаго хода мыслей и болѣе точнаго ориентированія касательно постановки опытовъ, книга все таки должна оставаться главнымъ дѣломъ. Извѣстно также, что болѣе простые опыты, производимые самостоятельно, имѣютъ для изученія физики болѣе значенія, нежели замысловатые эксперименты, которые можно только видѣть. Но и съ этой точки зрѣнія университеты, въ самомъ благопріятномъ случаѣ, могутъ давать только хорошія зрѣлища, и лекціи не могутъ оказать никакой помощи въ столь важномъ дѣлѣ какъ самостоятельность. Напротивъ того, то обстоятельство, что на лекціи дѣятеленъ только профессоръ, съ одной стороны, а съ другой и искусственно заранѣе подготовленное, бывшее на эффектъ, выполненіе опытовъ, не даютъ никакого простора самостоятельности слушателя и зрителя. Привычка пассивно смотрѣть опыты и слушать чтеніе неизбѣжно ведетъ за собою нѣкоторое усыпленіе, и этимъ, можетъ быть, также объясняется, что нерѣдко профессора намѣренно избираютъ форму просто чтенія, а не толкованія предмета. Во всякомъ случаѣ, театрално эффектная виртуозность по части экспериментовъ приводитъ къ такимъ результатамъ, какіе умѣстны были бы при зрѣлищѣ фейерверка. Итакъ, должно согласиться, что по преподаванію физики и экспериментальныхъ предметовъ университетская манера ничѣмъ не оправдывается. Свободныя ассоціаціи для

приобрѣтенія и самостоятельнаго пользованія приборами принесли бы несравненно больше пользы, а нѣкоторая доза личнаго умѣнья въ обращеніи съ приборами, что вообще необходимо, была бы приобрѣтена безъ большихъ затратъ. Даже единичныя попытки самому продѣлывать болѣе простые эксперименты, достижимые личными средствами, руководствуясь указаніями учебника, уже теперь болѣе содѣйствовали бы успѣхамъ, нежели простое созерцаніе театральныхъ представленій по физикѣ. Если уже университетскія чтенія по физикѣ заставляютъ усомниться въ пригодности господствующихъ пріемовъ, и уже здѣсь средневѣковой способъ обученія въ формѣ односторонняго авторитетнаго поученія вредно отзывается на истинныхъ интересахъ занятій, то въ математикѣ, наукѣ чистаго мышленія, а не экспериментальной, нѣтъ рѣшительно никакихъ основаній отдавать предпочтеніе лекціямъ передъ книгами. Напротивъ, здѣсь ясно обнаруживается, что, наоборотъ, при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ, книги имѣютъ громадное преимущество предъ лекціями. Итакъ, вмѣсто того, чтобы записывать лекціи подъ диктовку профессора, какъ дѣлалось въ средніе вѣка, и такимъ образомъ придерживаться обычая, уже устарѣвшаго съ изобрѣтеніемъ книгопечатанія, слѣдуетъ, на сколько позволяютъ принудительныя предписанія, отказаться отъ этой отжившей барщины. Придерживайтесь книгъ и, на сколько возможно, настоящихъ основныхъ твореній, и вы скоро убѣдитесь, что новая система передачи знанія посредствомъ печати имѣетъ большія преимущества передъ средневѣковыми пріемами, рассчитанными на тѣсный кружокъ слушателей и монополизированными. Когда еще книги нужно было списывать и списки были рѣдки и дороги, тогда неизбѣжно было записывать лекціи, чтеніе которыхъ было просто диктовкою, и записки замѣняли собою книгу, которой купить было нельзя, либо даже совсѣмъ не было. Сверхъ того, и самое производство книгъ было стѣснено; ибо сбытъ, въ виду высокихъ цѣнъ за списыванье, былъ невеликъ. Къ счастью, это стѣснительное состояніе кончилось; но университеты, съ своимъ чтеніемъ лекцій, равно и съ своимъ цеховымъ устройствомъ, все еще стоятъ какъ средневѣковыя руины, а отъ нихъ эту моду чтеній унаслѣдовали вообще и другія новѣйшія учрежденія, т. е. политехническія школы. Благодаря этому, сама по себѣ мертвая манера получила права гражданства и въ новой обстановкѣ, хотя и приняла нѣсколько лучшую форму. Единственная задача, какая можетъ быть выполнена, само собою разумѣется, лишь умѣреннымъ количествомъ профессорскихъ лекцій, задача эта таже самая, какой служить вообще всякая вольная рѣчь. Свободное устное слово могло бы служить возбуждающимъ сред-

ствомъ, и оно же могло бы намѣчать тѣ пункты и направленія, на которые должно быть обращено вниманіе слушателя. Но самыя занятія не могутъ состоять въ слушаніи рѣчи, а основательное усвоеніе знанія не можетъ быть результатомъ лекціи, какъ бы возбуждительно она ни дѣйствовала. Совершенную противоположность этому составляетъ растянутое на цѣлый семестръ разматываніе цѣлой научной отрасли въ утомительномъ рядѣ лекцій, и хотя въ области новѣйшихъ, т. е. политехническихъ институтовъ дѣло и ведется гораздо практичнѣе и цѣлесообразнѣе, нежели въ университетахъ, все же этой стѣснительной формы устранить невозможно и изъ лекцій нельзя сдѣлать того, что прямо противорѣчитъ ихъ сущности. Если, слѣдовательно, въ отношеніи къ пользованію университетскими лекціями самая умѣренная діета, по моему, всего лучше, то этимъ я отнюдь не рекомендую воздержанія, котораго не соблюдалъ бы я самъ. Въ самомъ дѣлѣ, что касается слушанія университетскихъ лекцій по чистой математикѣ, то я не могу сдѣлать себѣ упрека въ томъ, что я жертвовалъ здѣсь временемъ вслѣдствіе научнаго заблужденія, а не вслѣдствіе соображеній касательно экзаменовъ и даже, въ частности, вслѣдствіе соображеній въ виду личности извѣстнаго экзаменатора.

220. Математика и сродныя науки должны совершенствоваться не только путемъ живаго международнаго обмѣна мыслей, основывающагося на знаніи новыхъ языковъ, но, въ виду современнаго положенія дѣла, держаться, кромѣ того, французскихъ традицій, ведущихъ начало отъ 18-го вѣка. Послѣ того какъ латынь была сдана въ архивъ, французскій языкъ сдѣлался господствующимъ языкомъ избранныхъ произведеній, и если въ современной литературѣ распредѣленіе произведеній между различными національными литературами и стало равномернѣе, то все таки именно прежніе труды, съ которыхъ приходится начинать и значеніе которыхъ, въ виду ихъ образцовой новѣйшей формы, выше позднѣйшей пустяковины,—труды эти были французскіе. Благодаря этому обстоятельству, занятія математикой тѣсно связаны съ новыми языками. Кстати замѣтить, для всѣхъ, готовящихся къ преподаванію въ реальныхъ школахъ и въ гимназіяхъ, такая, отчасти уже практикуемая, комбинація гораздо цѣлесообразнѣе, нежели соединеніе математики съ низшимъ, описательнымъ естествознаніемъ. Но, и помимо такихъ внѣшнихъ соображеній, знаніе французскаго, а затѣмъ англійскаго и итальянскаго языковъ для математика или физика составляетъ настоятельную необходимость. Во всякомъ случаѣ, такое лицо должно открыть себѣ непосредственный доступъ къ французскимъ основнымъ произведеніямъ и инымъ учебнымъ пособіямъ, если оно не

хочетъ навсегда остаться подъ опекою своей національной литературы. Конечно, могли бы оказать здѣсь нѣкоторую помощь переводы, но дѣло въ томъ, что многія существенно важныя вещи не переведены, а кромѣ того, сплошь и рядомъ переводы ихъ крайне неудовлетворительны. Переводы съ новаго языка, да притомъ произведеній творческаго ума, если даже они прямо не неточны и не ошибочны, то, по меньшей мѣрѣ, особый чеканъ, свойственный языку оригинала, въ нихъ исчезаетъ, такъ что почти утрачивается всякій слѣдъ первоначальной тонкости и изящества, тѣмъ болѣе, что разстояніе, отдѣляющее дарованія переводчика отъ качествъ автора, въ такихъ случаяхъ бываетъ обыкновенно очень велико. Что же касается переводовъ новыхъ латинскихъ сочиненій, то здѣсь имѣетъ мѣсто, въ нѣкоторой мѣрѣ, обратное отношеніе; ибо латынь здѣсь, по большей части, такъ плоха, что мысль автора, если только она понята переводчикомъ, должна выигрывать уже потому, что облекается въ формы живаго языка.

Культура древнихъ языковъ для математика и физика, и вообще для всякаго, кто имѣетъ въ виду живую жизнь новаго міра, и не интересуется мертвечиной, должна быть бременемъ, отчасти совершенно бесполезнымъ, а частію, когда она, въ видѣ исключенія, служить опорой для ученыхъ изслѣдованій историческихъ источниковъ въ какомъ-либо плодотворномъ направленіи, приносить такіе результаты, которые совсѣмъ не соотвѣтствуютъ потраченному труду. Вся эта роскошь такъ называемаго классическаго образованія, на которое столь многіе тратятъ лучшіе годы юности, для точной науки не только пропадаетъ даромъ, но и прямо служить ей тормазомъ. Греческія и латинскія школьныя упражненія приучаютъ умъ къ грамматическому педантизму, и не сообщаютъ ему той свободной подвижности пониманія и мышленія, какая требуется въ наукахъ о вещественномъ мірѣ. Слѣдствіемъ этого является еще то, что и преподаваніе математики принимаетъ превратную форму тѣмъ въ большей мѣрѣ, чѣмъ оно тѣснѣе соприкасается съ учрежденіями, гдѣ изучаются древніе языки. Выше мы уже не разъ встрѣчались съ тѣмъ фактомъ, что политехническая форма жизни новаго времени съ созданными ею институтами благотворно вліяла на обученіе точнымъ наукамъ. Очевидно, это потому, что здѣсь имѣла мѣсто самымъ рѣшительнымъ образомъ эмансипація отъ этихъ мертвыхъ образовательныхъ средствъ.

221. Припомнимъ себѣ еще разъ ту эпоху, когда духъ Парижской Политехнической Школы, какъ отголосокъ французской революціи, сдѣлался, наперекоръ всякимъ помѣхамъ, могущественнымъ средствомъ пропаганды естественныхъ и самобытныхъ штудій. Это

было время, когда Монжъ выпустилъ въ свѣтъ свою «Начертательную Геометрію». Преподаваніе этой, имъ созданной, отрасли математики, въ которой, какъ въ своей наиболѣе здоровой почвѣ, въ значительной степени коренились и позднѣйшіе наглядные и проэктивные методы Понселе, должно было имѣть въ строгомъ смыслѣ слова національное дѣйствіе. Ремесленники и художники должны были развивать въ себѣ способность нагляднаго представленія и искусство въ воспріятіи пространственныхъ отношеній, и, такимъ образомъ, выработкою геометрически утонченнаго вкуса и соотвѣтственно изощреннаго искусства, пролагать себѣ путь къ усовершенствованію приемовъ и издѣлій. Это была величественно задуманная и, вмѣстѣ съ тѣмъ, поистинѣ практическая идея; соединявшая соображеніе объ облагораживающемъ вліяніи научнаго образованія съ заботами о возможно высшей технической производительности всего народа. Еще доннынѣ *Géometrie descriptive*, и, притомъ, всего лучше въ формѣ носящаго это имя произведенія Монжа, служить существеннымъ средствомъ воспитанія геометрической наглядки даже тамъ, гдѣ, въ частности, практическая цѣль не есть главное дѣло. По начертательной геометріи есть нѣсколько новыхъ учебниковъ; но только тогда надлежаще оцѣниваешь естественную простоту основнаго произведенія Монжа, когда, взявъ его главнѣйшимъ руководствомъ, увидишь на себѣ его вліяніе. Главнѣйшая основная часть этого произведенія, какъ того и желалъ Монжъ, понятна даже двѣнадцатилѣтнимъ школьникамъ, и, по моему мнѣнію, пока еще нѣтъ ничего лучшаго, оно могло бы служить исходнымъ пунктомъ преподаванія геометріи вообще, и съ нѣкоторыми дополненіями вполне замѣнить обыкновенныя начатки школьной геометріи, каковыя, слѣдуя несчастной, неестественной, александрійской манерѣ Эвклида, сплошь портятъ успѣхи обученія, дѣлая дѣйствительное математическое образованіе исключительнымъ преимуществомъ нѣсколькихъ процентовъ болѣе даровитыхъ учениковъ, которые въ силахъ преодолѣть искусственныя помѣхи, тогда какъ большинство остается почти что ни при чемъ. Конечно, опредѣленіе свойствъ тѣлесныхъ фигуръ отнесеніемъ этихъ фигуръ къ двумъ плоскостямъ есть одно изъ средствъ въ числѣ другихъ; но Монжевская манера, во всякомъ случаѣ, есть первый рѣшительный примѣръ, гдѣ познаніе геометріи сообщается путемъ живыхъ и практическихъ представленій. Мы, работающіе не въ эпоху перехода отъ 18-го столѣтія къ 19-му, а при переходѣ къ 20-му, конечно, являемся представителями болѣе совершенной перспективы. Мы имѣемъ въ виду удовлетворить требованіямъ высшей абстракціи, равно и полнѣйшей наглядности, строжайшей формы доказа-

тельствъ, равно какъ и непосредственныхъ аллюровъ познающаго мышленія.

Ссылка на вышеозначенный великій примѣръ имѣетъ несравненно большее значеніе, нежели—простаго указанія на разсматриваемую специальную часть математики, какъ на предметъ для изученія. Весь этотъ способъ концепціи заслуживаетъ особаго вниманія съ нашей стороны. Всю математику и механику, вмѣстѣ со смежными науками, нужно разсматривать съ подобной же здоровой точки зрѣнія, съ какой смотрѣлъ на нее Монжъ; тогда способы преподаванія могли бы уллучшиться и стать въ самомъ дѣлѣ универсально плодотворными. Можно смотрѣть на математику, какъ на вспомогательное средство техники, или же, какъ въ университетахъ, можно ее преподавать, чтобы готовить учителей, притомъ, по большей част не учителей-техниковъ, а такихъ, вся задача которыхъ сводилась бы къ приложенію пріобрѣтенныхъ дисциплинъ, какъ образовательнаго средства, къ гимназіямъ и реальнымъ школамъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ все вращается въ области, чуждой всякаго практическаго побужденія къ прогрессу и къ примѣненію матеріала къ потребностямъ реальной жизни и жизненно связаннаго съ нею изслѣдованія. Учатъ для того, чтобы подготовить учителей же, а весьма неопредѣленные цѣли образованія, въ силу своей чисто формальной постановки, не даютъ никакихъ средствъ оріентироваться. Выврожденіе въ простую ученость при такихъ обстоятельствахъ неизбежно, а способъ веденія дѣла, обременительный и для ума, и для занятій, вещь весьма обыкновенная. Третьею точкою зрѣнія было бы приспособленіе математическихъ наукъ въ видахъ выработки точнаго міровоззрѣнія. Но эта истинная цѣль образованія не позволяетъ обрывать нить на низшей математикѣ. Можно, поэтому, утвердительно сказать, оставляя въ сторонѣ совершенно второстепенную цѣль чисто формальнаго упражненія созерцанія и мышленія, что штудіи теряютъ всякую матеріальную образовательную цѣнность, какъ скоро онѣ не простираются до такихъ воззрѣній, какія необходимы для строгаго усвоенія ученія о тяготѣніи, равно и для безпрепятственнаго обладанія математическою стороною опытныхъ предложеній физики. Въ техникѣ же и безъ этого ограниченіе низшею математикою не можетъ имѣть мѣста; такимъ образомъ, здѣсь сталкиваются соображенія житейской практики съ усмотрѣніями относительно высшихъ образовательныхъ цѣлей теоріи. На этомъ основаніи, и новыя учрежденія, служащія цѣлямъ реальной жизни, наиболѣе пригодны дать точку приложенія высшему проявленію образовательнаго значенія математики. По меньшей мѣрѣ, практическая, обращенная на приложенія, сторона математики мо-

жетъ быть лучше, согласована съ высшими образовательными цѣлями, нежели выродившаяся ученость и спекулятивная отчужденность схоластической цеховой дѣятельности. Само собою разумѣется, при этомъ предполагается, что учебныя учрежденія всякаго рода, поскольку вообще они еще имѣютъ право на существованіе, должны быть преобразованы въ либеральномъ духѣ, чтобы служить дѣйствительнымъ интересамъ общества. Политически отжившія или испорченныя состоянія вредно дѣйствуютъ и на личное представительство математики; ибо обыкновенно должности преподавателей, — а они-то и задаютъ тонъ, при университетахъ и подобныхъ учрежденіяхъ, достигаютъ только тѣхъ, кто, по своему характеру и по способности приспособляться къ обстоятельствамъ, какъ-разъ подходятъ къ господствующей системѣ.

Исторически важно, что эпоха французской революціи не только поставила на очередь мысль объ истинныхъ учебныхъ произведеніяхъ, надъ которыми, ради общаго блага, трудились бы первые представители науки, но кое-что изъ этихъ предначертаній успѣла и осуществить. И просвѣтителънъ духъ 18-го вѣка, предшествовавшій этому могучему потрясенію общественной жизни, еще и теперь остается въ научномъ методѣ идеальной силою, которая, хотя и испытываетъ стѣсненія благодаря реакціи, но не могла быть исполнѣ ею подавлена. Духъ ясности и основательности въ математикѣ той эпохи долженъ представляться намъ идеальнымъ прообразомъ, если мы сравнимъ его съ позднѣйшими и современными туманными, и даже мистическими, призраками, населившими эти, по названію, строгія и точныя науки. Не только исторія механики, но и всей математики даетъ намъ доказательства, что лучшія попытки къ прогрессу, осязательныя еще и въ 19-мъ столѣтіи, и по времени близки и по духовному типу подобны — 18-му. Итакъ, сама исторія науки даетъ принципиальное заключительное указаніе, каковъ долженъ быть общій строй и направленіе штудій. Но если мы, заключая нашу исторію основаній рациональной и математической механики, взяли на себя трудъ систематизировать методы занятій, то въ этомъ поученіи руководствовалъ насъ, кромѣ того, и собственный личный опытъ. Выставленныя нами основоположенія находятся въ согласіи съ ходомъ нашихъ личныхъ занятій, такъ что и тутъ собственное отношеніе автора не отдѣляется пропастью отъ его совѣтовъ, разросшихся до размѣровъ цѣлой теоріи штудій. Разсматриваемое же въ цѣломъ, это подкрѣпленіе личнаго опыта, и именно сужденія о настоящемъ, опредѣленными ученіями всей исторіи науки даѣтъ вѣрнѣйшее ручательство въ томъ, что близкое и далекое охвачены и оцѣнены совокупно, въ

равной мѣрѣ, и слѣдуя однимъ и тѣмъ же критическимъ основоположеніямъ.

222. Послѣ того, что здѣсь сказано о способахъ обученія и изученія, относящихся къ математикѣ и смежному, по преимуществу—точному, знанію, остается указать на дальнѣйшую связь между нашими методическими совѣтами и остальными нашими работами. Сказанное здѣсь, какъ и все это сочиненіе, входитъ въ кругъ плодовъ нашей дѣятельности, посвященной реформѣ знанія. Хотя эти наши указанія и есть нѣчто самостоятельное и потому само по себѣ понятное, но польза ихъ будетъ еще больше, если привести ихъ въ связь съ нашими мыслями, высказанными въ другихъ мѣстахъ.

Я разумѣю при этомъ не только наставленія по части новыхъ «Основаній» математики, но вообще болѣе высокую точку зрѣнія, выставленную нами, т.-е. авторомъ и его сотрудникомъ, которому въ другихъ трудахъ принадлежитъ кое-гдѣ первое мѣсто, причемъ, исходя изъ этой точки зрѣнія, мы достигли спеціальнѣйшихъ и осязательнѣйшихъ завоеваній. Изобрѣтеніе новаго способа исчисления, исчисления значностей, улучшеніе низшей и высшей теоріи уравненій и обогащеніе ея новыми фактами и методами, основы новаго общаго ученія о функціяхъ,—таковы частности, ручающіяся за то, что и общія, понятнымъ образомъ измѣненныя, истолкованія, каковы—о неограниченно-маломъ и о мнимомъ, имѣютъ значеніе, которое едва ли мы оцѣниваемъ выше должнаго.

Но обогащеніемъ и улучшеніемъ самой науки только и стало возможно дать болѣе простыя и болѣе ясныя основанія для ея изученія и проложить путь къ лучшему обученію. Въ наше время, и именно благодаря наслѣдію, оставленному Гауссомъ, математика и обученіе ей, во многихъ существенныхъ пунктахъ, на столько извращены, что, говоря хладнокровно и сознательно, такое ея искаженіе можно назвать гибельнымъ для ума. Пересѣченіе параллелей—только осязательный симптомъ умопомраченія, область котораго весьма обширна, и изъ нея можно бы было сформировать, богато и пестро, не одинъ звѣринецъ ученыхъ сумасшедшихъ.

Этотъ безпорядокъ не только подлежитъ устраненію, но должны быть и на будущее время предотвращены, на сколько возможно, всякія уклоненія подобнаго пошиба. Высокое значеніе математическаго знанія не ограничивается его служебною ролью; помимо этого, математика должна сообщать уму извѣстную твердость. Главная функція уже элементарнаго обученія должна состоять именно въ сообщеніи такой устойчивости. Но развѣ возможно до-

стичь чего-либо въ этомъ направленіи, если состояніе элементовъ стало въ послѣднее время насквозь сомнительнымъ, а поскольку рѣчь идетъ о высшихъ отпрыскахъ этой области, она издавна связана съ разнаго рода выдумками, а построена ненатурально.

Элементы, т.-е. первичныя составныя части всей математики, имѣютъ рѣшающее значеніе для всего дальнѣйшаго, болѣе сложнаго и высшаго, слѣдовательно—и для всѣхъ значительныхъ частныхъ высшаго порядка и для всѣхъ приложений. Смотрѣть на элементы, какъ на вещь, не имѣющую важнаго значенія и интереса, было бы дурнымъ и пустымъ важничаньемъ. Болѣе же основательное отношеніе къ дѣлу указываетъ видѣть именно въ нихъ вещь, благодаря которой приобрѣтается широчайшее господство. Они должны быть рычагомъ, посредствомъ котораго можно сорвать съ петель суевѣріе въ математикѣ и во всѣхъ направленіяхъ освободить творческія математическія силы. Во всякомъ случаѣ, сами мы доселѣ съ видимымъ предпочтеніемъ пеклись о болѣе высокихъ и высшихъ областяхъ; но возможностью успѣха обязаны отчасти и тому обстоятельству, что ранѣе этого въ должной мѣрѣ уяснили себѣ элементы. Элементы и принципы, это—движушія силы, и познаніе предварительныхъ ступеней есть какъ бы орудіе, потребное для дальнѣйшаго восхожденія. Разъ эти орудія хороши и остры, то работа можетъ быть плодотворна, и можно идти во всѣхъ направленіяхъ къ совершенствованію знанія.

Очищеніе и уясненіе математики ведетъ съ собою уясненіе и механики, а съ этимъ вмѣстѣ—и физики, астрономіи, химіи, а въ концѣ концовъ—и всѣхъ наукъ, основывающихся на измѣреніи и вычисленіи. Но какъ въ нихъ отнюдь нельзя избѣжать ни пространственнаго элемента, ни временнаго, т.-е. никакого, въ смыслѣ не-суевѣрномъ, возможнаго бытія, то связь математическаго и точнаго знанія съ чѣмъ угодно въ мірѣ, даже съ свойствомъ всякаго возможнаго бытія, связь эта является для мышленія и изслѣдованія преимущественно руководящимъ фактомъ.

К О Н Е Ц Ъ.

СОДЕРЖАНІЕ.

Отъ переводчика	Стр. III
Главные пункты вѣдшей исторіи предлагающаго труда	V

ВВЕДЕНІЕ.

Значеніе предмета и отношеніе къ древности.

1. Смыслъ и преимущества исторіи принциповъ. 2. Рациональность въ противоположность первоначальной стадіи простой практики. 3. Античная статика. Архимедъ. 4. Характеръ Архимедовскихъ произведеній. Работа о равновѣсіи плоскостей. 5. Сочиненіе о плавающихъ тѣлахъ. Устойчивость. 6. Принципіальные начатки въ античномъ смыслѣ. Отсутствіе особаго сознанія о происхожденіи ихъ познанія. 7. Историческое отношеніе математики къ механикѣ. Самостоятельность новаго времени	I
--	---

ПЕРВЫЙ ОТДѢЛЪ.

Основаніе динамики. — Время Галилея.

ПЕРВАЯ ГЛАВА. Предшественники Галилея. 8. Леонардо да Винчи. Его математико-экспериментальный методъ. 9. Его воззрѣнія на механику и на математику. 10. Время паденія на наклонной плоскости. Принципъ виртуальныхъ скоростей. 11. Бенедетти. Понятіе момента. 12. Гвидо Убальди	II
--	----

ВТОРАЯ ГЛАВА. Основаніе динамики Галилеемъ. 13. Превосходный способъ изложенія. Современники Галилея. 14. Усовершенствованіе статики. 15. Его главныя сочиненія по механикѣ. 16. Принципіальныя основныя понятія. 17. Понятіе момента. Разъясненія. 18. Настоящее опредѣленіе момента. 19. Скорость какъ мѣра момента. 20. Производженіе скоростей. 21. Косность	16
--	----

ТРЕТЬЯ ГЛАВА. Возникновеніе главныхъ результатовъ Галилеевской механики и формированіе различныхъ началъ. 22. Участие умозрѣнія. 23. Опредѣленія абсолютныхъ величинъ. Сознаніе Галилея о своихъ трудахъ. 24. Сложеніе силъ. 25. Границы представленій о сложеніи силъ. Редукція къ иному направленію. 26. Принципъ равныхъ скоростей въ концѣ паденія по различнымъ направленіямъ. Позднѣйшее доказательство. 27. Косвенное дѣйствіе силы какъ статическая аксіома. Равно-	
---	--

вѣсіе на наклонной плоскости. Мнимое доказательство. 28. Замѣчаніе о смѣшеніи двигательнаго эффекта съ эффектомъ равновѣсія. 29. Маятникъ. Первоначальный типъ позднѣйшихъ представленій о сохраненіи силы. 30. Основная форма математическаго способа представленія. 31. Связь и положеніе динамическихъ ученій Галилея	30
ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА. Статическіе принципы въ Галилеевскій періодъ. 32. Выдающіяся личности. 33. Стэвиново доказательство равновѣсія на наклонной плоскости. 34. Сравненіе съ Галилеевскимъ доказательствомъ. Слѣды начала непрерывности. 35. Законъ рычага. Архимедовскій способъ доказательства. 36. Нервъ доказательства. Неустраненное сомнѣніе. 37. Концепція основныхъ механическихъ понятій. 38. Галилеевскія видоизмѣненія Архимедовскаго доказательства закона рычага. 39. Принципъ виртуальныхъ скоростей какъ аксіома. 40. Примѣненіе къ рычагу. 41. Положеніе виртуальнаго принципа въ Галилеевской статикѣ. Современное примѣненіе его къ наклонной плоскости—только кажущееся. 42. Отношенія гидростатики къ общимъ принципамъ. Архимедъ. Стэвинъ. 43. Галилеевское перенесеніе виртуальнаго принципа на гидростатику. 44. Исходные пункты Паскаля. 45. Пробѣлы, до сего времени замѣчаемые въ принципиальныхъ исходныхъ пунктахъ. Роберваль. Сложеніе движеній. 46. Картезий. Полиспасть и виртуальное начало. 47. Фермать. Начало наименьшаго дѣйствія	53
ПЯТАЯ ГЛАВА. Вліянія тогдашней философіи. 48. Аристотеля. Другія заблужденія у Бэкона и Декарта. 49. Декартова пониманіе законности. Отрицаніе Галилеевской динамики и ложный методъ вообще. 50. Сохраненіе количества движенія	90

ВТОРОЙ ОТДѢЛЪ.

Времена Гюйгенса и Ньютона.

ПЕРВАЯ ГЛАВА. Общій ходъ развитія. 51. Двойное направленіе. 52. Связь съ предшествующимъ	98
ВТОРАЯ ГЛАВА. Формированіе началъ у Гюйгенса. 53. Главные труды. 54. Центробѣжная сила. 55. Легкость обобщенія ея теории. 56. Время качанія простаго маятника по отношенію къ его абсолютной длинѣ. Циклоидальныя качанія. 57. Центръ качанія. Идеи Декарта. 58. Средство рѣшенія задачи сложнаго маятника. Принципы равнаго поднятія. 59. Происхожденіе Гюйгеновскаго принципа	102
ТРЕТЬЯ ГЛАВА. Сложеніе силъ и законы удара. 60. Признаніе статическаго значенія принципа сложенія. Вариньонъ. 61. Его методъ. Моменты и рычагъ. 62. Исслѣдованіе отношеній къ рычагу. 63. Разсмотрѣнія касательно развитія принципа. Лами. 64. Порядковое отношеніе между принципами рычага и сложенія силъ. Гюйгенова попытка доказательства закона рычага. 65. Какъ опредѣляется силовое дѣйствіе двумя массами. Расширеніе понятія о сложеніи силъ. 66. Ударъ. Обзоръ. 67. Галилеевскія попытки рѣшенія вопроса. 68. Декартъ объ ударѣ. 69. Валлисъ о неупругомъ ударѣ. 70. Общее значеніе Гюйгеновскаго приѣма. 71. Развѣтіе его главныхъ теоремъ. 72. Отношенія законовъ удара къ болѣе общимъ теоріямъ и отношеніе къ опыту	121
ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА. Ньютонова механика тяготѣнія. 73. Оцѣн-	

ка. 74. Что особенно достойно вниманія въ области Ньютоновскихъ изслѣдованій. Три главные пункта. Математическая сторона. 75. Главное произведеніе. 76. Античные аналоги представленія о тяготѣніи. Паденіе луны. 77. Новѣйшіе прецеденты. Причины, помѣшавшія Кеплеру дать правильную теорію. 78. Борелли. Гукъ. 79. Ньютоново заключеніе о квадратичномъ уменьшеніи. Доказательство тождества обыкновенной тяжести и аттракціи. 80. Коническое сѣченіе какъ форма движенія вслѣдствіе тяготѣнія къ фокусу. 81. Отношеніе къ криволинейному движенію вообще. Тангенціальная сила. 82. Переходъ отъ форономической стороны тяготѣнія къ массамъ. Принципіальное значеніе вопроса объ измѣреніи непостоянной силы. 83. Основаніе и смыслъ фиксированія непостоянныхъ силъ и подведеніе подъ схему обыкновеннаго силового дѣйствія. *Vis motrix*. 84. Космически расширенное понятіе о вѣсѣ. Заключеніе отъ движенія къ массамъ. 85. Понятіе о массѣ. Сила инерціи въ отличіе отъ инерціи. Равенство дѣйствія и противодѣйствія въ абсолютной величинѣ, для мгновенныхъ отношеній и цѣлаго ряда дѣйствій. Отношеніе этой аксіомы къ сохраненію силъ. Приложеніе къ аттракціи. 86. Ньютоново отношеніе къ концепціи и сочетанію прежнихъ фундаментальныхъ принциповъ. Три аксіомы движенія. Отношеніе къ принципу виртуальныхъ скоростей. 87. Математическій способъ изложенія въ „Принципіяхъ“. Первая и послѣднія отношенія. Флюкції. Геометрически-синтетическая форма. Контрастъ съ позднѣйшимъ преобладаніемъ чистаго анализа. 88. Простое представленіе о характерѣ механики тяготѣнія. Ядро Ньютоновскихъ работъ. Отношеніе къ предыдущему и послѣдующему

151

ТРЕТІЙ ОТДѢЛЪ.

Время общихъ формулированій и аналитическаго развитія до Лагранжа включительно.

ПЕРВАЯ ГЛАВА. Главные пункты прогресса. 89. Указаніе математическаго развитія. 90. Введеніе координатныхъ осей въ механику. 91. Общія формулировки. Примѣсъ метафизическихъ спорныхъ пунктовъ. Три стороны изслѣдованія. Участіе философіи. 92. Стремленіе къ обобщенію. Подчиненіе механики жидкостей общимъ принципамъ. Извѣстная мѣра сочетанія статики съ динамикой. 93. Какова была зависимость между успѣхами и какъ они группировались въ вопросѣ о сочетаніи статическихъ условій съ динамическими и въ отношеніи къ принципу сохраненія живыхъ силъ

187

ВТОРАЯ ГЛАВА. Принципъ сохраненія живыхъ силъ. 94. Основы у Гюйгенса. 95. Мертвая и живая сила въ метафизическомъ способѣ представленія Лейбница. Измѣреніе силъ. Общее представленіе сохраненія. 96. Иванъ Бернулли примыкаетъ къ Лейбницевскимъ исходнымъ пунктамъ. Противоположное отношеніе его сына Даниила Бернулли, который обращается къ Гюйгенсу и прилагаетъ его предложеніе о сохраненіи силы къ движенію жидкостей и къ какимъ угодно притяженіямъ. 97. Вторая составная часть Гюйгеновскаго принципа. Сохраненіе несмотря на присутствіе статическихъ отношеній. Зародышъ общей идеи о сложеніи живыхъ силъ, дѣйствующихъ въ статическомъ сочетаніи. 98. Анализъ Гюйгеносов-

скаго принципа Яковомъ Бернулли. 99. L'Hopital'евское исправленіе ошибки Якова Бернулли въ примѣненіи своего принципа. Гюйгенсовы замѣчанія по этому поводу. Новыя и общія рѣшенія Якова Бернулли. 100. Разъясненіе разсматриваемаго способа представленія на примѣрѣ L'Hopital'я. 101. Способъ сложенія силъ въ рѣшеніи Якова Бернулли. Указаніе на примыкающую сюда форму принципа д'Аламбера. 102. Отношеніе принципа сохраненія къ статическимъ отношеніямъ. Болѣе узкая и болѣе широкая концепція въ позднѣйшихъ представленіяхъ этого принципа. Необходимость наибольшаго обобщенія. 103. Нѣкоторые новыя приступы къ рѣшенію задачи о центрѣ качанія, какъ наприм. уловка Тайлора. Наблюденіе, что все яснѣе становится ненужность принципа сохраненія для случаевъ, гдѣ для рѣшенія задачи достаточно мгновенныхъ силовыхъ отношеній. Характеръ принципа сохраненія въ смыслѣ доказуемой механической теоремы. 104. Переходъ къ Лагранжевой концепціи. Способъ возвращенія д'Аламбера. 105. Способъ вывода сохраненія живыхъ силъ у Лагранжа. 106. Отношеніе къ общему основному уравненію динамики. 107. Два главныхъ предположенія или ограниченія принципа по возвращенію Лагранжа. Активные и пассивныя силы. 108. Сохраненіе силы въ Лагранжевомъ совершенно упругомъ ударѣ какъ особо мотивированное исключеніе. Выводъ правила Карно. 109. Теорема Карно о потерѣ живой силы какъ указатель пути къ болѣе общему формулированію принципа сохраненія. Заключительное замѣчаніе о всеобщности и о рациональномъ происхожденіи принципа сохраненія

197

ТРЕТЬЯ ГЛАВА. Характеристичныя главныя теоремы динамики въ роли принциповъ. 110. Обзоръ отдѣльныхъ принциповъ. 111. Теорема о движеніи центра тяжести. Ея точный смыслъ и значеніе. Отсутствіе движенія по инерціи въ одномъ частномъ случаѣ. Разсмотрѣніе всѣхъ естественныхъ силовыхъ системъ какъ цѣлаго. 112. Формулированіе теоремы о сохраненіи состоянія инерціи центра тяжести уже у Ньютона. 113. Развѣтленіе новой болѣе полной теоремы о движеніи центра тяжести. Концепція Лагранжа. 114. Обычный аналитическій выводъ изъ основнаго свойства центра тяжести. Возможность тотчасъ же выставить конечную форму этого соотношенія какъ уравненія движенія центра тяжести. 115. Принципъ сохраненія алгебраической суммы количествъ движенія. Концепція Ньютона. 116. Болѣе широкое пониманіе. Формулированіе по отношенію къ цѣлому природы. Ссылка на Декартовскія идеи. 117. Принципъ площадей или сохраненія моментовъ вращенія. Первый фактическій зачатокъ у Кеплера. Последняя форма, приданная этому началу Пуансо. Способъ разработки принципа. 118. Ньютонова концепція этого принципа для центростремительныхъ силъ. Общій характеръ позднѣйшаго распространенія принципа на нѣсколько тѣлъ и на неравныя массы. 119. Форма принципа у Эйлера и Даниила Бернулли. Собственно принципъ площадей у d'Агсу. Существенное тождество обихъ формъ. Наиболѣе широкая концепція, какъ теорема о моментахъ количествъ движенія относительно произвольной оси. 120. Лагранжевская обработка. Слѣды приближенія къ понятію силовой пары у Эйлера. Дополненіе принципа указаніемъ плоскости максимума площадей. 121. Принципъ наименьшаго дѣйствія. Ссылка на Фермата. Форма принципа у Мопертюи. Неопредѣленность. Перенесеніе на статику. Случай удара. 122. Случай рычага и вообще равно-

вѣсія. Попытка объясненія просто изъ закона непрерывности. 123. Эйлєровы работы по принципу наименьшаго дѣйствія. Двѣ его формулы, изъ коихъ одна представляетъ сумму мгновенныхъ живыхъ силъ. Сомнительность метафизической концепціи. Ограниченіе вывода отдѣльными тѣлами, движущимися подъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ вслѣдствіе данной скорости. 124. Расширеніе и измѣненіе принципа наименьшаго дѣйствія у Лагранжа. Приложеніе къ цѣлой системѣ. Общій переносъ на случай равновѣсія. Наибольшая и наименьшая живая сила. Альтернатива между максимумомъ и минимумомъ. 125. Представленіе Карно, что принципъ состоитъ въ томъ, что потерянные силы составляютъ *minimum*. Основаніе всѣхъ шаткихъ концепцій принципа. Идея принципа наибольшаго дѣйствія. Ссылка на д'Агсу. Ограниченные размѣры, въ какихъ у Лагранжа изслѣдуется механическое различіе максимальныхъ величинъ отъ минимальныхъ. 126. Принципъ д'Аламбера. Настоящая форма его. Равновѣсіе потерянныхъ силъ. Ссылка на Якова Бернулли. Типъ находящагося въ движеніи рычага. Парціальное равновѣсіе

231

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА. Принципъ виртуальныхъ скоростей и систематизированіе механики Лагранжемъ. 127. Припоминается прежняя исторія принципа виртуальныхъ скоростей. Яковъ Бернулли снова обращается къ этому началу. 128. Лагранжевскій опытъ доказательства посредствомъ полиспада. 129. Отношеніе между направленіемъ силы и виртуальнымъ перемѣщеніемъ. Естественный способъ представленія, дабы имѣть возможность соотвѣтственнаго логическаго пониманія принципа. 130. Принципъ измѣренія виртуальнаго силоваго дѣйствія. Ограниченіе числа возможностей виртуальныхъ перемѣщеній какъ главный методъ Лагранжа. 131. Нервъ Лагранжевскаго способа доказательства принципа на идеальномъ полиспадѣ. 132. Критика этого доказательства. Редукція силы къ нѣкоторому направленію предполагается здѣсь какъ особый принципъ. 133. Болѣе законченная форма вывода виртуальнаго принципа изъ условныхъ уравненій въ Теоріи функцій. Общій методъ этого вывода. 134. Преимущества этой послѣдней формы доказательства. Положеніе виртуальнаго принципа въ механикѣ Теоріи функцій. Отношеніе къ Лагранжевской обработкѣ сложения силъ. 135. Фоссомброни и Карно о виртуальномъ принципѣ. Карнотовское представленіе о чисто-геометрическомъ перемѣщеніи безъ динамическаго эффекта. Замѣчаніе Лагранжа о законности принципа для конечныхъ разностей. 136. Связь Карнотовскаго представленія съ идеями о роли безконечно-малаго. Независимость виртуальнаго принципа отъ отношенія къ элементарнымъ перемѣщеніямъ и соотвѣствующимъ вспомогательнымъ величинамъ. 137. Античная строгость Лагранжа, сказывающаяся въ превращеніи обыкновенныхъ дифференціальныхъ понятій въ функціонныя понятія. Фундаментальное основаніе въ концепціи понятія скорости. Два способа концепціи. Двигательное касаніе во времени. Разложеніе дѣйствительнаго элемента движенія на равномерную составную часть и перемѣнный элементъ втораго порядка. 138. Лагранжевская метода преобразованія дифференціальныхъ понятій. Наше непосредственное рационализированіе неограниченно-малаго. Обоестороннія, а не одностороннія, урѣзки. Критика Лагранжевскаго пріема. 139. Лагранжевскія основанія по ограниченію теоріи движеніями, соотвѣствующими квадратамъ, и не высшимъ степенямъ, времени. Непринятіе разстояній въ принципиальныя ос-

новыя формы функцій. 140. Аналитическій переходъ отъ явленій движенія къ усмотрѣнiю массъ. Неточности способа представленія, обнаруживающіяся при введеніи массоваго фактора въ уравненія. 141. Аналитическое силовое понятіе и значеніе силовыхъ символовъ для статики и динамики. 142. Виртуальный принципъ въ наиболѣе общемъ, дѣйствительномъ и для динамики, смыслѣ. Форма отношеній для одной координатной оси. Неопредѣленныя силы, помноженныя на производныя функціи условныхъ уравненій. Виртуальный принципъ какъ слѣдствіе понятія силы. 143. Установленіе общаго основнаго уравненія статики въ Аналитической Механикѣ Лагранжа. Смыслъ его отнюдь не чисто символическій. Припоминается схема нитей. 144. Болѣе общая форма основнаго уравненія статики, въ которой связи и условныя уравненія замѣнены виртуальными моментами неопредѣленныхъ силъ. Методъ неопредѣленныхъ множителей. Представленіе системы, какъ бы она была свободною. 145. Выводъ основнаго уравненія динамики изъ статическаго соотношенія. Общее въ каждомъ силовомъ уравненіи. Независимость аналитическаго соотношенія между абсолютно взятыми силами отъ представленій равновѣсія или движенія. Различныя приемы приведенія къ нулю и отдѣленія составныхъ частей. 146. Смыслъ общаго силового уравненія, которое только смотря по роду истолкованія дѣлается статическимъ, либо динамическимъ. Общее основное правило обращенія съ этимъ уравненіемъ и приведенія къ аналитическому виду всякихъ механическихъ задачъ, а именно къ нѣсколькимъ партикулярнымъ уравненіямъ. 147. Обзоръ внѣшняго распорядка и соответствующей внутренней связи между общими ученіями въ Лагранжевой Аналитической Механикѣ. 148. Положеніе частныхъ задачъ въ системѣ. Общее отношеніе метода къ гидростатикѣ и гидродинамикѣ. 149. Прежнее изолированіе гидростатики. Принципы у Клеро. Формальный прогрессъ Лагранжа сравнительно съ Эйлеровскимъ способомъ вывода. Форма общей фундаментальной формулы для капельныхъ жидкостей. 150. Аналогичная форма для газообразныхъ жидкостей. Общая точка зрѣнія для несжимаемыхъ и для упругихъ жидкостей. Неопредѣленный коэффициентъ и упругость. Ненужность аксіомы о равенствѣ давленія во всѣхъ направленіяхъ около одной точки. 151. Сравненіе хода развитія принципозъ гидродинамики съ Лагранжевскимъ завершеніемъ. Торричелли, Ньютонъ, Вариньонъ, Даніилъ Бернулли, Даламберъ и Эйлеръ. Замѣчаніе о газообразной системѣ какъ о простѣйшей схемѣ механическаго распорядка. 152. Обращеніе къ исходному пункту механической систематики. Логическое отношеніе принципа виртуальныхъ скоростей къ понятію механическаго арранжемента, ограничивающаго силовыя дѣйствія. 153. Аналогія между системнымъ распорядкомъ теоріи и болѣе или менѣе специальною формою системнаго распорядка въ механическомъ арранжементѣ, на который дѣйствуютъ силы. Возможность высокой степени абстракціи, благодаря новымъ аналитическимъ вспомогательнымъ средствамъ варьяціонныхъ методовъ. Сужденіе Гамильтона о Лагранжевскомъ приѣмѣ

ПЯТАЯ ГЛАВА. Философскія вліянія. 154. Неблагопріятный характеръ всякихъ метафизическихъ вліяній. Главные случаи. Противодѣе противъ метафизическаго затемнѣнія механическихъ понятій встрѣчаемъ преимущественно у Юма. 155. Метафизическія несообразности у Канта. Недостатокъ механической характеристики въ проведеніи туманной гипотезы.

тезы. Ложное основаніе заключенія о неоткрытыхъ планетахъ и противорѣчіе точныхъ фактовъ пророчеству. 156. Специальныя начинанія Канта въ области механическихъ принциповъ. Безуспѣшность этихъ метафизическихъ притязаній и общій о нихъ приговоръ. Соотвѣтственное замѣчаніе о Шопенгауерѣ. 157. Д'Аламбертово сведеніе механики къ тремъ первымъ принципамъ, причѣмъ эти принципы, въ свою очередь, должно еще рачіонально дедуцировать изъ матеріи и движенія. Недостатокъ широты въ философскомъ обобщеніи принятаго Яковомъ Бернулли принципа. 158. Лагранжъ свободенъ отъ метафизическихъ точекъ зрѣнія. Заключительное сужденіе 339

ЧЕТВЕРТЫЙ ОТДѢЛЪ.

Девятнадцатое столѣтіе.

ПЕРВАЯ ГЛАВА. Расширеніе основныхъ понятій механики въ работахъ Пуансо. 159. Два главные факта, характеризующіе принципиальныя успѣхи въ 19 столѣтіи. Обогащеніе элементовъ механики Пуансотовской теоріей силовыхъ паръ и расширеніе области приложенія механики и понятія о сохраненіи силы Майеровскимъ эквивалентомъ теплоты. 160. Припоминается задній планъ исторической сцены. Работы современныя Лагранжу и появившіяся послѣ него. Наглядно рачіональный методъ Пуансо въ противоположность аналитическому. Его права. 161. Пуансотовское понятіе силовой пары. Отношеніе къ понятію момента. Мѣра и основныя свойства относительно перенесенія мѣста приложенія. Аналогіи съ отдѣльною силою. 162. Неосновательное возраженіе противъ вычисленія дѣйствія силовой пары. Ограниченіе исключительно руководящимъ понятіемъ чисто переносной равнодѣйствующей въ противоположность равно возможному вращательному стремленію. Основаніе недостаточности параллелограмма силъ или движеній. Трудности теоріи параллельныхъ силъ. 163. Элементы способа доказательства, посредствомъ котораго Пуансо устанавливаетъ переносимость, мѣру и правило сложенія для силовыхъ паръ. Параллелограммъ силовыхъ паръ. 164. Главный приѣмъ Пуансо для сложенія всякихъ силъ и паръ въ неизмѣняемой системѣ. Перенесеніе всѣхъ силъ въ одну произвольную точку приложенія при эквивалентномъ произвожденіи паръ. Переносная равнодѣйствующая и результирующая пара какъ общій результатъ. Непосредственно наглядная необходимость шести основныхъ уравниваній статики. Пуансотовская плоскость максимумъ паръ для опредѣленнаго положенія равнодѣйствующей. Обзоръ простой аналогіи съ максимумомъ при сложеніи отдѣльныхъ силъ. 165. Minimum maximum Пуансо какъ неизмѣняемая пара въ неизмѣняемой плоскости. Случай равновѣсія или относительнаго покоя. Въ такомъ разѣ вопросъ можетъ быть только о плоскости maximum'a или равнодѣйствующей пары. Разъясненіе идей о максимальныхъ и минимальныхъ свойствахъ силовыхъ дѣйствій. Принципъ сохраненія площадей какъ слѣдствіе просто сложенія паръ. 166. Ссылка на Эйлера. Примѣненія въ новой теоріи вращенія. Сложеніе вращеній. Понятіе пары вращенія съ ея переноснымъ дѣйствіемъ. 167. Наглядныя форономическія поясненія теоріи вращенія. Измѣняющаяся винтовая схема и два конуса. Собственно механическая сторона теоріи. Дѣйствіе силовой пары, если принимать въ расчетъ массу тѣла. Централь-

ный эллипсоидъ. Границы общихъ видовъ на фундаментальныя методическія измѣненія

353

ВТОРАЯ ГЛАВА. О проблематическихъ принципахъ механики у Гаусса, Гамильтона, Якоби, Дирикле и другихъ. 168. Указаніе специальныхъ работъ Гаусса. Его принципъ наименьшей суммы квадратовъ отклоненій какъ общій основной принципъ для статики и динамики. 169. Отношенія такъ называемаго принципа Гаусса къ прежней исторіи принципа наименьшаго дѣйствія. Способъ вывода. Доказательство изъ понятія минимума, не прибѣгая къ обычнымъ аналитическимъ критеріямъ. Малодѣльность этого начала. Припоминается соответствующій общій характеръ Гауссовскихъ работъ вообще. 170. Гамильтоновскій принципъ перемѣннаго дѣйствія. Его характеристическая функція. 171. Якобіевъ принципъ послѣдняго множителя. Его аналитическое преобразование принципа наименьшаго дѣйствія. Кое-какія спеціальныя работы, примыкающія къ работамъ предшественниковъ. Расовый дефектъ. 172. Дирикле. Гидродинамика. Сопротивленіе срединъ. Нелѣпый результатъ. 173. Принципіальная частности у Коши. Соприкосновеніе механики съ прозрѣвательною геометріей

374

ТРЕТЬЯ ГЛАВА. Представленія, примыкающія къ механическому эквиваленту теплоты. 174. Универсальная тенденція новѣйшей эпохи, выражающаяся въ распространеніи механической точки зрѣнія на всѣ процессы природы и на всѣ роды силъ. 175. Майеровъ эквивалентъ теплоты вмѣстѣ съ сопровождающими представленіями о различныхъ формахъ проявленія механической силы. 176. Концепція силового понятія. Обобщеніе понятія о механической работѣ. Пространственное разстояніе, которымъ можно располагать. Функція разстоянія и массъ. Конечность силы тяготѣнія и для приближенія изъ безконечности. 177. Единство силы. Неразрушимость силы и подобныя мѣткія выраженія новыхъ способовъ представленія. Критическая замѣтка о затемненіи и объ искаженіи Майеровскихъ представленій эпигонами, которые и ввели въ обращеніе и въ моду эти искаженные представленія подъ именемъ потенциальной энергіи. 178. Экспериментальныя работы Джоула. Въ важныхъ приложеніяхъ Майеръ слѣдуетъ собственной теоріи. 179. Механическая теорія теплоты вообще. Отношенія къ представленію Сади Карно. Оріентированіе касательно существеннаго итога Сади-Карнотовскихъ традицій въ теоретической физикѣ. 180. Газы какъ первая точка приложенія для вычисленія силового значенія теплоты. Возвращеніе къ представленію Даніила Бернулли о строеніи и объ эффектѣ давленія газовъ и о соответственной такъ называемой кинетической теоріи. Сомнительность новѣйшей кинетики. Указаніе механическаго смысла абсолютнаго нуля температуры. 181. Общее вліяніе понятія работы на подготовку идей эквиваленціи. Отношеніе Понсле къ понятію механической работы. Превращеніе работы въ живую силу и наоборотъ. Ложное предсказаніе Фурье

389

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА. Какъ далеко простирается значеніе механическихъ принциповъ. 182. Форономическія предпосылки механики. Помѣхи развитію геометріи со стороны математическаго мистицизма и безсмыслицы. 183. Вопросъ о вліяніи философіи. О. Контъ. Его преимуществъ и недостатки въ области точнаго знанія. 184. Переходъ отъ форономіи къ механикѣ. Общее понятіе массы. 185. Общіе принципы въ ихъ примѣненіи въ области общей механики къ ея частнымъ проблемамъ. При-

мѣненія къ планетной и космической механикѣ. Измѣненіе понятій примѣненіями къ цѣлому природы, разсматриваемой какъ замкнутая механическая система. 186. Отношеніе механики къ физикѣ. Колебательное пространство какъ общая схема сообщенія движенія. Изслѣдованіе срединъ. Трудности въ опредѣленіи частичнаго движенія. Невозможность останавливаться на чисто механическихъ молекулахъ и на колебаніяхъ какъ на послѣднихъ элементахъ. 187. Значеніе метода изслѣдованія малыхъ колебаній съ постановки вопроса Данииломъ Бернулли. 188. Механическіе принципы въ электродинамикѣ. Воздѣйствіе этой области приложенія на самыя механическіе принципиальныя основныя представленія. Значеніе представленій сохраненія и превращенія. Космическая физика. 189. Фактическая необходимость не чисто механическихъ промежуточныхъ принциповъ въ физикѣ и въ химіи. Наши личныя работы въ этомъ направленіи. 190. Механическіе принципы въ органическомъ мірѣ и въ области жизни. 191. Возможныя и невозможныя отношенія механическихъ принциповъ къ нервному возбужденію и къ области ощущенія

415

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Изученіе математико-механическихъ наукъ и уроки исторіи.

192. Дополнительный характеръ эскиза о штудіяхъ. Отношеніе его къ «Новымъ основаніямъ» и къ даннымъ въ нихъ наставленіямъ. Принципы математики. 193. Отсутствие надлежащихъ пособій въ низшей математикѣ. 194. Раздѣлка съ элементами на практикѣ. 195. Усвоеніе основоположеній геометріи. 196. Измѣненіе посредствомъ неограниченно малыхъ единицъ. 197. Движеніе, измѣненіе и элементарное сложеніе величинъ какъ вспомогательное средство всей математики. 198. Сносныя качества французскихъ учебниковъ высшаго анализа. 199. Неточность содержащихся въ учебникахъ первыхъ основаній и именно такъ-называемой методы предѣловъ. Распространеніе д'Аламберовской кардинальной ошибки и ея аналогонъ у Лагранжа. 200. Пополненіе рационализированнаго исчисленія съ дифференціалами въ собственномъ смыслѣ исчисленіемъ съ производными функциями или чистыми предѣлами. Взаимность обоого рода понятій какъ составныхъ частей цѣлостной системы. 201. Неподобающее пренебреженіе къ натуральнѣйшей концепціи интеграла какъ суммы дифференціальныыхъ элементовъ. Опредѣленный, а не общій интегралъ, долженъ служить на практикѣ исходнымъ пунктомъ и главнымъ предметомъ. Интегралъ какъ сокращенная сумма элементовъ въ количественномъ отличіи отъ точнаго предѣла интеграла. 202. Предварительныя познанія изъ аналитической геометріи, разсматриваемой просто какъ методъ. 203. Точный смыслъ алгебраическихъ знаковъ для протяженій. 204. Мнимое въ строго логической концепціи. 205. Чистая графика какъ остатокъ Гауссовскихъ метафизическихъ несообразностей и какъ костыль плохихъ аналитиковъ. Истинное построеніе и обратный приѣмъ. 206. Необходимость непосредственно геометрическихъ исходныхъ пунктовъ и воззрѣній въ противоположность чистому исчисленію. 207. Изученіе новой синтетической геометріи, и въ частности, основнаго произведенія Понсле. 208. Границы проэктивной геометріи и устраненіе путаницы, вносимой произведеніями смѣшаннаго характера. 209. Внѣшнія судьбы синтетической геометріи. 210. Лучшій способъ поль-

зованія исчисленіемъ и построеніемъ. На первомъ мѣстѣ должно стоять вещественное изслѣдованіе. 211. Смыслъ аналитической механики. Основной трактатъ Лагранжа. 212. Учебники. Преимущества французскихъ. Неизбѣжное зло. 213. Основы механики въ учебникахъ физики, какъ онѣ есть и какъ должны бы быть. 214. Раціональная синтетическая механика въ противоположность исключительно аналитической. Высшая точка зрѣнія. 215. Исторія механики и изученіе. Исторія математики вообще. 216. Современное состояніе чистой математики въ противоположность физикѣ. Попятное движеніе къ второстепеннымъ спекулятивнымъ изслѣдованіямъ или къ отдѣльнымъ спеціальностямъ. Математическая схоластика. 217. Значеніе оригинальности авторовъ для изученія. 218. Употребленіе общихъ трактатовъ низшаго и высшаго рода. 219. Преимущество книгъ въ сравненіи съ лекціями. 220. Новые языки какъ вспомогательныя средства. 221. Виѣшнія и внутреннія цѣли изученія. 222. Связь всего предыдущаго съ остальными стремленіями

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Серия «Из наследия мировой философской мысли»

«Философия науки»

Аристотель. Физика.

Пуанкаре А. Наука и гипотеза.

Пуанкаре А., Кутюра Л. Математика и логика.

Лейбниц Г. В. Труды по философии науки.

Карнап Р. Философские основания физики. Введение в философию науки.

Дюгем П. Физическая теория. Ее цель и строение.

Ренан Э. Будущее науки.

Дриш Г. Витализм. Его история и система.

Кроль Дж. Философская основа эволюции.

Энгельмейер П. К. Теория творчества.

Васильев А. В. Пространство, время, движение.

Франк Ф. Философия науки: Связь между наукой и философией.

Бутру Э. Наука и религия в современной философии.

Лесевич В. В. Письма о научной философии.

Раждо Г. Ученые и философия.

Васильев С. Ф. Из истории научных мировоззрений: От Галилея до Больцмана.

Чудинов Э. М. Природа научной истины.

Кузнецов Б. Г. Этюды о мегануке.

Кузнецов Б. Г. Эволюция картины мира.

Шпет Г. Г. История как проблема логики.

«Теория познания»

Вундт В. О наивном и критическом реализме.

Милль Дж. Ст. О некоторых важнейших вопросах познания.

Гельмгольц Г. О цели и об успехах естествознания.

Гельмгольц Г. О зрении человека. Новейшие успехи теории зрения.

Жане П. Мозг и мысль.

Ферворн М. Механика душевной жизни.

Риль А. Теория науки и метафизика с точки зрения философского критицизма.

Дюбуа-Реймон Э. Г. О границах познания природы: Семь мировых загадок.

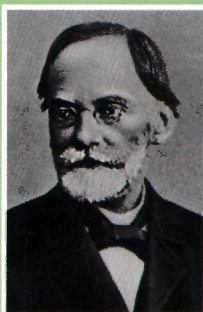
Зиммель Г. Проблемы философии истории: Этюд по теории познания.

Мечников И. И. Сорок лет искания рационального мировоззрения.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел. +7 (499) 724-25-45 (многоканальный)
или электронной почтой URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная
литература

Евгений ДЮРИНГ (1833–1921)



Немецкий философ, занимавшийся также вопросами политэкономии и права. Родился в Берлине, в семье прусского чиновника. Получил юридическое образование в Берлинском университете и занял должность правительственного судьи, но в результате болезни потерял зрение и отказался от юридической карьеры. В 1863–1877 гг. — приват-доцент Берлинского университета; читал лекции по философии и политической экономии. В 1877 г. ушел из университета и занялся исключительно научной и литературной деятельностью.

Евгений Дюринг — автор многих трудов в самых различных областях науки, от математики и физики до политической экономии и литературоведения. Считая философию априорным учением о конечных истинах, он попытался построить собственную систему «философии действительности» на основе идей метафизического материализма, позитивизма и кантианства. Согласно социологической концепции Дюринга, причиной социального неравенства, эксплуатации и нищеты является насилие, а социалистическое преобразование общества должно исключать революционный переворот и идти путем кооперирования мелких производителей. Идеи Дюринга получили распространение в среде немецкой социал-демократии, что побудило Ф. Энгельса подвергнуть их критическому анализу в известной книге «Анти-Дюринг». Poleмика Дюринга и Энгельса сыграла значительную роль в развитии и распространении материалистических версий трактовки природы и общества.

Наше издательство предлагает следующие книги:



9906 ID 121510



Любые отзывы о настоящей книге, а также обнаруженные опечатки по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения и отражены на веб-странице в нашем интернет-магазине.



URSS НАШИ НОВЫЕ
КООРДИНАТЫ

ТЕЛЕФОН/ФАКС (многоканальный) +7 (499) 724-25-45
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56